中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030415

黑白配-從一道澳洲 AMC 試題談起

學校名稱：南投縣私立普台高級中學

作者：	指導老師：
國二 黃煥智	蔡傳礎
國二 林均翰	陳文寬
國二 周彥廷	

關鍵詞：3xn 組合、雙十字組合、縱橫雙十字策略

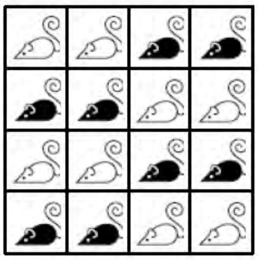
摘要

本研究深入探究了一道澳洲 AMC 題目：在 n×n 正方形方格中放置黑鼠與白鼠，使得每一隻老鼠周遭都有黑鼠也有白鼠，而且黑鼠數量最少。本研究探討了幾種不同策略，發現隨著正方形大小的差異，適用於不同的策略。

壹、 研究動機

一、上課時，老師讓我們做 2013 年澳洲ＡＭＣ試題，題目如下：

一位生物學家將籠子排成 4×4 的方陣，他想要在每個籠子內都恰好放入一隻老鼠(黑鼠或白鼠)，並使得每隻老鼠都至少與一隻黑老鼠及一隻白老鼠相鄰(兩個相鄰的籠子有公共的牆壁)，如下圖所示



因黑鼠比較貴，所以這位生物學家想使黑鼠愈少愈好。請問他最少需要幾隻黑鼠？

（A）4　（B）5　（C）6　（D）7　（E）8

正確答案為　（C）。

檢討時老師隨口講了一句：「如果是 5×5、6×6 呢？」我們對這個問題很感興趣，於是我們就著手開始了這次的研究。

二、相關教材教學單元：

（一）　八下　等差數列與等差級數

（二）　八下　線對稱圖形

（三）　九下　資料的分析

貳、 研究目的

一、尋找ｎ×ｎ正方形放置黑鼠的最少數量。

二、探討放置最少黑鼠的最佳策略。

參、 研究設備

紙、筆、電腦。

肆、 研究過程

在原題目中，有兩項放置老鼠的規則：

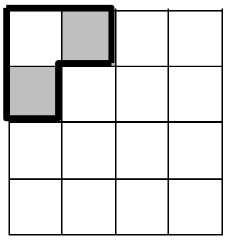
一、與每一格相鄰的格子內一定要有黑鼠和白鼠

二、黑鼠數量要最少。我們先試著思考 1×1、2×2、3×3、4×4、5×5……等 n × n 正方形內放置黑鼠的方式。

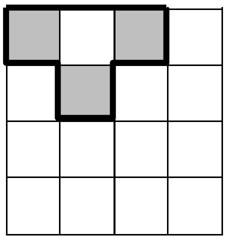
在思考過程中，我們以 B 來代表黑鼠，白鼠則為空格，以簡化符號。並使用不同策略來放置黑鼠，比較各策略，試圖找出一種可以用在不同大小正方型的策略。

（一） 由角落開始按規則放置

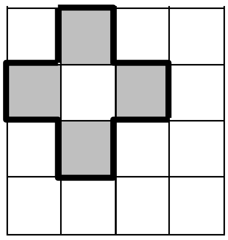
一開始我們先以 4x4 正方形來熟悉這道題目，在過程中，我們發現：有一些特定位置必須要有黑鼠，如圖一、圖二、圖三所示：



圖一

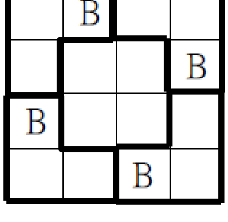


圖二

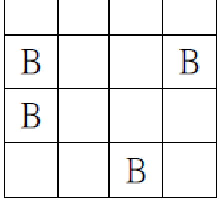


圖三

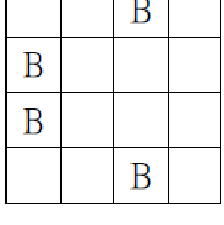
圖一左上角 L 型的三個方格中，讓我們知道，緊鄰角落格子的兩個灰色格子，必須一個放黑鼠，一個放白鼠，否則角落格子就不符合規則。圖二左上角山字型的四個方格中，緊鄰邊上格子的三個灰色格子中，必須至少有一個放黑鼠，至多兩個放黑鼠。圖三左上角十字型的五個方格中，緊鄰內部格子的四個灰色格子中，必須至少有一個放黑鼠，至多三個放黑鼠。因此，以 4x4 正方形而言，四個 L 型角落會有以下四種放置黑鼠情況(旋轉翻轉後相同皆視為同一種)：



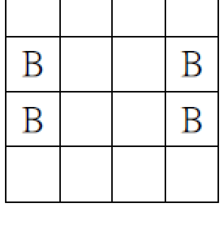
圖四



圖五



圖六



圖七

在圖四中，四隻黑鼠皆在L型兩個灰色格子的順時針那一格，我們稱之為「順順順順」；圖五則稱之為「逆順順順」；圖六稱之為「逆逆順順」；圖七稱之為「逆順逆順」。我們想從角落不同的排法開始，探討角落不同排法對整體的影響。

1x1 只有一個格子，並無所謂相鄰，所以我們暫時不討論。2x2、3x3、4x4、5x5、6x6 的數種排法如下：

1. 2x2：只有一種排法，最少需 2 隻黑鼠，如圖八。
2. 3x3：只有一種排法，最少需 3 隻黑鼠，如圖九。
3. 4x4：先把角落排好，再檢視中間的格子，我們發現因角落排法而有差異，在　　　　這種排列策略下，最少需 6 隻黑鼠，如圖十~十三。
4. 5x5：因為角落排法而有差異，在這種排列策略下，目前找到的最少需 9 隻黑鼠，如圖十四~十七。
5. 6x6：因為角落排法而有差異，在這種排列策略下，目前找到的最少需 12 隻黑鼠，如圖十八~廿一。

B	B

圖八

B	B	B

圖九

	B		
	B	B	B
B	B	B	
		B	

圖十(8 隻)

B	B	B	B
B		B	
		B	

圖十一(7 隻)

		B	
B		B	
B		B	
		B	

圖十二(6 隻)

B	B	B	B
B	B	B	B

圖十三(8 隻)

B	B		B	B
			B	
B	B		B	
			B	

圖十四(9 隻)

B	B	B	B	B
B	B	B	B	B

圖十五(9 隻)

		B	B	
B				
B			B	B
B				
		B	B	

圖十六(9 隻)

	B			
	B		B	B
			B	
B	B		B	
			B	

圖十七(10 隻)

	B				
	B		B	B	B
	B				
				B	
B	B	B		B	
				B	

圖十八(12 隻)

		B	B		
B					B
B			B		B
B	B	B		B	
				B	

圖十九(12 隻)

				B	
B	B	B		B	
				B	
				B	
B	B	B		B	
				B	

圖二十(12 隻)

		B	B		
B	B				B
			B		B
B			B		B
B					B
		B	B		

圖廿一(14 隻)

觀察以上結果後，我們發現：在方格數量較少的時候，角落的排法會影響最後最少黑鼠數量；但是方格數量較多的時候，影響力會減小。然而這種排法並沒有特定的策略方法，方格數量一大就比較不容易排。

由上可知，我們找出 4×4 共用 6 隻黑鼠的排法，接著我們來論證，為何 6 隻是最少，由角落 L 形的限制可知，先放 4 隻黑鼠必為下列四種情況之一：

	B		
			B
B			
		B	

B			B
B			
		B	

B			B
B			B

		B	
B			
B			
		B	

而此四圖中，又各自至少有兩個山字型的地方必須放置黑鼠，可知議定不可能是 5 隻黑鼠。

（二） 整排同色策略

除了從角落開始外，我們也有採用整排黑或整排白的方式，我們以原題的 4x4 方格為例，即如圖十二，即可以得到最少的黑鼠數量。以此種策略方法來思考 5x5、6x6、7x7 的排法時，分別可以得到最少黑鼠數量 10、12、18，如圖廿二~廿四：

B	B	B	B	B
B	B	B	B	B

圖廿二(5×5,10 隻)

B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B

圖廿三(6×6,12 隻)

B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	B
	B	B			B	B

圖廿四(7×7,18 隻)

其中 5×5 的最少黑鼠數量與前面不同，由圖廿四也發現還可以再修改，調整後如圖廿五、廿六：

B	B	B	B	B
	B		B	
	B		B	

圖廿五(5×5,9 隻)

B	B	B	B	B	B	B
	B				B	
	B		B		B	
	B		B		B	
	B				B	

圖廿六(7×7,17 隻)

經修改後，圖廿五只剩 9 隻黑鼠，圖廿六只剩 17 隻。可見整排同色的策略也不一定能夠得到最少隻的黑鼠數量，但從調整的圖中，我們有了一個靈感：如果把 3×n 的長方形(三排：白黑白)當作基本組合單位，是否能夠可以找到最佳解法呢？

（三） 以 3×n 為基本組合單位

上面兩圖的調整中，得到了一個靈感—圖廿六可以看成三個 3×n 長方形的組合：

1. 基本單元：我們把 3×n 以每 3 排為一個單位，正中間放一排黑鼠，如下圖。

B	B	B

	B	
	B	
	B	

2. 排列方式界定：當邊長數量為 3 的倍數時，皆把 3×n 以橫排的方式排列。

當邊長數量非 3 的倍數時，會把 3×n 以直、橫排的方式排列。

我們回頭檢視圖十二(4×4)、圖廿五(5×5)及圖廿三(6×6)時，都發現到了 3×n 長方形的存在。因此，我們以這種策略往下檢視 8×8、9×9、10×10，分別可以得到最少黑鼠數量 22、27、34：

B	B	B	B	B	B	B	B
	B					B	
	B		B	B		B	
	B					B	
	B		B	B		B	
	B					B	

圖廿八(8×8,22 隻)

B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	B	B	B

圖廿九(9×9,27 隻)

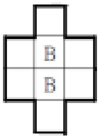
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
	B			B				B	
	B			B		B		B	
	B			B		B		B	
	B			B				B	

圖三十(10×10,34 隻)

但我們依舊懷疑：還有沒有更好的策略？

（四） 雙十字組合策略

1. 基本單元：由兩個十字形疊合組成，八格為一單位，中心的兩格放黑鼠。



2. 排列方式界定：將每個雙十字形以直向緊密排列，不旋轉也不縱橫交錯。
3. 方法討論：我們從邊界開始思考：假設如果邊界不是 3×n 長方形的話，是否還有其他更好的安排？在調整時，我們便發現了另一個更好的策略。若以 11×11 為例，使用以 3×n 為基本組合單位的策略方法，排出的最少數量為 41 隻黑鼠，但這個黑鼠的數量可以再減少。

	B									
	B		B	B	B	B	B	B	B	B
	B									
	B					B			B	
	B		B	B		B			B	
	B					B			B	
	B		B	B		B			B	
	B					B			B	
									B	
B	B	B	B	B	B	B	B		B	
									B	

		B				B				B
B		*B*		B		*B*		B		*B*
B				B				B		
		B				B				B
		B				B				B
B				B				B		
B				B				B		
		B				B				B
		B				B				B
B		*B*		B		*B*		B		*B*
B				B				B		

		B				B				B
B		*B*		B		*B*		B		*B*
B				B				B		
		B				B				B
		B				B				B
B				B				B		
B				B				B		
		B				B				B
		B				B				B
B		*B*		B		*B*		B		*B*
B				B				B		

圖三十一(11×11,41 隻) 圖三十二(11×11,39 隻) 圖三十三(11×11,39 隻)

圖三十一的黑鼠數量有 41 隻。在圖三十二中，除了粗斜體的黑鼠外，其餘黑鼠以四行為一循環的規則來重複排列，使黑鼠之間距離更遠。粗斜體部分為因應邊界的限制條件所放置，最後全部黑鼠數量為 39 隻。在圖三十三中可以看出此種排法的原型：兩隻黑鼠顧及了周圍共八個方格，也就是兩個十字型方格重疊，而八個方格與其他八個方格排在一起，所有方格都符合規則。在「以 3×n 為基本的組合單位」策略方法中，一排白、一排黑、一排白，黑鼠數量及白鼠數量比為 1：2；但在「雙十字」中，黑鼠數量及白鼠數量比可以達到 1：3。

4. 公式猜想:

n除以4的餘數	0	1	2	3
公式	$(n+2)[\frac{n}{4}]+\frac{n}{2}-2$	$(n+2)[\frac{n}{4}]+[\frac{n}{2}]+1$	$(n+2)[\frac{n}{4}]+n$	$(n+2)([\frac{n}{4}]+1)$

(1) 以 n 除以 4 的餘數為 0 來說明：

黑鼠以四行為一區，每區中黑鼠的個數為 n＋2 隻，總共有$[\frac{n}{4}]$區，理論上總共應該是(n+2) $[\frac{n}{4}]$隻，但是在最後一區有補邊界的問題，會把最後一區的第三行補滿黑鼠，補的數量(粗斜體部分)為 $\frac{n}{2}$ 隻，原本已經補了兩隻，因此要再減二，總共是 $(n+2)[\frac{n}{4}]+\frac{n}{2}-2$ 隻。

(2) 以 n 除以 4 的餘數為 1 來說明：

黑鼠以四行為一區，每區中黑鼠的個數為 n＋2 隻，最後剩餘的一行須再補每區的第一行的黑鼠數，也就是 $\frac{n}{2}$+1 隻，總共是 $(n+2)[\frac{n}{4}]+[\frac{n}{2}]+1$ 隻。

(3) 以 n 除以 4 的餘數為 2 來說明：

黑鼠以四行為一區，每區中黑鼠的個數為 n＋2 隻，所以完整的部分是 (n＋2)$[\frac{n}{4}]$隻，剩餘的兩行須再補一行黑鼠，也就是再補 n 隻黑鼠，因此黑鼠總數為 $(n+2)[\frac{n}{4}]+n$ 隻。

(4) 以 n 除以 4 的餘數為 3 來說明：

黑鼠以四行為一區，每區中黑鼠的個數為 n＋2 隻，但是我們發現剩下的三行補的黑鼠數量和每區中的黑鼠數量相同，也就是(n＋2)隻，所以剩下的三行也可算為一區，黑鼠的總數為 $(n+2)([\frac{n}{4}]+1)$ 隻。

伍、討論

一、問題一：不同策略在不同大小方格的運用狀況

（一）　3xn 長方形本身黑鼠的放置

因為 3x1 長方形無法符合放置規則，我們考慮 3x2、3x3、3x4、3x5 長方形：

B	B

圖三十四

B	B	B

圖三十五

B	B	B	B

圖三十六

B	B	B	B	B

圖三十七

在每一個長方形中，採白黑白的方式放置，即是黑鼠數量最少的排法。左右兩端的黑鼠能兼顧到上和下兩個角落 L 型方格的需求；中間的黑鼠能兼顧到上和下兩個山字型的方格需求，或著是左右十字型方格的需求，因此我們最後發現這才是目前所找到最具效益的排法。

（二）　不同大小適用不同策略

我們比較「以 3xn 為基本組合單位」(簡稱「3xn 組合」)與「以四行為一循環」(簡稱「雙十字組合」)這兩種策略，不同大小方格的最少黑鼠數量如下表：

大小	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10x10	11x11	12x12	13x13	14x14	17x17
3xn 組合	9	12	17	22	27	34	41	48	57	66	97
雙十字組合	10	14	18	22	27	34	39	46	52	62	85

表一

由表一中可看出，雙十字組合策略在 5x5 到 7x7 方格最少數量反而比較大，在 8x8 到 10x10 方格則和 3xn 組合策略一樣多，到了 11x11 以後數量才比較少。因為雙十字組合策略是以兼顧十字型區域為考量，可以在內部空間使用較少黑鼠，所以如果當方格較大時會比較有利。可見黑鼠的放置並不是只有唯一最佳的策略，而是視方格大小來推測到底該如何使用不同有效的策略方法。

大小	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10x10	11x11	12x12	13x13	14x14	17x17
3xn 組合	0.36	0.33	0.35	0.34	0.33	0.34	0.34	0.33	0.34	0.34	0.34
雙十字組合	0.4	0.39	0.37	0.34	0.33	0.34	0.32	0.32	0.31	0.32	0.30

表二

【註】取近似值四捨五入到小數第二位

將黑鼠數量換算成密度，由上表中可以看出，在 10x10 方格以下最佳策略是 3xn 組合策略，但最佳密度是 $\frac{1}{3} \approx 0.33$，無法再減少。到了 11x11 以後密度減少到 0.33 以下，而在 13x13 和 17x17 中，密度更小。

二、問題二：使用雙十字策略時，邊界黑鼠的補位有沒有規則？

以 10x10 到 13x13 為例，參照圖三十八~四十一。我們可以發現若以四行為一區，且每區皆須補 2 隻黑鼠，最後不滿四行的部分，則會有所不同。我們發現，剩餘一行的時候，邊界補的時候補會是最少。

		B				B		*B*	
B		*B*		B		*B*		B	
B				B				B	
		B				B		*B*	
		B				B		*B*	
B				B				B	
B				B				B	
		B				B		*B*	
B		B		*B*		B		*B*	
B				B				B	

圖三十八

		B				B				B
B		*B*		B		*B*		B		*B*
B				B				B		
		B				B				B
		B				B				B
B				B				B		
B				B				B		
		B				B				B
		B				B				B
B		*B*		B		*B*		B		*B*
B				B				B		

圖三十九

		B				B				B	
B		*B*		B		*B*		B		*B*	
B				B				B		*B*	
		B				B				B	
		B				B				B	
B				B				B		*B*	
B				B				B		*B*	
		B				B				B	
		B				B				B	
B				B				B		*B*	
B		*B*		B		*B*		B		*B*	
		B				B				B	

圖四十

		B				B				B		
B		*B*		B		*B*		B		*B*		B
B				B				B				B
		B				B				B		
		B				B				B		
B				B				B				B
B				B				B				B
		B				B				B		
		B				B				B		
B				B				B				B
B				B				B				B
B		B		*B*		B		*B*		B		*B*
		B				B				B		

圖四十一

可以整理出計算 n×n 最少黑鼠數量公式如下表：

n 除以 4 的餘數	0	1	2	3
公式	$(n+2)[\frac{n}{4}]+\frac{n}{2}-2$	$(n+2)[\frac{n}{4}]+[\frac{n}{2}]+1$	$(n+2)[\frac{n}{4}]+n$	$(n+2)([\frac{n}{4}]+1)$

表三

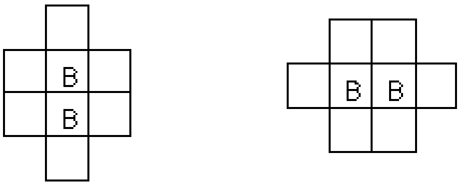
用四循環來看黑鼠的分布，每四行要補兩隻黑鼠，但是這種說法並未詳細討論各種狀況，尚待驗證；此外餘下不足四行的處理也待進一步討論。

三、問題三：雙十字的拼法不同，是否能再減少黑鼠的數量？

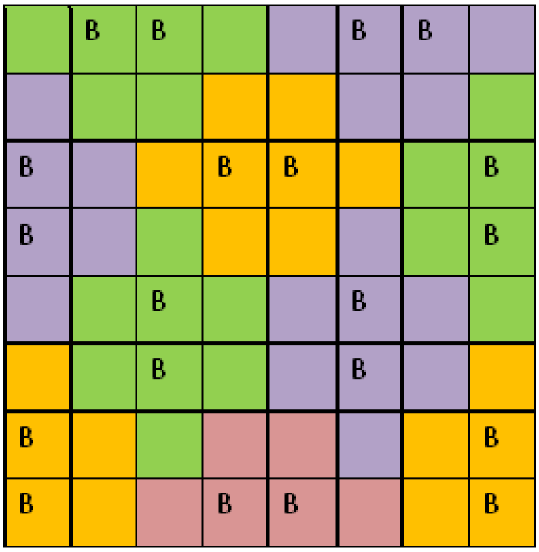
陸、 改進方案

一、縱橫雙十字策略

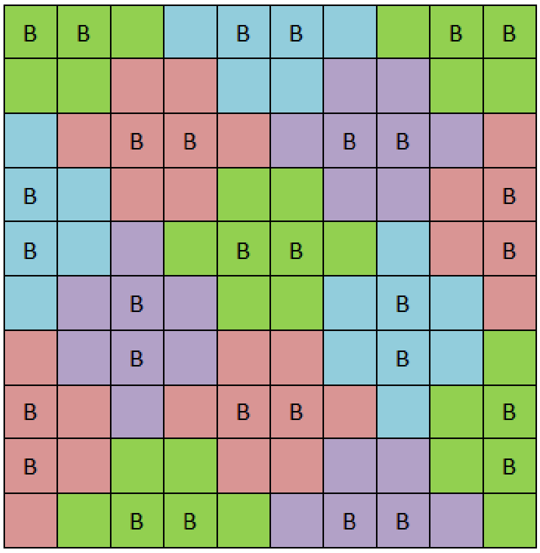
（一）　基本單元：我們把雙十字組合的基本單位的方向改變，如下圖。



（二）　排列方式界定：以縱、橫的方式排列雙十字組合的基本單位。方式如下圖。

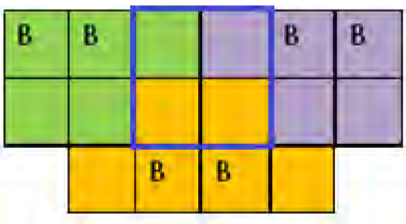


圖四十二(8×8)

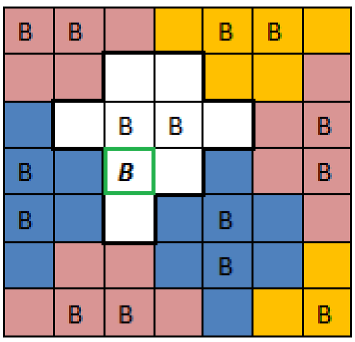


圖四十三(10×10)

（三）　方法討論：從最外圈開始，把黑鼠排放在邊線，以每兩個白鼠為間隔，放置縱橫雙十字的基本單元，再往內圈放，放置在兩個基本單位白鼠的位子的一格內，如下圖，繼續以基本單位放置，直到正中間。如果沒有空餘的位置放置，則將黑鼠連接離中央最近的基本單位，如下圖，排成最少黑鼠數量。



圖四十四四

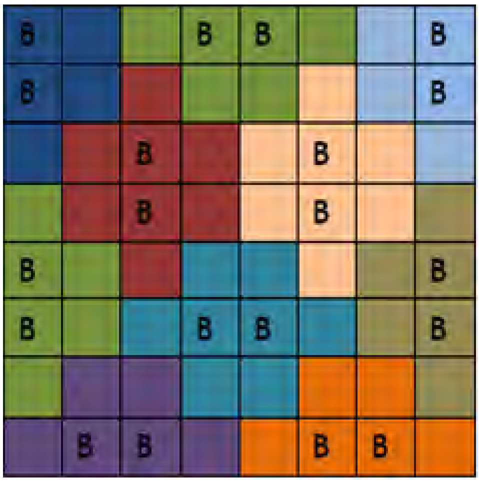


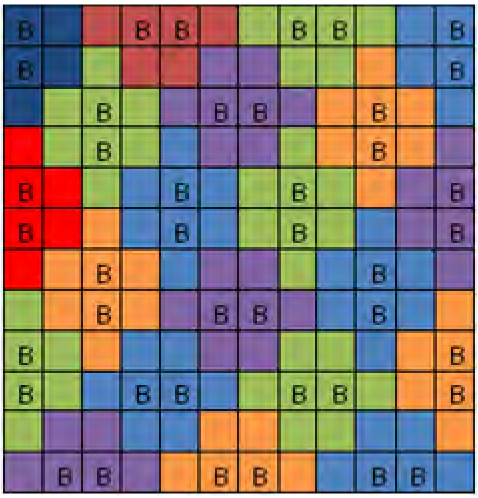
圖四十五

（四） 公式猜想：

發現了縱橫雙十字策略後，發現有些圖案是有規律的，於是我們便開始尋找公式。

1. 當邊長為偶數：

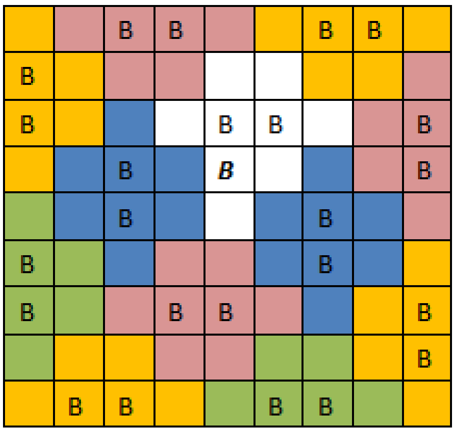

圖四十六(8×8,20 隻)

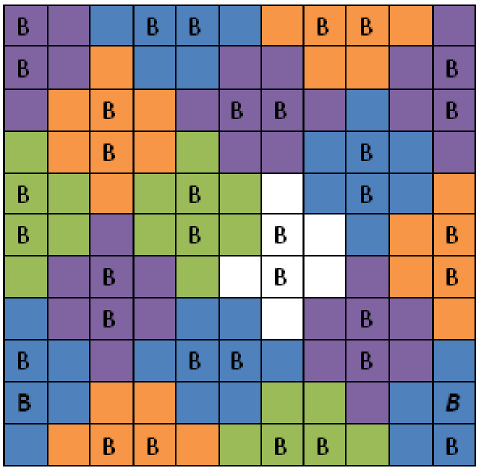

圖四十七(12×12,42 隻)

我們在觀察偶數的最少黑鼠數量時，發現皆為連續正整數乘積，如圖四十六為 4x5、圖四十七為 6x7，且較少數皆為邊長除以 2，因次猜想數量為

$$\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n(n+2)}{4}$$

2. 當邊長為奇數：


圖四十八 (9×9,25 隻)


圖四十九 (11×11,36 隻)

我們在觀察奇數的最少黑鼠數量時，發現最少黑鼠數量皆為正整數的平方，如圖四十八為 25 ＝ 5^2、圖四十九為 81 ＝ 9^2，且正整數恰為 $\frac{n+1}{2}$，因此猜想數量為 $\frac{(n+1)^2}{4}$。

因此，我們整理出下列兩個猜想的公式：

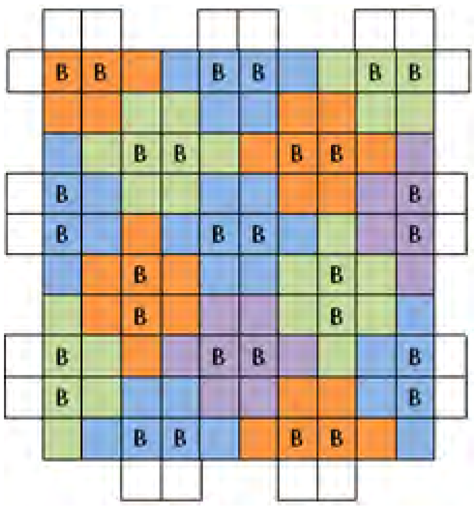
設 n 為邊長

邊長(n)	偶數	奇數
公式	$\dfrac{n(n+2)}{4}$	$\dfrac{(n+1)^2}{4}$

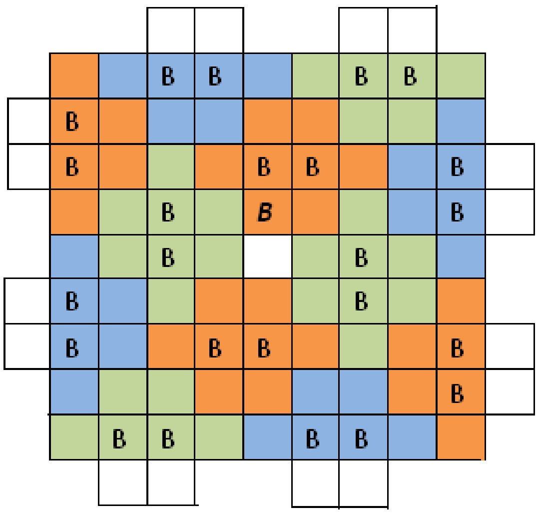
表四

3.　公式說明

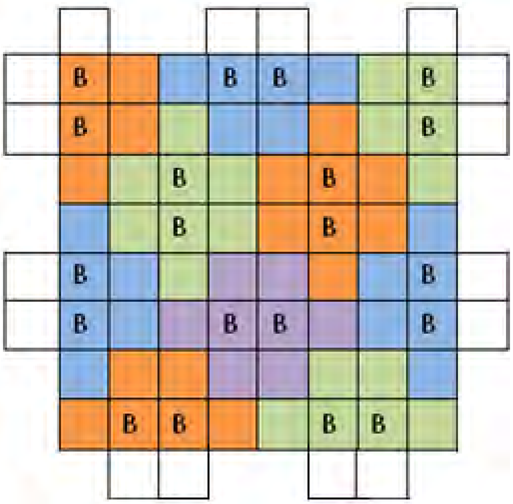
我們試圖進一步說明此公式為何能有效預測黑鼠數量。



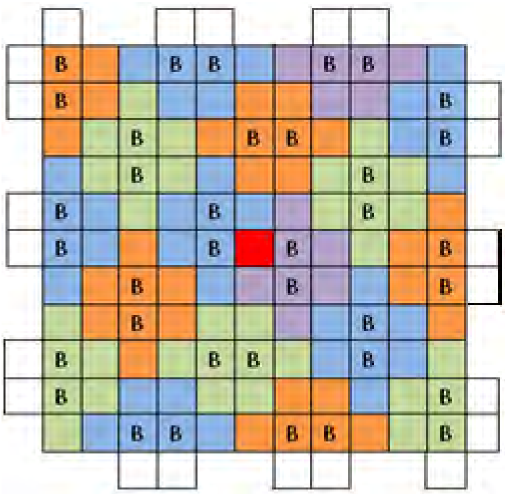
圖五十(4k 型)



圖五十一(4k+1 型)



圖五十二(4k+2 型)



圖五十三(4k+3 型)

我們將縱橫雙十字組合的邊長 n 分成四類，分別是除以 4 餘數為 0、1、2、3 四類，分別以 4k、4k+1、4k+2、4k+3 表示。

(1) 圖五十為 4k 型，先把邊界雙十字組合，超出 n×n 方陣的格子補上，會發現加上補的格子總共是$(\mathrm{n}+1)^2-1$格，則黑鼠數就是$\frac{(\mathrm{n}+1)^2-1}{4}$隻，化簡後即可得公式$\frac{n(n+2)}{4}$。

(2) 圖五十一為 4k+1 型，先把邊界的雙十字組合，超出 n×n 方陣的格子補上，由於中間多出了一格不屬於任何雙十字的格子，因此此格要扣除，總共是$(\mathrm{n}+1)^2-4$格；為了顧及中心的格子，需要在加補一隻黑鼠(***B***)，所以黑鼠數是$\frac{(\mathrm{n}+1)^2-4}{4}+1$隻，化簡後即可得公式$\frac{(n+1)^2}{4}$。

(3) 圖五十二為 4k+2 型，先把邊界雙十字組合超出 n×n 方陣的格子補上，會發現加上補的格子總共是$(\mathrm{n}+1)^2-1$格，則黑鼠數就是$\frac{(\mathrm{n}+1)^2-1}{4}$隻，化簡後即可得公式$\frac{n(n+2)}{4}$。

(4) 圖五十三為 4k+3 型，先把邊界雙十字組合超出 n×n 方陣的格子補上，由於中心的格子同時被兩組雙十字重疊到，因此要再補上一格，這樣總共是$(\mathrm{n}+1)^2$格，則黑鼠數即為$\frac{(n+1)^2}{4}$隻。

4. 策略比較

最後，我們把所有運用的策略放在一起比較，也把黑鼠占的比例統整，作成了表五和表六。我們發現：到 7×7 之後，縱橫雙十字組合所使用黑鼠數量都是最低的。而且比例也比雙十字組合更接近最小值 0.25。因此縱橫雙十字是目前我們發現的最佳策略。

大小	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10×10	11×11	12×12	13×13	14×14	15×15	16x16	17x17	18x18
3xn 組合	9	12	17	22	27	34	41	48	57	66	75	86	97	108
雙十字組合	10	14	18	22	27	34	39	46	52	62	68	76	85	98
縱橫雙十字組合	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90

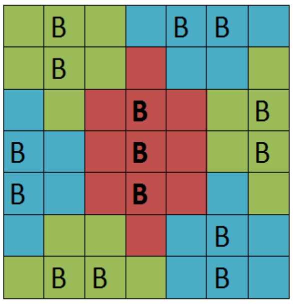
表五

大小	**5x5**	**6x6**	**7x7**	**8x8**	**9x9**	**10×10**	**11×11**	**12×12**	**13×13**	**14×14**	**15×15**	**16×16**	**17×17**	**18×18**
3xn 組合	0.36	0.33	0.35	0.34	0.33	0.34	0.34	0.33	0.34	0.34	0.33	0.34	0.34	0.33
雙十字組合	0.4	0.39	0.37	0.34	0.33	0.34	0.32	0.32	0.31	0.32	0.30	0.30	0.29	0.30
縱橫雙十字組合	0.360	0.333	0.327	0.313	0.309	0.300	0.298	0.292	0.290	0.286	0.284	0.281	0.280	0.278
改進後比例差	0	0	0.023	0.027	0.021	0.04	0.022	0.028	0.02	0.034	0.016	0.019	0.02	0.022

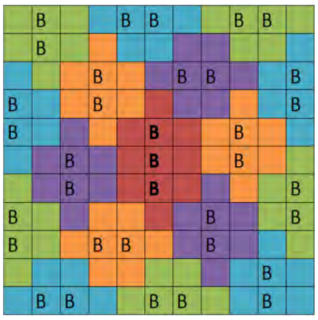
表六

柒、 延伸研究

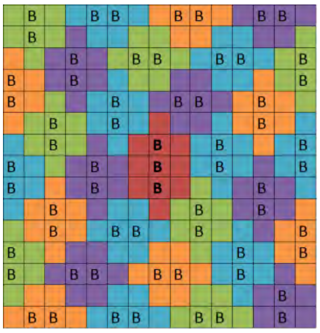
一、縱橫雙十字的改進方案



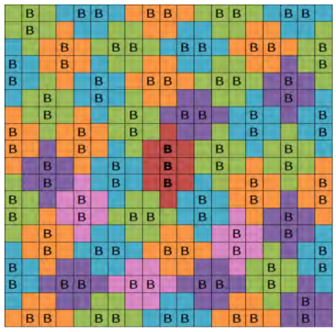
7×7(15 隻)



11×11(35 隻)



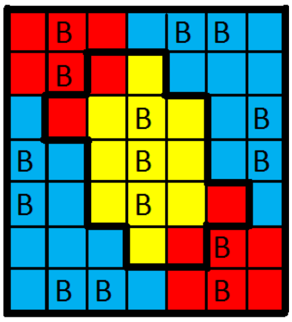
15×15(63 隻)



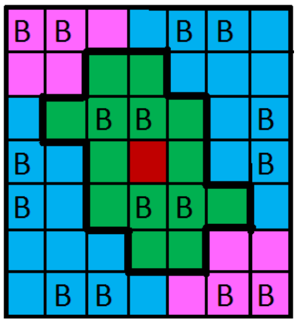
19×19(99 隻)

有一次我們在做 7×7 的縱橫雙十字時，發現竟然只有 15 隻黑鼠，與公式的 16 隻黑鼠不同，讓我們發現公式有不符合的地方。因此，我們開始找不符合公式的方陣，從原本的 7×7 開始將邊長遞增與遞減尋找，發現了一個規律：當邊長為 4k+3 時(k ≥ 0)，最少黑鼠數量會比公式所導出的數量少一隻。我們開始尋找這個原因。

我們以 7x7 為例，一個 7x7 方陣中，如圖五十四所示，由兩組紅色，四組藍色，中心一組黃色之十字做組合（黃色是由較特別的叁十字形作為基本單位），並利用粗線將兩個 7x7 方陣分成內部及外部。



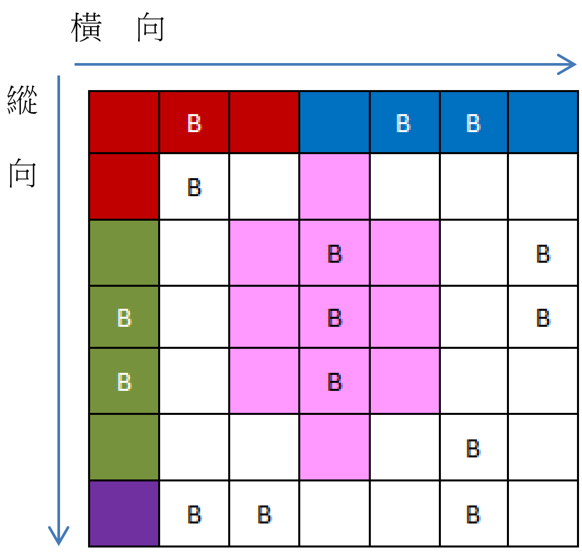
圖五十四(7×7,15 隻)



圖五十五(7×7,16 隻)

分割完畢後，我們可以從上圖的比較中發現：兩圖外部的形狀及黑鼠與白鼠的比值相同，內部是由不同排法但形狀（描**粗線**部分）同的 15 格，我們針對排法不同的黑鼠進一步的發現，圖五十四和圖五十五的黑鼠與白鼠的比值各為$\frac{3}{15}$和$\frac{4}{15}$，因為兩圖外部的比值相同，而圖五十五內部的比值較大，所以可得知圖五十四黑鼠的數量比圖五十五少 1 隻。

接著，我們將多組邊長為 4k+3 的方陣且黑鼠數量比公式還少 1 隻的排法統整出以下原則:



圖五十六

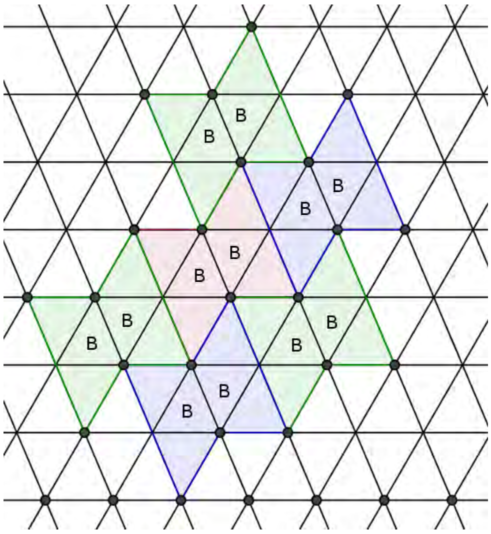
見圖五十六所示，在 7×7 方陣中，橫向第一列的排法是:{ [WBW] + k×[WBBW] }(W 為白鼠)；而縱向第一行的排法是:{ [WW]+k×[WBBW] + [W] } (排法中的 k 即邊長 4k+3 的 k)。另外，我們又發現，若 k 大於 0，且使用上述之排法排列，並以縱橫雙十字形方法向內排列，會發現排至最後都會剩下一組桃色叁十字形。以上排列方法有助於我們排列這種邊長為 4k+3 的方陣，並可有效達到快速又精準的排列。

二、其他圖形的規律與研究

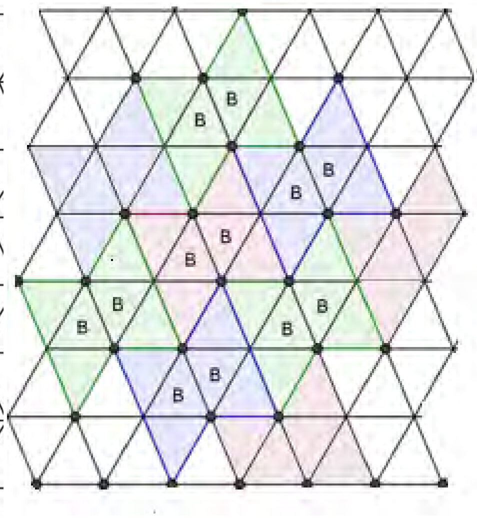
做完正方形的研究後，我們就想，若改成其他圖形，會有甚麼規律?

（一） 三角形

1. 我們改成每格都是三角形來製作，發現基本組成單位是一個像啞鈴的形狀，進而計算出黑鼠與白鼠比為 1:2，黑鼠占三分之一。



圖五十七



圖五十八

2. 我們比照正方形的概念，想像某數平方格中，黑鼠占的比例為多少。

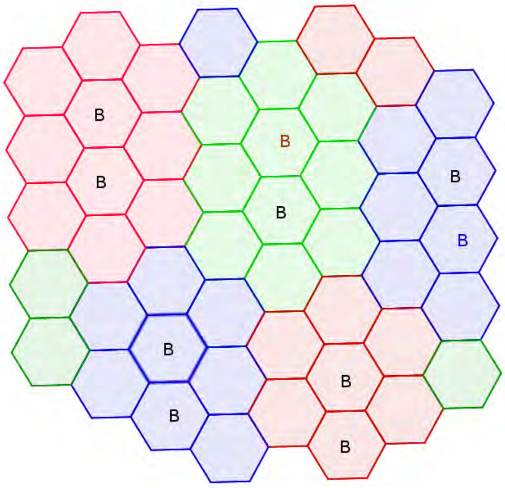
邊長	**5*5**	**6*6**	**7*7**	**8*8**	**9*9**	**10*10**	**11*11**
個數	9	12	17	22	27	34	41
算式	$5^2/3=8\cdots1$ $8+1=9$	$6^2/3=12\cdots0$ $12+0=12$	$7^2/3=16\cdots1$ $16+1=17$	$8^2/3=21\cdots1$ $21+1=22$	$9^2/3=27\cdots0$ $27+0=27$	$10^2/3=33\cdots1$ $33+1=34$	$11^2/3=40\cdots1$ $40+1=41$
比例	0.360	0.333	0.347		0.344 0.333	0.340	0.339

表七

由上表可知，黑鼠數量的算法即為總格數除以 3(基本組成單位之比例)之商加餘數，最低比例為三分之一(≈0.33)。

（二） 六邊形(蜂巢形)

再來我們改成每格都是六邊形來製作，發現每十格會組成一個基本單位(類似橢圓形)，計算出黑鼠與白鼠比為 1:4，黑鼠占五分之一，比三角形、正方形都來的少。我們去尋找原因，發現因為六邊形每格相鄰的格數多，因此每隻黑鼠所對應的白鼠也較多。



圖五十九

一樣比照前面，想像 n^2 格中，黑鼠占的比例為何?

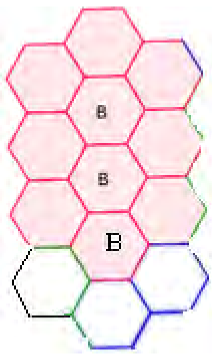
邊長	5*5	6*6	7*7	8*8	9*9	10*10	11*11
個數	6	8	10	14	17	20	25
比例	0.24	0.222	0.204	0.218	0.210	0.200	0.207

表八

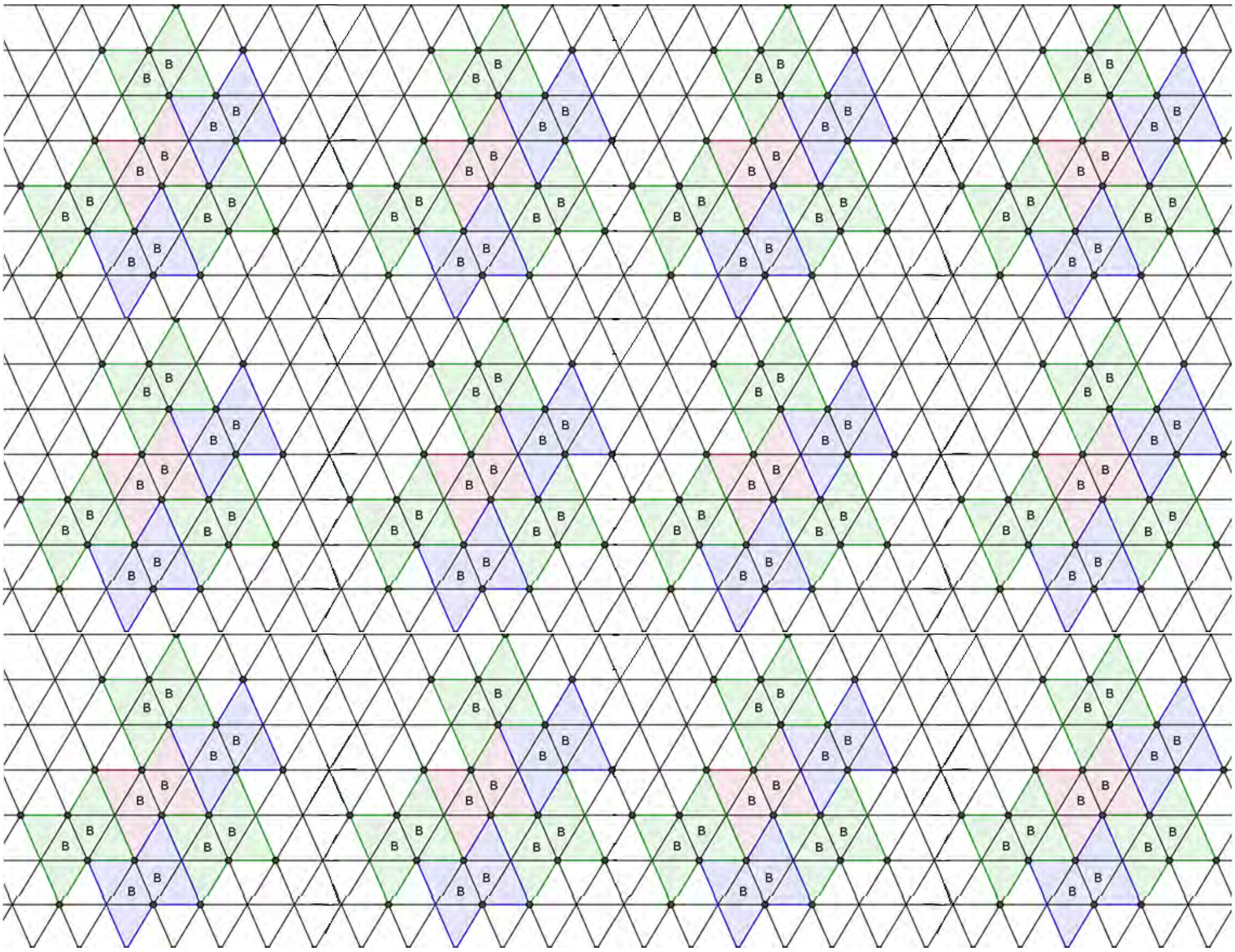
六邊形的算法：首先先把總格數除以十(每十格一單位)，因為每單位有兩隻黑鼠，所以商要乘以二。接著處理餘數的部分，若餘數≤ 3，則黑鼠總個數加一，因為如果在某基本單位中多加一隻黑鼠，對應的白鼠只會多三隻(如圖六十一)；若餘數＞3，則黑鼠總個數加二。

圖六十

(5*5 格，6 隻)



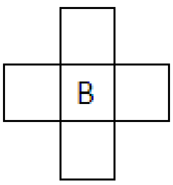
圖六十一



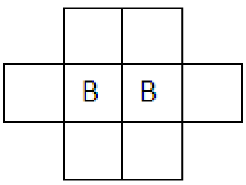
圖六十二-三角形全圖

(三)　推論雙十字組合為最低比率的基本單位

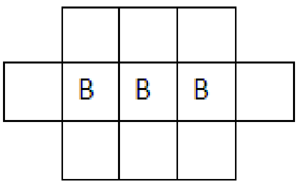
若不考慮題幹要求，即每隻老鼠都至少與一隻黑老鼠及一隻白老鼠相鄰，則黑鼠與白鼠的最低比例為 1:4，即一隻黑鼠周圍四隻皆為白鼠(如圖六十三)。但因為每隻老鼠周圍至少要有一隻黑數和一隻白鼠，所以黑鼠不可單獨存在，故黑鼠排列之基本單位最小為兩兩一組，此時黑鼠占所有老鼠數目的比例即為四分之一(如圖六十四)。若三隻一組，比例為$\frac{4}{11}$(如圖六十五)；若四隻一組，比例為$\frac{2}{7}$(如圖六十六)。我們發現，若超過兩隻黑數一組，則比例必大於四分之一。



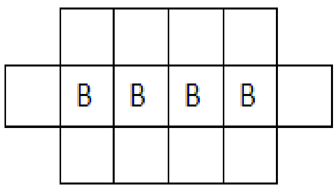
圖六十三



圖六十四

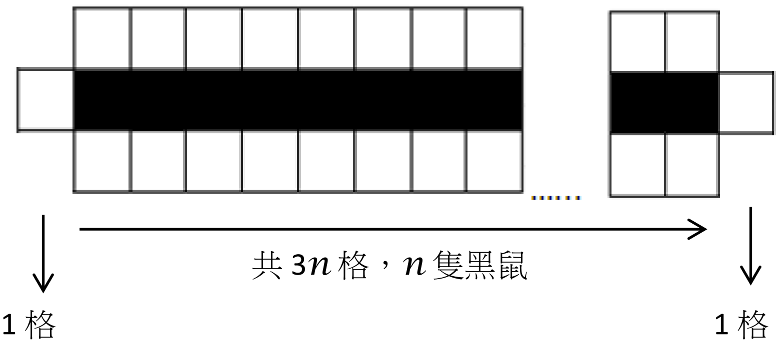


圖六十五



圖六十六

當 n 隻老鼠一組時，黑鼠比例為$\frac{n}{3n+2}$(如圖六十七)。若想要比例低於$\frac{1}{4}$，可列出以下算式，找出 n 的範圍。



圖六十七

$$\frac{n}{3n+2} < \frac{1}{4}$$
$$4n < 3n + 2$$
$$n < 2$$

但是題目規定黑鼠不可單獨存在，也沒有分數的情況，故比例最小應為四分之一。

捌、結論

一、3×n 組合策略適用於 10×10 以下的正方形，雙十字組合策略則適用於 11×11 以上的正方形。

二、使用 3×n 組合策略，黑鼠密度最低約為 0.33；使用雙十字組合策略，隨著方格變大，密度可降至約為 0.25。

三、正方形方格數不大時，雙十字組合策略並未優於 3×n 組合策略，但數量大時，雙十字組合策略仍有較佳密度。

四、縱橫雙十字組合的最少黑鼠數量都會等於或小於 3×n 組合策略及雙十字組合策略。應找不到比縱橫雙十字策略還要少的方法。

玖、未來展望

一、可否再找到比蜂巢型黑鼠數量更少的形狀。

二、表四的縱橫雙十字組合公式是否能再合併成單一公式。

三、對於所導出的公式是否能做出嚴謹的數學證明。

【評語】030415

作者考慮一個離散極值的最佳配置問題。考慮在 n×n 的正方形棋盤上放置黑子和白子，在限定每個棋子旁都要有至少一顆同色棋子，也至少要有一顆異色棋子的前提下，黑子個數的最小可能值問題。針對一般的情況給出了上界。透過對於較小的 n 值的最佳解的形式的觀察，作者們給出了一個不錯的上界。能夠巧妙的藉由拼剖的想法給出一些結論，值得嘉許。沒能針對所給出的上界是否為最佳解作更深入的分析，為不足之處。要得出一般化的結果或許並不容易，但如果能對一些較小的 n 值論述結果的正確性，看起來會更完整也更好。展現出來的問題分析方式值得肯定。

作品海報

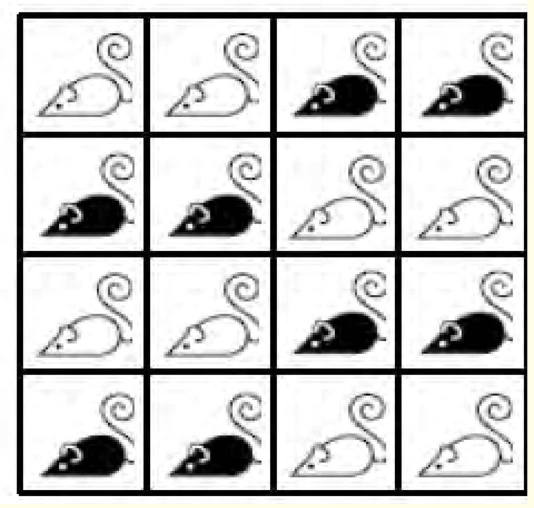
壹、摘要

本研究深入探究了一道澳洲AMC題目：在n×n正方形方格中放置黑鼠與白鼠，使得每一隻老鼠周遭都有黑鼠也有白鼠，而且黑鼠數量最少。本研究探討了幾種不同策略，發現隨著正方形大小的差異，適用於不同的策略，並延伸探討六邊形(蜂巢形)及三角形(啞鈴形)。

貳、研究動機

上課時，老師讓我們做2013年澳洲ＡＭＣ試題，題目如下：

一位生物學家將籠子排成4×4的方陣，他想要在每個籠子內都恰好放入一隻老鼠(黑鼠或白鼠)，並使得每隻老鼠都至少與一隻黑老鼠及一隻白老鼠相鄰(兩個相鄰的籠子有公共的牆壁)，如下圖所示



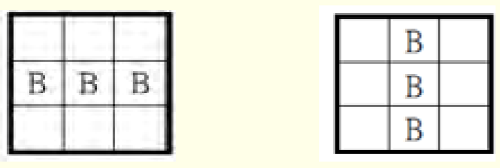
我們想讓黑鼠愈少愈好。請問他最少需要幾隻黑鼠？ 正確答案為6隻 。

檢討時老師隨口講了一句：「如果是5x5、6x6呢？」我們對這個問題很感興趣，於是我們就著手開始了這次的研究。

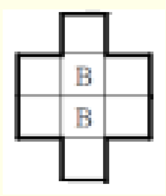
叄、研究方法

一、尋找ｎ×ｎ正方形放置黑鼠的最少數量， 探討放置最少黑鼠的最佳策略。

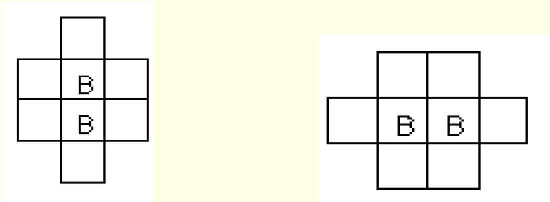
(一)、3xn型：我們把3xn 以每3排為一個單位，正中間放一排黑鼠。



(二)、雙十字型：兩個十字形組成，八格為一單位，中心的兩格放黑鼠。

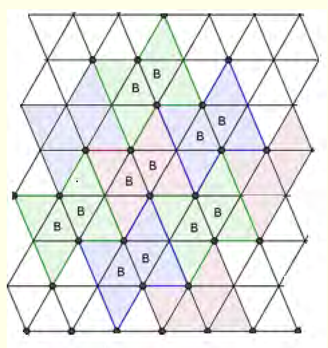


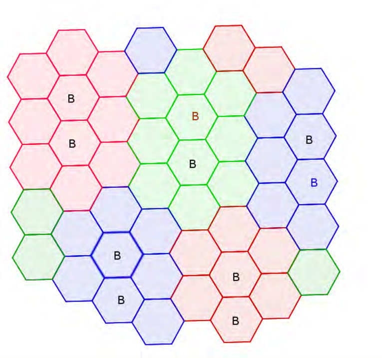
(三)、縱橫雙十字型：我們把雙十字組合的基本單位的方向改變。



二、尋找ｎ×ｎ正方形以外的型式， 探討放置最少黑鼠的最佳策略。

(一)、三角形(啞鈴形)：每格都是三角形，把啞鈴的形狀做為基本單位。





(二)、六邊形(蜂巢形)：每格都是六邊形，每十格會組成一個基本單位。

肆、研究結果

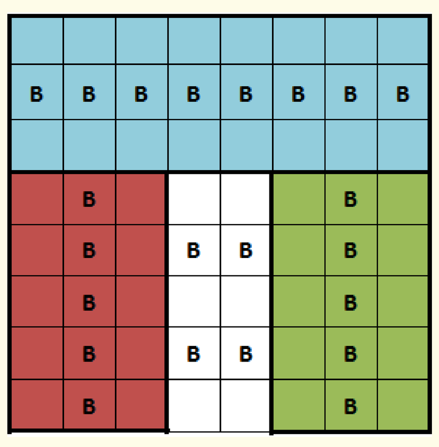
一.不同策略的黑鼠放置狀況

(一). 3xn組合型

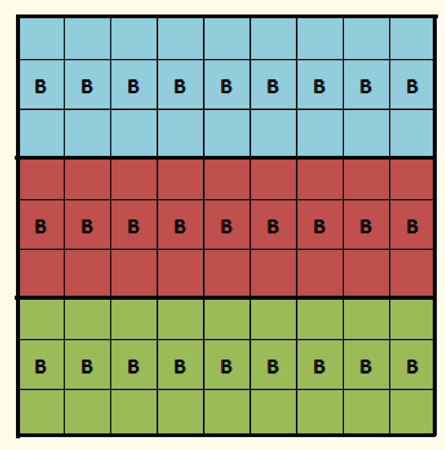
當邊長數量為3的倍數時，把3xn以橫排的方式排列。

當邊長數量非3的倍數時，把3xn以直、橫排的方式排列。

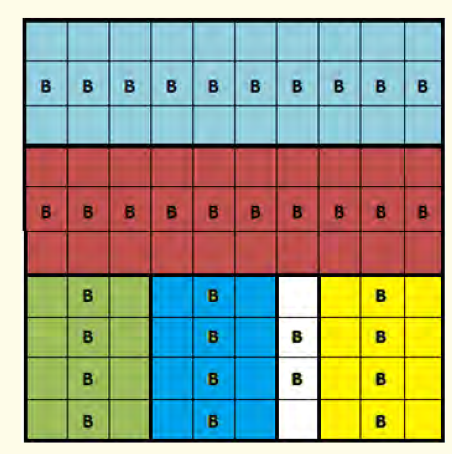
以這種策略往下檢視8x8、9x9、10x10，分別可以得到最少黑鼠數量22、27、34：



8x8(22隻)



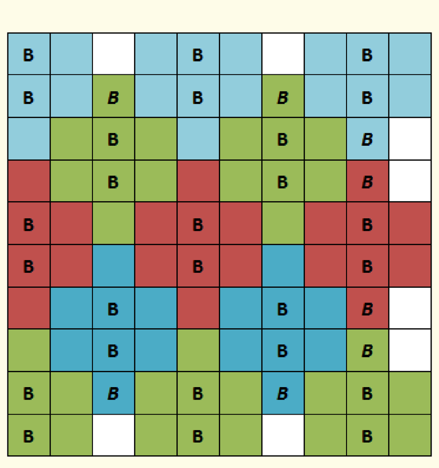
9x9(27隻)



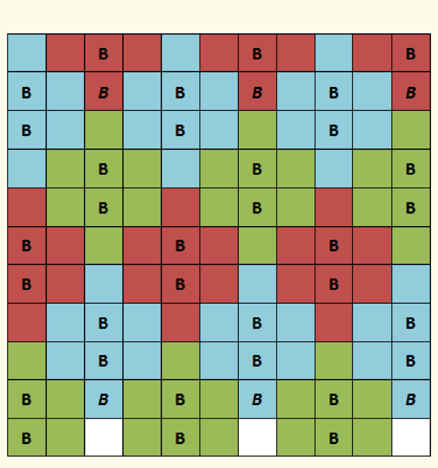
10x10(34隻)

(二).雙十字組合型

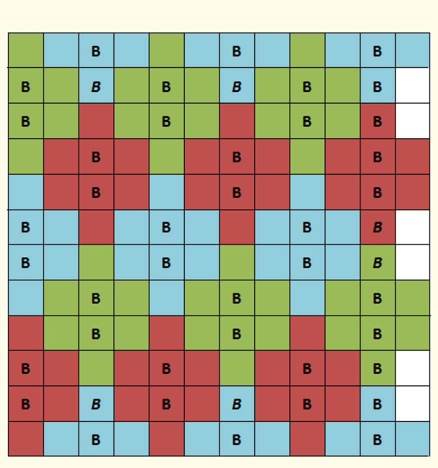
將每個雙十字形以直向緊密排列，不旋轉也不縱橫交錯。此種排法的原型：兩隻黑鼠顧及了周圍共八個方格，也就是兩個十字型方格重疊，而八個方格與其他八個方格排在一起，所有方格都符合規則。



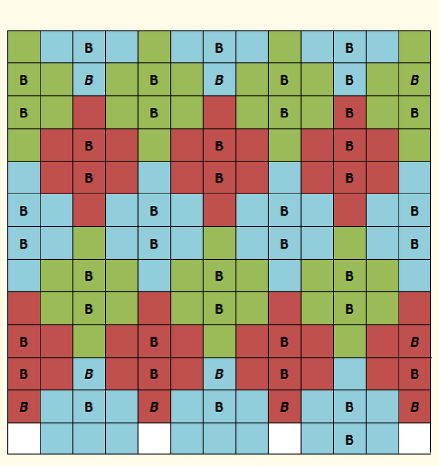
10 × 10(34隻)



11 × 11(39隻)



12 × 12(46隻)

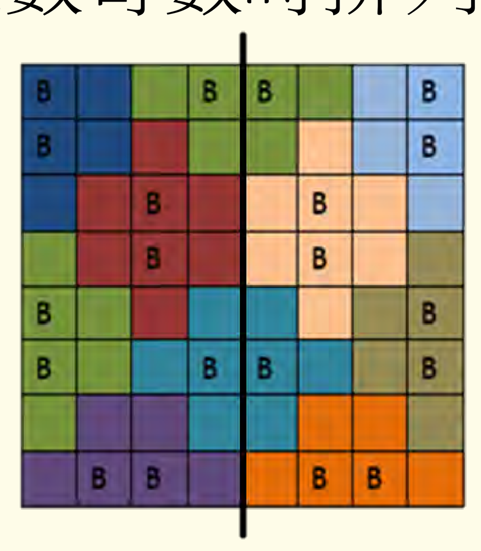


13 × 13 (52隻)

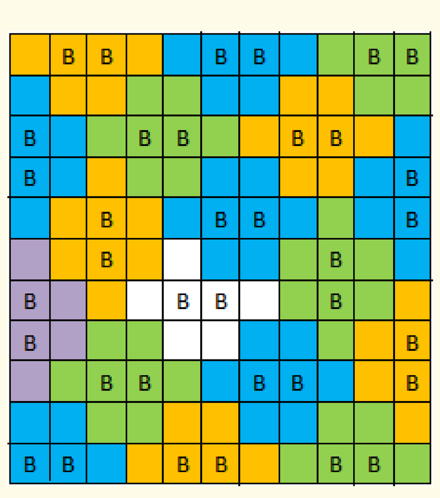
n 除以 4 的餘數	0	1	2	3
公式	$(n+2)[\frac{n}{4}]+\frac{n}{2}-2$	$(n+2)[\frac{n}{4}]+[\frac{n}{2}]+1$	$(n+2)[\frac{n}{4}]+n$	$(n+2)([\frac{n}{4}]+1)$

(三).縱橫雙十字組合型

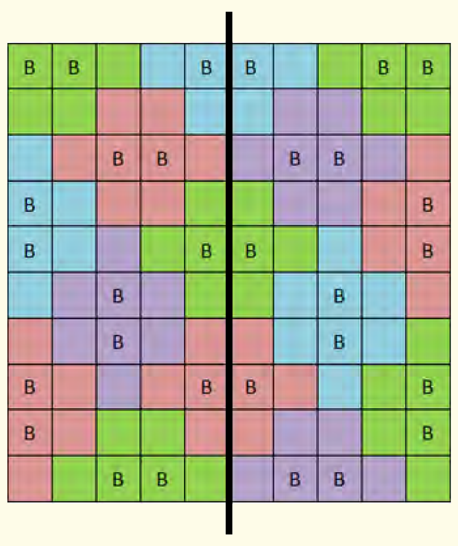
將雙十字組合型以縱、橫交錯的方式排列，發現數量又比雙十字組合型更少。我們又發現在縱橫雙十字組合型下，邊數偶數時排列位置會左右對稱，邊數奇數時排列數目會左右對稱，如下圖。



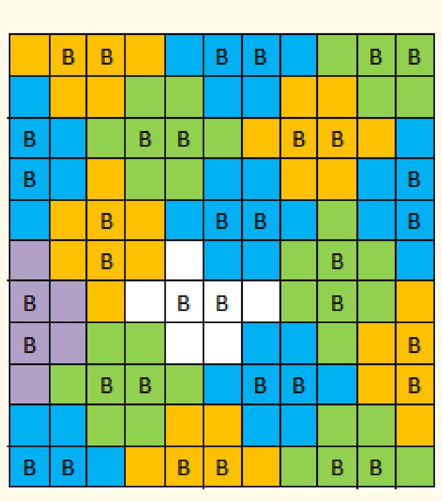
8x8(20隻)



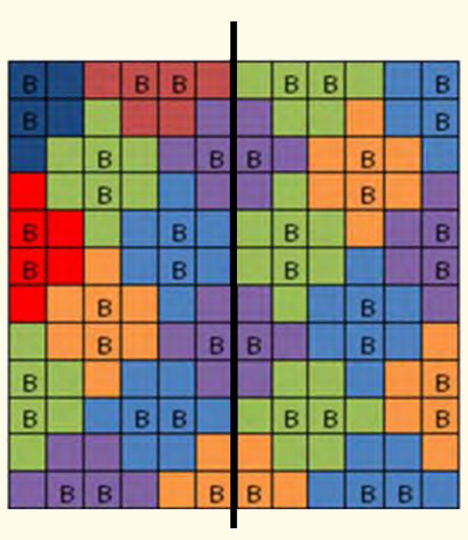
9x9(25隻)



10x10(30隻)



11x11(36隻)



12x12(42隻)

可以整理出計算nxn在縱橫雙十字組合型下最少黑鼠數量猜想公式如下表：

邊長(n)	偶數	奇數
公式	$\frac{n(n+2)}{4}$	$\frac{(n+1)^2}{4}$

二.不同策略的比較

「3xn組合」、「雙十字組合」、「縱橫雙十字組合」最少黑鼠數量表：

正方形邊長	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3xn	**9**	**12**	**17**	**22**	**27**	**34**	**41**	**48**	**57**	**66**	**75**	**86**	**97**	**108**
雙十字	**10**	**14**	**18**	**22**	**27**	**34**	**39**	**46**	**52**	**62**	**68**	**76**	**85**	**98**
縱橫雙十字	**9**	**12**	**16**	**20**	**25**	**30**	**36**	**42**	**49**	**56**	**64**	**72**	**81**	**90**

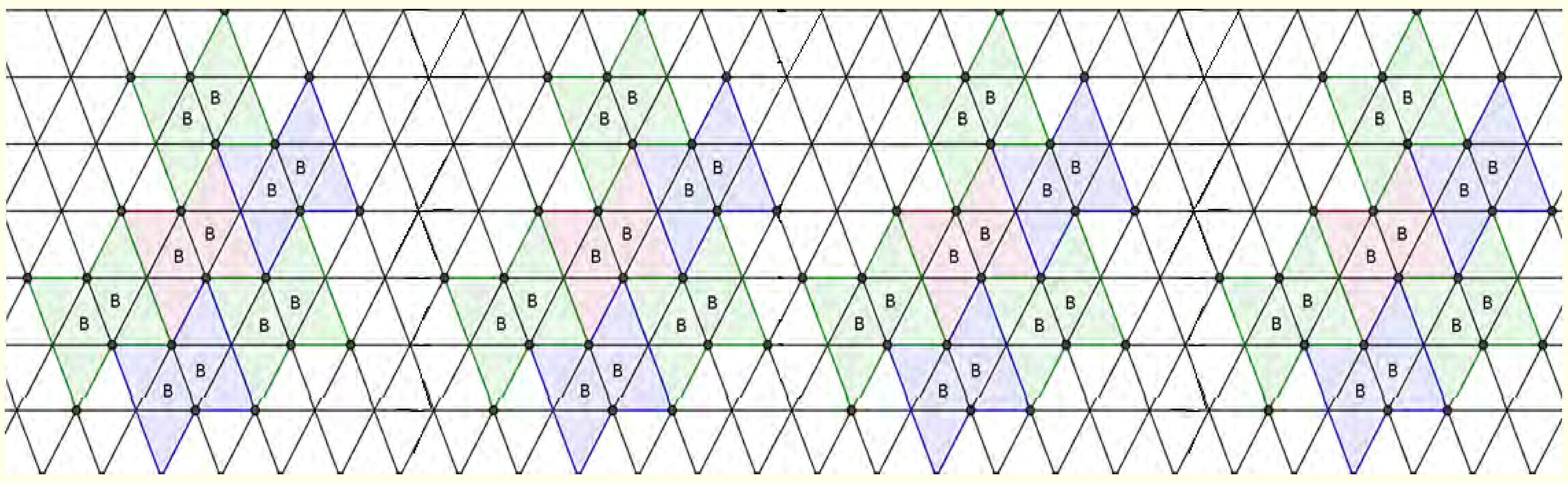
表中可看出，雙十字組合策略在5x5到7x7方格中，黑鼠數量反而比3xn組合策略來的多，在8x8到10x10方格中，黑鼠數量兩者一樣多，到了11x11以後，雙十字組合策略黑鼠數量就明顯的比3xn組合策略來的少。

我們又 發現，在縱橫雙十字組合策略中，不管從5x5到18x18黑鼠數量都比3xn組合策略或雙十字組合策略來的少。

伍、延伸研究

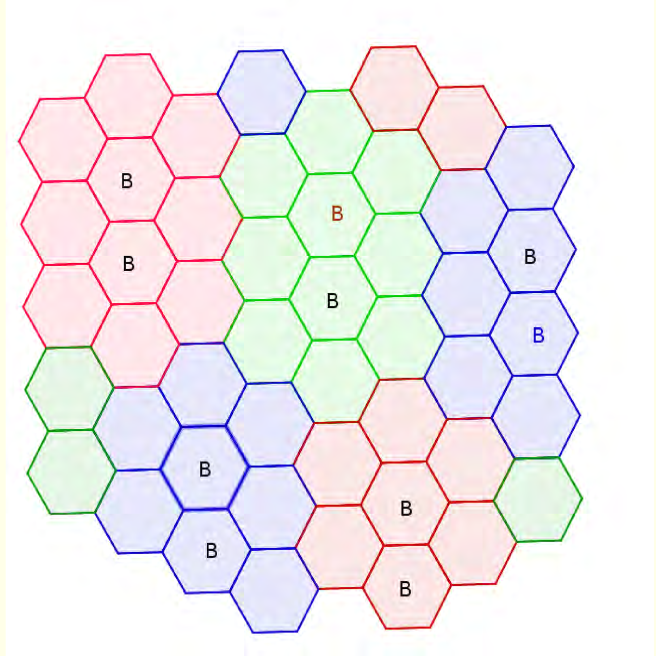
一.三角形(啞鈴形)

改成每格都是三角形，基本單位是一個像啞鈴的形狀，算出黑鼠與白鼠比為1:2，黑鼠占三分之一。 這樣的比例明顯比 nxn 正方形來的高。



二.六邊形(蜂巢形)

改成每格都是六邊形來製作，發現每十格會組成一個基本單位，黑鼠與白鼠比為1:4，黑鼠占五分之一。



邊長	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10x10	11x11
個數	6	8	10	14	17	20	25
比例	0.24	0.222	0.204	0.218	0.210	0.200	0.207

陸、未來展望

一、可否再找到比蜂巢型黑鼠數量更少的形狀。

二、縱橫雙十字組合公式是否能合併成單一公式。

三、對於所導出的公式能做出嚴謹的數學證明。