中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030414

高空蛋跳—— google 面試的丟雞蛋問題

學校名稱：臺南市立後甲國民中學

作者：	指導老師：
國二 許景翔 國二 林芷聿	李珮琳

關鍵詞：最小最大值、等差數列與級數、算幾不等式

摘要

本作品對於2016年丘成桐中學數學獎作品 ⟨蛋破魂飛一個 Google 的雞蛋問題⟩, 給出完整解答。該問題尋找「最佳的最糟情況策略」, 也就是將最大值最小化 (min-max) 的最佳策略。我們從特例出發: 每 d 層樓檢測一次著手, 證明出兩個定理 (定理 (壹)、(貳)) 來解答在這種特殊情況下「最佳的最糟情況策略」的完整公式解。再將這種固定 d 層樓檢測一次的策略放寬, 求得一個巧解 Google 原題的方法。我們的解法具一般性, 定理 (參) 解答任意總樓層的「最佳的最糟情況策略」(原題限制100層樓), 而且刻畫「所有」的「最佳的最糟情況策略」, 而不是只得到原解答所提供的其中一組解。本作品主要工具是高斯符號、算幾不等式、除法原理, 佐以縝密分析手法, 完全解答該問題。

壹、研究動機

一年級的暑假作業是找一份科展作品進行報告。在找尋題目的過程中, 我們讀到了一份花蓮女中同學所做的作品 (蛋破魂飛——一個 Google 的雞蛋問題,2016丘成桐中學數學獎參賽作品), 這題目原出處 Google 公司的面試題目:「如何最快的用兩顆條件相同的蛋, 檢測出它在一棟100層的大樓中丟下去會破的樓層?」我們覺得這個題目很有趣, 在試了幾種策略後, 看了 google 的解答, 但是不明瞭爲何那是「最佳策略」! 在讀過花蓮女中同學的作品後, 她們使用高中課程中的「遞迴數列」進行解題, 然而其中有幾個建立遞迴關係的步驟我們覺得有疑問, 她們也沒有證明或求出遞迴式的一般式。我們認爲可以用我們所學到的方法進行分析, 因此決定以此爲題來進行研究。

貳、問題介紹

google 原題介紹:

由於網路上 google 的問題與解答並沒有用精確的數學說明, 使得該問題的題意相當模糊。因此, 我們覺得有必要將原題以精確數學方式定義一次, 以方便後續的數學分析工作。

我們定義某一顆蛋的關鍵樓層爲第 $k^* \in \mathbf{N}$ 層爲: 將該顆蛋從第 $n \geq k^*$ 層往下丟會被摔破, 但從第 $n < k^*$ 層往下丟則不會破, 也就是 k^* 是該顆蛋會被摔破的最低樓層。現假設有兩顆關鍵樓層 k^* 相同的蛋, 已知$1 \leq k^* \leq 100$, 欲使用某種策略 γ 去「試摔」這兩顆蛋以找出未知的k^*值。由於任何一種策略所需的測試次數與 k^* 所在位置有關, 令 $\gamma(k^*)$ 爲策略 γ 找出關鍵樓層爲 k^* 的所需的「試摔」(測試) 次數。試找出一種最佳策略 γ^*, 滿足

$$\max_{1 \leq k^* \leq 100} \gamma^*(k^*) = \min_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \max_{1 \leq k^* \leq 100} \gamma(k^*) \right\}, \tag{1}$$

其中Γ 是任意檢測策略γ所形成之集合。我們稱 γ^* 爲「最佳的最糟情況策略」。換句話說, 此題目要問的就是如何「將最大值最小化」, 找出最佳的測試策略γ^*,保證讓最糟的測試的次數降到最低?

我們決定先看看花蓮女中的方法來熟悉此問題。在花蓮女中的作品中, 她們以遞迴數列來解此問題, 以下是該作品中各種符號的定義及建立的遞迴式

e 代表蛋的數目 (原題即爲 $e=2$)
l 爲待檢測樓層, 爲一個隨已測試次數變動的變數 (原題即爲 $l=100$)
n 爲所需最小次數
$N_{l,e}=n$ 視爲用 e 顆蛋來檢測 l 層樓的所需最小次數
k 是在原題中, 第一次丟擲測試的樓層。
建立了以下遞迴數列來解此題:

$$\min_{k=1\sim 100}\left\{1+\max\left\{\underbrace{N_{k-1,1}}_{\text{如果破的話}},\underbrace{N_{100-k,2}}_{\text{如果沒破}}\right\}\right\}$$

這個遞迴式的意義是, 將第一顆蛋自第 k 層丟下。如果破的話, 代表關鍵樓層 $k^*\leq k$, 此時只剩一顆蛋要檢查 k^* 的可能分布樓層數爲 $k-1$, 所需的測試次數依照符號規定爲 $N_{k-1,1}$。若是第一顆蛋自第 k 層丟下不破的話, 剩兩顆蛋, 要檢查 $100-k$ 層樓, 所需測試次數依照符號規定爲 $N_{100-k,2}$。由於要求出最糟情形, 所以使用 $\max\{N_{k-1,1},N_{100-k,2}\}$, 再讓 k 跑遍所有 $1\sim 100$ 的情形, 求出最小值。此即爲式子 (1) 的解答。

爲了加快計算速度, 她們再將變量的意義微調後, 得出更簡潔的遞迴式子以便電腦計算: 令
e 爲可以破的蛋數
l 爲可以檢測之最大樓層
n 爲可以丟的次數
則可以列出底下遞迴式:

$$L_{e,n}=L_{e-1,n-1}+1+L_{e,n-1} \tag{2}$$

此式子中等號後面的三個部份分別的意義爲:
1 第一次檢測
$L_{e-1,n-1}$ 丟之後如果雞蛋破了可以推算出來的關鍵樓層範圍
$L_{e,n-1}$ 丟之後如果雞蛋沒破可以推算出來的關鍵樓層範圍。

此作品使用遞迴式 (2) 可以順利使用電腦 (本題數字不大因此可用手算去執行) 跑出 google 公司所提供的答案。本題答案是: 將第一顆蛋自第 14 層樓往下丟, 如果破了, 只剩一顆蛋只能從第一層樓慢慢往上測試, 最糟的情形是在 $k^*=13\vee 14$下, 需要測試到第13層樓, 總共測試 14 次才能確定到底 $k^*=13$ 還是 $k^*=14$。如果第一次自第 14 層樓往下丟測試不破, 則還有兩顆蛋, 第二次則自第 27 層樓往下丟, 如果破了, 利用最後一顆蛋逐層檢視第 $15\sim 26$樓。如果第二次則自第 27 層樓往下丟不破, 第三次則自第 39 層樓往下丟; 如果再不破, 第四次自 50 層樓往下丟; 之後如果都不破, 依序第五次自 60 層樓往下丟; 第六次自 69 層樓往下丟; 第七次自 77 層樓往下丟; 第八次自 84 層樓往下丟; 第九次自 90 層樓往下丟; 第十次自 95 層樓往下丟; 第十一次自 99 層樓往下丟。如果也沒破, 不用再丟, 已經可以確定 k^*是 100。如果破了,$k^*=96\vee 97\vee 98\vee 99$。此時, 逐層測試第96層、第97層、第98層, 最糟需再測試三次才能確定 $k^*=98$ 或 $k^*=99$。此策略之下, 不管 k^* 在第幾層樓, 最糟總共需要測試 14 次, 即可找出 k^* 的位置。

仔細檢查式子 (2), 我們發現花蓮女中的同學似乎是憑直觀看出來, 且沒有解出該遞迴式的一般公式解。事實上, 該題正確答案 (如上) 雖然不難理解, 但解答形式卻頗爲複雜。在本作品中, 我們使用國中數學知識, 佐以縝密分析的手法, 由一個簡單的策略入手。該策略雖非本題的「最佳的

最糟情況策略」, 但是完整分析該狀況之後, 使得我們對於本題結構了解透徹, 最終得到一個巧解該 google 問題的線索。我們的分析手法具有一般性, 可以回答任意 y, $1 \le k^* \le y$ 的「最佳的最糟情況策略」, 這個結果是 $y = 100$ 的一般化推廣。

參、研究目的

1. 以不同的策略檢測兩顆蛋在100層的大樓中丟下去會破樓層的測試次數, 並比較其優、缺點。

2. 分析上述不同策略的一般式, 並進行數學求解。

3. 比較不同解之間的最佳策略, 並以數學證明此策略優於其他者。

4. 將原本的問題延伸成「蛋數相同, 改變總樓層數」, 並以數學方法找出最佳的策略。

肆、研究器材

電腦、紙、筆、各式文具用品

伍、研究過程與方法

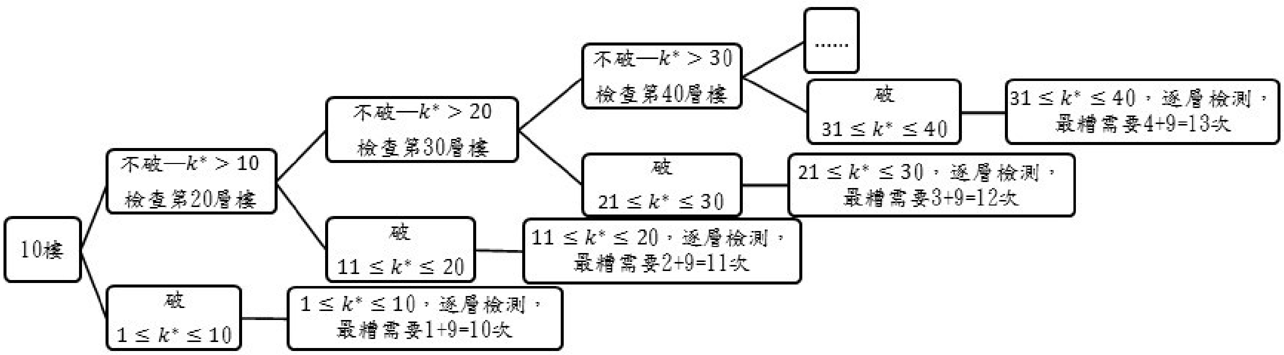
- 要比較各個策略的好壞, 必須求出每個策略中最糟的次數來做比較, 才能保證此策略優於他者。
- 每個策略依不同狀況分類進行研究分析, 並在分析證明中找出不同狀況的最糟測試次數範圍, 好找出每種狀況的最佳解範圍。

一、策略1 γ_d ——每次測試增加固定樓層數 d

我們一開始想到的策略是最直接的「對半分策略」: 即是從總樓層數的一半開始丟, 如果不破, 就從剩下樓層數的一半再丟; 如果破了, 就從這個「區間」的第一層開始, 一層一層往上測試。但在這個對半分的策略中, 最糟的情況發生在 $k^* = 49$ 或 50 , 也就是當第一次測試時蛋破掉, 剩下的 $1 \sim 50$ 層樓需要一層一層往上丟, 共需 50 次才能測出關鍵樓層。這個策略的測試次數遠高於我們預期, 主要原因是萬一第一次蛋就破了, 剩下要逐一檢查的樓層數還有 49 層樓。

若要減少最糟狀況下的測試次數, 則第一次起始樓層數要降低, 而且如果不破時, 下一次測試的樓層數也不能太高。因此, 我們第一個想到以第 10 層樓爲起始樓層, 要是沒破, 就往上增加 10 層樓去測試。

1. 總樓層數 $y = 100$, 蛋數 2 , 起始樓層 10 , 策略: 如果破, 就從下到上逐層檢測; 如果沒破, 則往上增加 10 層去檢測

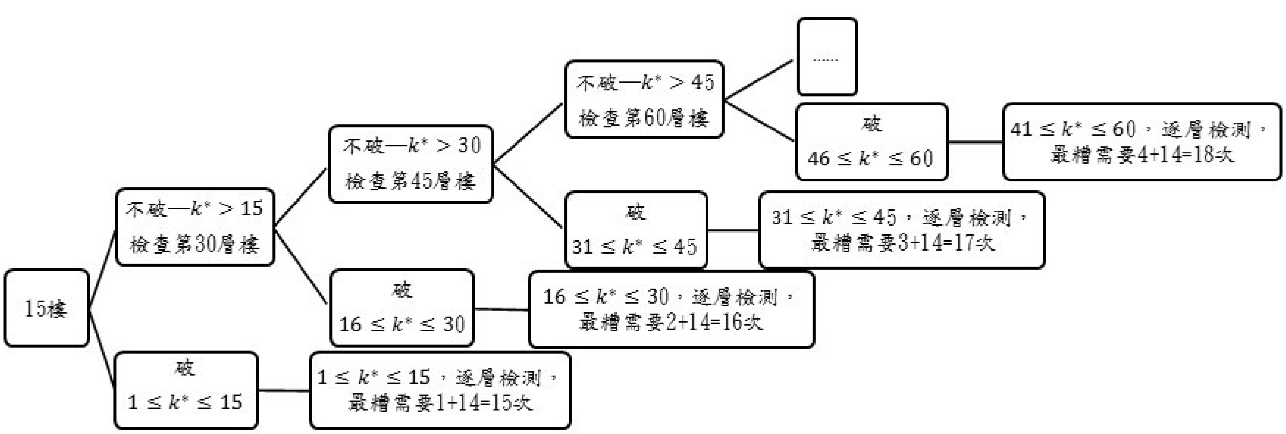


(圖1) 此圖主要在說明策略1起始樓層爲10時, 每個區間丟擲的情形

測試的樓層	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
第一顆蛋丟擲的次數 (不破)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	–
第二顆蛋的測試次數 (破之後)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

(表一) 此策略起始樓層爲 10 , 每次測試時破和不破兩種情形的最糟次數統計表。
此策略在起始樓層 $d = 10$ 樓的情形中, 當關鍵樓層 $k^* = 99 \vee 100$ 樓時, 所需的測試次數爲最多的 19 次
我們試圖找出最糟測試次數比 19 次還低的情形, 所以決定以10爲中心, 分別往上及往下計算起始樓層15及5的最糟測試次數。

2. 總樓層數 $y = 100$, 蛋數 2 , 起始樓層 15 , 策略: 如果破, 就從下到上逐層檢測; 如果沒破, 則往上增加 15 層去檢測

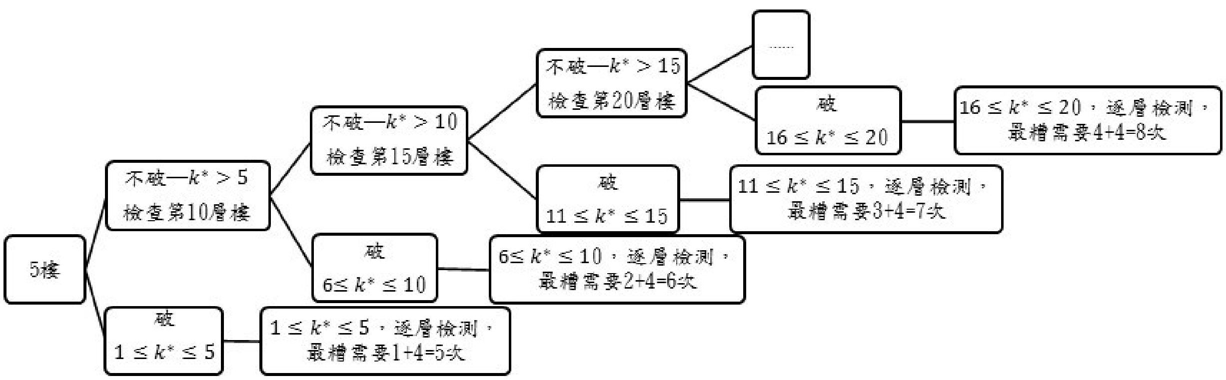


(圖 2) 此圖主要在說明策略 1 起始樓層爲 15 時, 每個區間丟擲的情形

測試的樓層	15	30	45	60	75	90	100
第一顆蛋丟擲的次數 (不破)	1	2	3	4	5	6	–
第二顆蛋的測試次數 (破之後)	15	16	17	18	19	20	16

(表二) 當此策略起始樓層爲 15 , 每次測試時破和不破兩種情形的最糟次數統計表。
此策略在起始樓層 $d = 15$ 樓的情形中, 當關鍵樓層 $k^* = 89 \vee 90$ 樓時, 所需的測試次數爲最多的 20 次

3. 總樓層數 $y = 100$, 蛋數 2 , 起始樓層 5 , 策略: 如果破, 就從下到上逐層檢測; 如果沒破, 則往上增加 5 層去檢測



(圖 3) 此圖主要在說明策略 1 起始樓層爲 5 時, 每個區間丟擲的情形

測試的樓層	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
第一顆蛋丟擲的次數 (不破)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
第二顆蛋的測試次數 (破之後)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
丟擲的次數	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
第一顆蛋丟擲的次數 (不破)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	–
第二顆蛋的測試次數 (破之後)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

(表三) 當此策略起始樓層爲 5 , 每次測試時破和不破兩種情形的最糟次數統計表。
此策略在起始樓層 $d = 5$ 樓的情形中, 當關鍵樓層 $k^* = 99 \vee 100$ 樓時, 所需的測試次數爲最多的 24 次

問題與討論:

- 問題 1: 在此策略中, 最佳的起始樓層是多少?
  以下是此策略 (蛋數及總樓層數不變) 不同的起始樓層對應到的最糟狀況:

起始樓層 (樓)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
破 (次)(最糟)	100	51	35	28	24	21	20	19	19	19	19	19
起始樓層 (樓)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
破 (次)(最糟)	19	20	20	21	21	22	23	24	24	25	26	27
起始樓層 (樓)	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
破 (次)(最糟)	28	28	29	30	31	32	33	34	35	35	36	37
起始樓層 (樓)	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
破 (次)(最糟)	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
起始樓層 (樓)	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
破 (次)(最糟)	50	51	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

(表四) 此表將起始樓層當作變數, 列出不同的起始樓層對應到的最糟測試次數次數並比較其關係

從上表我們可以得到, 在此策略中, 起始樓層 $8, 9, 10, 11, 12, 13$ 時皆會產生最佳解, 所需測是次數爲 19 次

- 問題2: 是否能找到一般式做爲此策略的計算依據?
  以下是策略 1 之一般式的分析與證明:

二、型態爲策略1的「最佳的最糟情況策略」γ_{d^*} 之分析與證明

在本節裡, 我們討論當 y 給定時, 考慮所有 $\gamma_d,\ d \in \mathbf{N}$ 的策略 1 去檢測 k^* 值, 當 d 爲何數時, 最多所需的檢測次數爲最少? 以下是本節這個問題的數學形式:

假設 y 爲一個給定的自然數。令 $\gamma_d(k^*)$ 爲使用 γ_d 策略時, 檢測出 k^* 所需要的檢測次數。我們希望找出 $1 \leq d^* \leq y$ 使得:

$$\max_{1 \leq k^* \leq y} \gamma_{d^*}(k^*) = \min_{1 \leq d \leq y} \left\{ \max_{1 \leq k^* \leq y} \gamma_d(k^*) \right\} \tag{3}$$

此策略 γ_d 由起始樓層 d 開始測試。如果破掉, 則使用第二顆蛋逐層檢查第 $1 \sim d-1$ 層樓。如果不破, 則往上再增加 d 層樓, 從第 $2d$ 層開始測試。如果破掉, 則使用第二顆蛋逐層檢查第 $d+1 \sim 2d-1$ 層樓。如果不破, 則往上再增加 d 層樓, 從第 $3d$ 層開始測試。依此類推。

令 $y = qd + r, 1 \leq r < d$. 則在策略 1 γ_d 之下, 第一顆蛋在破掉之前的測試樓層數如下圖:

$$\underbrace{\text{破}}_{d};\ \underbrace{\text{不破—破}}_{2d};\ \underbrace{\text{不破—不破—破}}_{3d};\ \cdots;\ \underbrace{\text{不破—不破}\cdots\text{—不破—破}}_{qd};\ \underbrace{\text{不破—不破—}\cdots\text{—不破}}_{qd}\ \underbrace{\text{—破}}_{r}$$

因此, 此策略 γ_d 之最糟情形爲:

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le k^*\le y}\gamma_d(k^*)\\
=&\ \max\left\{\max_{1\le k^*\le d}\gamma_d(k^*)\ ;\ \max_{d+1\le k^*\le 2d}\gamma_d(k^*)\ ;\cdots;\ \max_{(q-1)d+1\le k^*\le qd}\gamma_d(k^*)\ ;\ \max_{qd+1\le k^*\le qd+r}\gamma_d(k^*)\right\}\\
=&\ \max\left\{\underbrace{1+(d-1)}_{<q+(d-1)};\underbrace{2+(d-1)}_{<q+(d-1)};\underbrace{3+(d-1)}_{<q+(d-1)};\cdots;q+(d-1);\underbrace{q+(r-1)}_{<q+(d-1)}\right\}\\
=&\ q+d-1\\
=&\ \left[\frac{y}{d}\right]+d-1([\ ]\text{代表高斯符號})
\end{aligned}\tag{4}$$

從這個推導過程, 我們可以看出, 當給最高樓層 y 使得$1\le k^*\le y$ 時, 欲以每 d 樓層檢測一次的策略去找出 k^* , 而 d 滿足 $y=qd+r,\ 1\le r<d$, 最多所需次數爲 $q+d-1$ 而與剩餘樓層數 r 無關。
例如: 當 $y=99,100,101,102,103,104,105,106,107$ 時, 使用 $d=9$ 的策略, 最多可能的檢測次數皆爲 $11+9-1=19$ 次, 皆發生在 $k^*=99\ \vee\ 98$ 時。
依此, $d=9$ 之策略, 第一顆蛋在 $9,18,27,36,45,54,63,72,81,90$ 共測試10次, 皆不破。在第 99 層在測試一次破掉。此時得知, $91\le k^*\le 99$, 需要用第二顆蛋測試 $91,92,93,94,95,96,97$ 接不破。到第 98 層時, 分爲「破」與「不破」兩種情形 : 前者可知 $k^*=98$; 後者可知 $k^*=99$, 但無論如何這兩者的測試次數皆是 19 次。

〈注意一〉當 $y=100$, 而 $k^*=100$ 時, 用 $d=9$ 策略測試次數並非 19 次, 而是用第一顆蛋檢測 $9,18,27,36,45,54,63,72,81,90,99$ 皆不破, 由於 $y=100$, $k^*\le 100$, 由於第 99 層樓測試時蛋不破, 此時可確認 $k^*=100$, 共測試 11 次。

〈注意二〉當 $y=108$ 時, 用 $d=9$ 的策略, 最多須檢測 $[\frac{108}{9}]+9-1=20$ 次, 發生在 $k^*=107\vee 108$ 時。若改用 $d=10$ 的策略, 則最多需 $[\frac{108}{10}]+10-1=19$ 次, 發生在 $k^*=99\vee 100$時。因此, 當 $y=108$ 時, $d=10$ 是一個比 $d=9$「較佳」的「最糟情況策略」。事實上, 由於 $y=108$ 並非完全平方數, 依照下面的定理 (貳), 由於 $[\sqrt{108}]=10$, 且 $[\sqrt{108}]([\sqrt{108}]+1)=110>108$, $d=10$ 剛好是這種「等差間距」型態 γ_d 的「最佳最糟情況策略」。

現在, 將式子 (4) 代入 (3), 我們希望找出最好的 d^* 值使得

$$\begin{aligned}
\max_{1\le k^*\le y}\gamma_{d^*}(k^*) &= \min_{1\le d\le y}\left\{\max_{1\le k^*\le y}\gamma_d(k^*)\right\}\\
&= \min_{1\le d\le y}\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}
\end{aligned}\tag{5}$$

以下, 我們分成 y 是完全平方數 (定理 (壹)) 以及 y 不是完全平方數 (定理 (貳)) 來討論問題 (5) 的解。

定理 (壹):

若 y 爲完全平方數, 則最佳之 d 值爲 $d^*=\sqrt{y}$ 且 $\max\limits_{1\le k^*\le y}\gamma_{d^*}(k^*)=\min\limits_{1\le d\le y}\left\{\left[\frac{y}{d}\right]+d-1\right\}=2\sqrt{y}-1.$
證明: 我們將 d 分成 $d=\sqrt{y},\ d=\sqrt{y}-j,\ d=\sqrt{y}+j$ 三種狀況來討論本題:

- 若 $d=\sqrt{y}$, 則

$$\left[\frac{y}{d}\right]+d-1=\left[\frac{y}{\sqrt{y}}\right]+\sqrt{y}-1=2\sqrt{y}-1.\tag{6}$$

- 若 $d=\sqrt{y}-j, j=1,2,\cdots,\sqrt{y}-1$. 此時:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{y}{d}\right]+d-1 \\
= & \left[\frac{y}{\sqrt{y}-j}\right]+(\sqrt{y}-j)-1 \\
\geq & [\sqrt{y}+j]+(\sqrt{y}-j)-1 & (7)\\
= & 2\sqrt{y}-1. & (8)
\end{aligned}$$

上述不等式 (7) 成立是因爲$\frac{y}{\sqrt{y}-j}>\sqrt{y}+j$, 所以 $[\frac{y}{\sqrt{y}-j}]\geq\left[\sqrt{y}+j\right]$. 又由於 y 爲完全平方數, $\sqrt{y}$ 爲整數, 所以 $\left[\sqrt{y}+j\right]=\sqrt{y}+j$.

- 若 $d=\sqrt{y}+j, j=1,2,\cdots,y-\sqrt{y}$. 則:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{y}{d}\right]+d-1 \\
= & \left[\frac{y}{\sqrt{y}+j}\right]+(\sqrt{y}+j)-1 \\
\geq & [\sqrt{y}-j]+(\sqrt{y}+j)-1 \\
= & 2\sqrt{y}-1. & (9)
\end{aligned}$$

綜合式子 (6)、(8) 與 (9),

$$\begin{aligned}
\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma_{d^*}(k^*) &= \min_{1\leq d\leq y}\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\} \\
&= \min\left\{\underbrace{\left[\frac{y}{\sqrt{y}}\right]+\sqrt{y}-1;}_{=2\sqrt{y}-1}\ \underbrace{\min_{d=\sqrt{y}-j}\{[\frac{y}{d}]+d-1\};}_{\geq 2\sqrt{y}-1}\ \underbrace{\min_{d=\sqrt{y}+j}\{[\frac{y}{d}]+d-1\}}_{\geq 2\sqrt{y}-1}\right\} \\
&= 2\sqrt{y}-1.
\end{aligned}$$

本題因而得證。

定理 (貳):

若 y 爲非完全平方數, $\min_{1\leq d\leq y}\left\{\left[\frac{y}{d}\right]+d-1\right\}=\begin{cases}2\left[\sqrt{\mathrm{y}}\right], & \text{if } \left[\sqrt{\mathrm{y}}\right]\left(\left[\sqrt{\mathrm{y}}\right]+1\right)\leq \mathrm{y};\\ 2\left[\sqrt{\mathrm{y}}\right]-1, & \text{if } \left[\sqrt{\mathrm{y}}\right]\left(\left[\sqrt{\mathrm{y}}\right]+1\right)>\mathrm{y}.\end{cases}$

證明:

假設 $\left[\sqrt{y}\right]\neq\sqrt{y}$ 否則 y 爲完全平方數 (即定理 (壹)), 我們分三種情形來討論:

(i) $\left[\sqrt{y}\right]\left(\left[\sqrt{y}\right]+1\right) < y$

(ii) $\left[\sqrt{y}\right]\left(\left[\sqrt{y}\right]+1\right) > y$

(iii) $\left[\sqrt{y}\right]\left(\left[\sqrt{y}\right]+1\right) = y$

case(i) $\left[\sqrt{y}\right]\left(\left[\sqrt{y}\right]+1\right) < y$, 並令 $\hat{d}=\left[\sqrt{y}\right]$ 使得 $\hat{d}(\hat{d}+1) < y$:
我們首先證明, y 除以 $\hat{d}=\left[\sqrt{y}\right]$ 之商爲 $\hat{q}=[\sqrt{y}]+1$ 或 $\hat{q}=[\sqrt{y}]+2$. 根據假設, 在本狀況下, 已經有 $\hat{d}(\hat{d}+1) < y$. 我們接著再計算

$$\hat{d}(\hat{d}+2)=(\hat{d}+1)^2-1>(\sqrt{y})^2-1=y-1.$$

由於 $\hat{d}(\hat{d}+2)$ 是整數, y 也是整數, 所以 $\hat{d}(\hat{d}+2)>y-1$ 可以寫成 $\hat{d}(\hat{d}+2)\geq y$.

當 $\hat{d}(\hat{d}+2)=y, y$ 可以被 $\hat{d}=[\sqrt{y}]$ 整除, 此時 y 除以 $\hat{d}=[\sqrt{y}]$ 之商數爲 $\hat{q}=\hat{d}+2$. (10)

相反的, 若 $\hat{d}(\hat{d}+2)>y$, 由於 $\hat{d}(\hat{d}+1)<y$, 可知此時 y 除以 $\hat{d}$ 之商數爲 $\hat{q}=\hat{d}+1$. (11)

接著要計算 $\min\limits_{1\leq d\leq y}\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\} = \min\limits_{1\leq d\leq y}\{q+d-1\}$, 我們再細分兩種情況說明: $[\sqrt{y}] \mid y$ 或 $[\sqrt{y}]\nmid y$ 去討論:

(一) 若 $[\sqrt{y}]\mid y$, 也就是 $\hat{d}\mid y$:

- 如果讓 $d=\hat{d}$, 由式子 (10) 可以得知 y 除以 $\hat{d}$ 之商數爲 $\hat{q}=\hat{d}+2$. 此時,

$$\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}=2[\sqrt{y}]+1. \tag{12}$$

- 如果讓 $d=\hat{d}-j, j=1,2,3,\cdots,\hat{d}-1$:
考慮 y 除以 $(\hat{d}-j)$ 之試除,

$$\begin{aligned}
& (\hat{d}-j)(\hat{d}+j+1) && (13)\\
= \ & \hat{d}(\hat{d}+1)+\hat{d}j-\hat{d}j-j^2-j \\
= \ & [\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1)-j^2-j \\
< \ & y \quad \text{(現在爲 case (i) } [\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1)<y \text{ 之情形)} && (14)
\end{aligned}$$

所以 y 除以 $d=(\hat{d}-j)$ 之商數至少有 $\hat{d}+j+1$. 因此,

$$(d=(\hat{d}-j)) \qquad \left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}\geq(\hat{d}+j+1)+(\hat{d}-j)-1=2[\sqrt{y}]. \tag{15}$$

- 如果讓 $d=\hat{d}+1$, 由於在現在 case(i) 的情形下 $d(d-1)=([\sqrt{y}]+1)\cdot[\sqrt{y}]<y$, 而且很容易可以看出
$$([\sqrt{y}]+1)([\sqrt{y}]+1)>\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=y.$$
因此可以得出 y 除以 $d=[\sqrt{y}]+1$ 之商爲 $[\sqrt{y}]$. 所以,
$$(d=(\hat{d}+1))\qquad \left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}=[\sqrt{y}]+([\sqrt{y}]+1)-1=2[\sqrt{y}]. \tag{16}$$

- 如果讓 $d=\hat{d}+k, k=2,3,\cdots,y-\hat{d}$, 由 (13) 和 (14) 所連成的不等式得知,
$$\begin{aligned} y &> (\hat{d}-j)(\hat{d}+j+1), \quad j=1,2,3,\cdots \\ &= (\hat{d}-k+1)(\hat{d}+k), \quad k=2,3,\cdots \end{aligned}$$
可以得知 y 除以 $d=[\sqrt{y}]+k,\ k\geq 2$ 之商至少爲 $\hat{d}-k+1,\ k\geq 2$. 所以,
$$(d=(\hat{d}+k))\qquad \left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}\geq(\hat{d}-k+1)+(\hat{d}+k)-1=2[\sqrt{y}]. \tag{17}$$

綜合 (12)、(15)、(16)、(17) 四式, 在 case (i) $[\sqrt{y}]\big([\sqrt{y}]+1\big)<y$ 且 $[\sqrt{y}]\mid y$ 的情形下,
$$\min_{1\leq d\leq y}\left\{\left[\frac{y}{d}\right]+d-1\right\}=2[\sqrt{y}]$$
此時最小值發生在 $d=[\sqrt{y}]+1$ 時 (還可能在別處)。

(二) 若 $[\sqrt{y}]\nmid y\quad(\hat{d}(\hat{d}+2)>y)$

- 如果讓 $d=\hat{d}$, 由式子 (11) 可以得知 y 除以 $\hat{d}$ 之商數爲 $\hat{q}=\hat{d}+1$. 此時,
$$\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}=(\hat{d}+1)+\hat{d}-1=2[\sqrt{y}]. \tag{18}$$

- 如果讓 $d=[\sqrt{y}]+1$, 因爲現在仍是 case (i), 我們還是有 $\hat{d}(\hat{d}+1)<y$. 同時, $([\sqrt{y}]+1)([\sqrt{y}]+1)>\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=y$ 仍然成立。所以, y 除以 $d=[\sqrt{y}]+1$ 之商爲 $[\sqrt{y}]$, 使得式子 (16) 的結論 $\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}=2[\sqrt{y}]$ 仍然成立。
- 若是 $d=[\sqrt{y}]-j, j=1,2,3,\cdots$ 或者 $[\sqrt{y}]+k, k=2,3,\cdots$, 由於 (15) 以及 (17) 皆未使用到 $[\sqrt{y}]\mid y$ 之條件, 因此其結論 $\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}\geq 2[\sqrt{y}]$ 仍然成立。

故此, 若 $[\sqrt{y}]\nmid y$, 則
$$\min_{1\leq d\leq y}\left\{\left[\frac{y}{d}\right]+d-1\right\}=2[\sqrt{y}]$$
且至少發生在 $d=[\sqrt{y}]$ 或 $d=[\sqrt{y}]+1$ 兩處。

case(ii) $[\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1) > y$, 在這個情形下:

- 當 $d=\hat{d}=[\sqrt{y}]$ 時, 由於 $d^2=([\sqrt{y}])^2<(\sqrt{y})^2=y$, 所以 y 除以 $[\sqrt{y}]$ 之商數爲 $[\sqrt{y}]$, 因此,
$$\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}=[\sqrt{y}]+[\sqrt{y}]-1=2[\sqrt{y}]-1.$$
- 當 $d=\hat{d}-j, j=1,2,3,\cdots,[\sqrt{y}]-1$, 由於
$$\begin{aligned}(\hat{d}-j)(\hat{d}+j) &= \hat{d}^2-j^2 &(19)\\ &< ([\sqrt{y}])^2 \\ &< y &(20)\end{aligned}$$
代表 y 除以 $d=(\hat{d}-j)$ 之商數至少有 $\hat{d}+j$. 因此,
$$(d=(\hat{d}-j)) \qquad \left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}\geq(\hat{d}+j)+(\hat{d}-j)-1=2[\sqrt{y}]-1.$$
- 當 $d=\hat{d}+j, j=1,2,3,\cdots,y-[\sqrt{y}]$: 由 (19) 以及 (20) 兩式, y 除以 $[\sqrt{y}]$ 之商數至少爲 $\hat{d}-j$. 因此,
$$(d=(\hat{d}+j)) \qquad \left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}\geq(\hat{d}-j)+(\hat{d}+j)-1=2[\sqrt{y}]-1.$$

總和本狀況之下,
$$\min_{1\leq d\leq y}\left\{\left[\frac{y}{d}\right]+d-1\right\}=2[\sqrt{y}]-1$$
且至少發生在 $d=[\sqrt{y}]$ 之處。

case(iii) $[\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1)=y$:

- 當 $d=[\sqrt{y}]$ 時, y 除以 $[\sqrt{y}]$ 之商數爲 $[\sqrt{y}]+1$. 所以,
$$\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}=([\sqrt{y}]+1)+[\sqrt{y}]-1=2[\sqrt{y}]. \qquad (21)$$
- 當 $d=[\sqrt{y}]+1$ 時, y 除以 $[\sqrt{y}]+1$ 之商數爲 $[\sqrt{y}]$. 所以,
$$\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}=[\sqrt{y}]+([\sqrt{y}]+1)-1=2[\sqrt{y}]. \qquad (22)$$
- 如果讓 $d=\hat{d}-j, j=1,2,3,\cdots,\hat{d}-1$:
依照 (13) 以及 (14) 兩式類似的計算:
$$\begin{aligned}&(\hat{d}-j)(\hat{d}+j+1) &(23)\\ =\ &\hat{d}(\hat{d}+1)+\hat{d}j-\hat{d}j-j^2-j \\ =\ &[\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1)-j^2-j \\ <\ &y \quad (\text{ 現在爲 case (iii) } [\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1)=y \text{ 之情形 }) &(24)\end{aligned}$$
所以 y 除以 $d=(\hat{d}-j)$ 之商數至少有 $\hat{d}+j+1$. 因此,
$$(d=(\hat{d}-j)) \qquad \left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}\geq(\hat{d}+j+1)+(\hat{d}-j)-1=2[\sqrt{y}]. \qquad (25)$$

- 如果讓 $d=\hat{d}+k, k=2,3,\cdots,y-\hat{d}$, 由 (23) 和 (24) 所連成的不等式得知, y 除以 $d=[\sqrt{y}]+j+1,\ j\geq 1$ 之商至少爲 $\hat{d}-j,\ j\geq 1$. 所以,

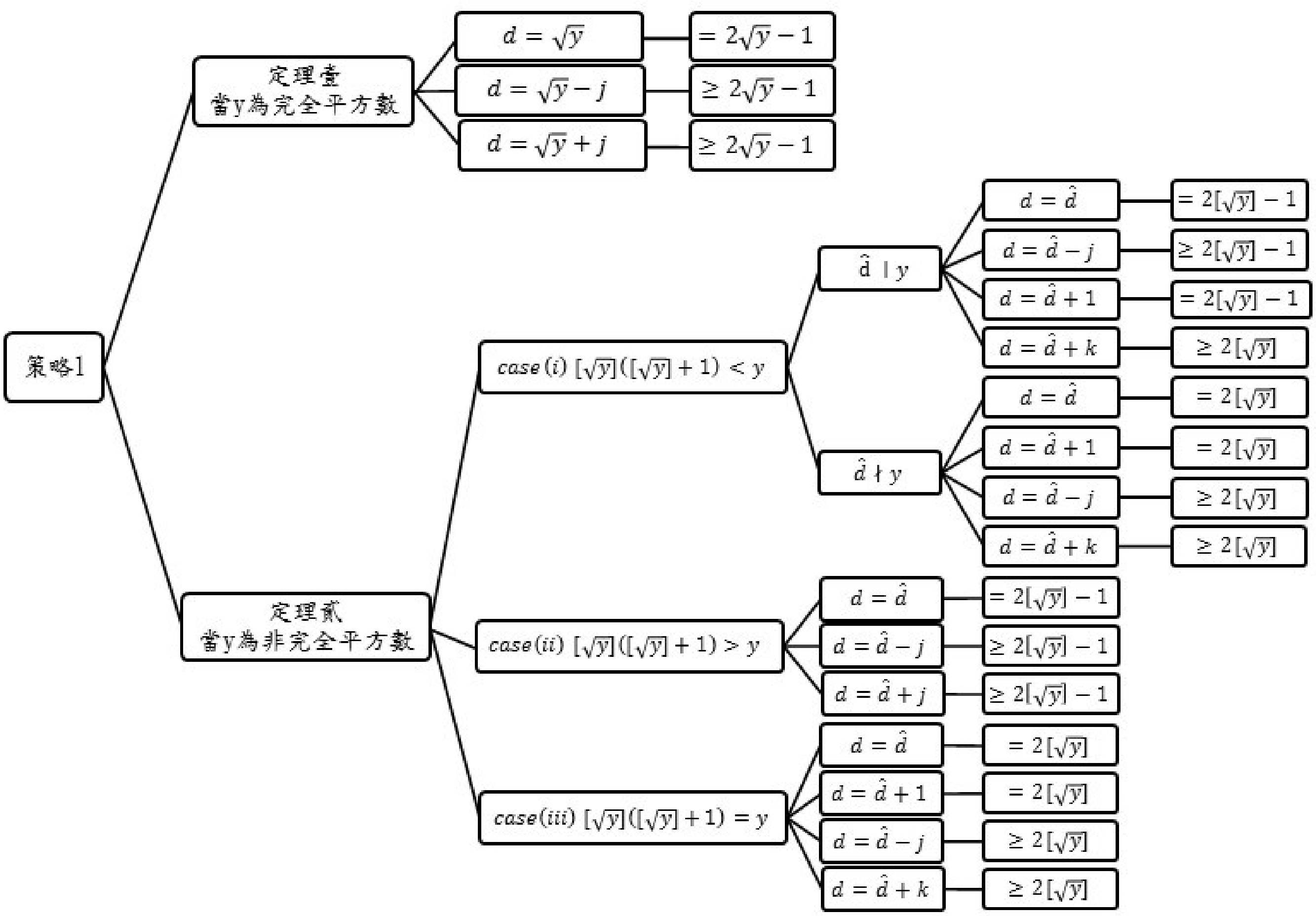
$$\left\{[\frac{y}{d}]+d-1\right\}\geq(\hat{d}-j)+(\hat{d}+j+1)-1=2[\sqrt{y}]. \tag{26}$$

綜合 (21)、(22)、(25)、(26) 四式, 在 case (iii) $\left[\sqrt{y}\right]\left(\left[\sqrt{y}\right]+1\right)=y$ 的情形下,

$$\min_{1\leq d\leq y}\left\{\left[\frac{y}{d}\right]+d-1\right\}=2[\sqrt{y}]$$

此時最小值發生在至少 $d=[\sqrt{y}]$ 和 $d=[\sqrt{y}]+1$ 兩處。

綜合以上 case(i)、case(ii)、case(iii) 之討論, 本定理結果因此得證。



(圖 4) 說明在定理壹及定理貳的所有情況中對應到的最糟次數範圍

（注意四）本定理證明其實並不困難, 只是較爲複雜, 必須細分成十多個細項去討論。複雜的成因在於 d 是正整數值, 且 $[\frac{y}{d}]$ 帶有高斯符號。否則, 如果將高斯符號略去, 原題使用算幾不等式可得

$$\frac{y}{d}+d-1\geq 2\sqrt{y}-1,$$

且等號成立發生在 $d=\sqrt{y}$. 但是,$\sqrt{y}$ 不必然是整數, 且 $2\sqrt{y}-1$ 也不是本策略之答案。

（注意五）定理 (壹) 和 定理 (貳) 完整描述 策略1 之「最佳的最糟情況」之 d^* 值。當給定兩顆關鍵樓層在 $1\leq k^*\leq y$ 的蛋, 根據 y 是否爲完全全平方數, 以及 $[\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1)$ 和 y 的大小關係, 這兩個定理給出最佳的 d^* 值, 使得, 第一次試丟樓層爲 d^*,若沒有破, 第二次試丟樓層爲 $2d^*$, 依此類推, 所需要測試出 k^* 的最多總測試次數爲相同策略之下最少的。而這個總測試次數的值也在 定理 (壹) 和 定理 (貳) 完整給出。

三、巧解 google 原題── y=100之最佳策略

在 (一､) 及 (二､) 的討論中, 我們找出每隔一個常數樓層數 d 測試一次的最佳 d— 策略, 並給出最好的常數值 d^* 之公式。在本節裡, 我們將每次測試增加固定樓層數 d 的限制取消, 進而考慮以下的一般狀況: 令 d_i 爲第一顆蛋經過前 $i-1$ 次測試都沒破, 接下來的第 i 次測試, 比第 $i-1$ 次測試之樓層往上增加的樓層數。令 $d_1=$ 第一次測試之樓層高度。

根據這個符號定義, d_2 是第一次測試沒破, 第二次測試比第一次的樓層往上增加的樓層數

很顯然的,(一､) 及 (二､) 的 d— 策略, 即爲 $d_1=d_2=\cdots=d_n=d$ 之特殊情形, 依照之前的討論, 如果第一次測試蛋就破掉, 代表 $1\leq k^*\leq d_1$, 此時利用第二顆蛋逐層檢測 $1\sim d_1-1$ 的樓層 , 最糟糕的情況是要等到檢查第 d_1-1 樓層, k^* 才能確定, 總共測試 $1+(d_1-1)$ 次。而如果第一次測試沒破, 我們將往上增加 d_2 個樓層去測試。如果破了, 代表 $d_1+1\leq k^*\leq d_1+d_2$. 在此情況下, 最多需要檢查出 $2+(d_2-1)$ 次才能確定 k^* 值。依此類推, 對任意一組 $(d_1,d_2,d_3,\cdots,d_n)\in N^n$, 滿足 $d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n=100$, 其所需要最多次數去確定 k^* 之位置, 可以用下列式子表示:

$$\max\{1+(d_1-1);2+(d_2-1);3+(d_3-1),\cdots;n+(d_n-1)\} \tag{27}$$

而本題是希望找出最好的 n^* 值, 以及 $d_1^*+d_2^*+\cdots d_n^*$, 使得

$$d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^*=100,\text{且}\max\{1+(d_1^*-1);2+(d_2^*-1);3+(d_3^*-1);\cdots;n^*+(d_n^*-1)\} \tag{28}$$

的值達到最小。亦即, 我們要解決以下之「最小──最大」問題:

$$\min_{n;(d_1,d_2,d_3,\cdots,d_n)}\{\max\{1+(d_1-1);2+(d_2-1);\cdots;n+(d_n-1)\}\} \tag{29}$$

這個問題可以改寫如下: 新增一個變數 t , 並令:

$$t=\max\{1+(d_1-1);2+(d_2-1);\cdots;n+(d_n-1)\} \tag{30}$$

則原題變成:

$$\begin{aligned}
\min\quad & t \\
s.t\quad & t \geq d_1 && (31)\\
& t \geq d_2+1 \\
& t \geq d_3+2 \\
& \vdots \\
& t \geq d_n+(n-1) && (32)
\end{aligned}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = 100, \quad y \geq t \geq 1$$

求最好的 n^*; t^*; 以及 $(d_1, d_2, \cdots, d_n^*)$ 。我們發現, 將上述 n 個不等式相加, 可以得到:

$$\begin{aligned} nt &\geq (d_1 + d_2 + \cdots d_n) + (1 + 2 + \cdots + (n-1)) \quad (33) \\ &= 100 + \frac{n(n-1)}{2} \quad (34) \end{aligned}$$

將 n 除到右邊, 以分離 n 和 t 兩個變數, 可得:

$$t \geq \frac{100}{n} + \frac{n-1}{2}. \quad (35)$$

再從 $t \geq d_n + (n-1), d_n \in \mathbf{N}$, 我們可以得到:

$$t - n + 1 \geq d_n \geq 1 \Rightarrow t - n \geq 0 \Rightarrow t \geq n \quad (36)$$

本題即可轉變成爲求取所有 n, t 的組合, 滿足下列不等式組:

$$t \geq \frac{100}{n} + \frac{n-1}{2}; \quad y \geq t \geq n$$

並使 t 越小越好。

就這個題目來說, 由於 $y = 100$ 的數字不大, 我們可以用列舉的方式求解。至於一般狀況, 則留待下節探討。

$$
\begin{array}{llll}
\text{當} & n=1\text{ 時}, & t\geq 100,\ 100\geq t\geq 1 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }100\\
\text{當} & n=2\text{ 時}, & t\geq 50+\frac{1}{2},\ 100\geq t\geq 2 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }51\\
\text{當} & n=3\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{3}+1,\ 100\geq t\geq 3 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }35\\
\text{當} & n=4\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{4}+\frac{3}{2},\ 100\geq t\geq 4 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }27\\
\text{當} & n=5\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{5}+\frac{4}{2},\ 100\geq t\geq 5 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }22\\
\text{當} & n=6\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{6}+\frac{5}{2},\ 100\geq t\geq 6 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }20\\
\text{當} & n=7\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{7}+\frac{6}{2},\ 100\geq t\geq 7 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }18\\
\text{當} & n=8\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{8}+\frac{7}{2},\ 100\geq t\geq 8 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }16\\
\text{當} & n=9\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{9}+\frac{8}{2},\ 100\geq t\geq 9 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }16\\
\text{當} & n=10\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{10}+\frac{9}{2},\ 100\geq t\geq 10 & \Rightarrow t\text{之最小值為 }15\\
\text{當} & n=11\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{11}+\frac{10}{2},\ 100\geq t\geq 11 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }15\\
\text{當} & n=12\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{12}+\frac{11}{2},\ 100\geq t\geq 12 & \Rightarrow t\text{之最小值為 }14\\
\text{當} & n=13\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{13}+\frac{12}{2},\ 100\geq t\geq 13 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }14\\
\text{當} & n=14\text{ 時}, & t\geq \frac{100}{14}+\frac{13}{2},\ 100\geq t\geq 14 & \Rightarrow t\text{ 之最小值為 }14\\
\text{當} & n=15\text{ 以後}, & t\geq \frac{100}{15}+\frac{14}{2},\ 100\geq t\geq 15 & \Rightarrow t\text{ 之最小值 }\geq 15
\end{array}
$$

因此, 可以知道本題之 $t^*=14$, 且搭配之 n^* 可以是 $n^*=12\vee 13\vee 14$. 將 $(t^*,n^*)=\{(14,12),(14,13),(14,14)\}$ 代入 (31)-(32) 之條件限制式, 即可以得出所有「最佳的最糟情況策略」之解集合。

- 當 $(t^*,n^*)=(14,12)$,「最佳的最糟情況策略」之解集合為

$$\{(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_{12}^*)\in\mathbf{N}^{12}|\ d_1^*\leq 14, d_2^*\leq 13\cdots,d_{12}^*\leq 3, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{12}^*=100\}. \tag{37}$$

所有滿足 (37) 之序列 $(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_{12}^*)$ 皆為測試關鍵樓層 $1\leq k^*\leq 100$ 之「最佳的最糟情況策略」。在此策略下, 將 100 層樓分成 $n^*=12$ 的區塊去測試, 第 i 個區塊所要測試的樓層數為 d_i^*, 最糟糕的情形下, 需要測試 $t^*=14$ 次。我們在此列出兩組滿足需求的解答。

$$(14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,2,2) \tag{38}$$

$$(14,13,12,11,10,9,8,7,6,3,4,2). \tag{39}$$

雖然上面提到在 $n^* = 14$ 時才可以確定 $d_{14} = 1$, 而無其他可能。但在 $n^* = 12$ 時, 也可求得 $\min\{t\} = 14$, 上面的兩個例子即說明了只要符合不等式, 所求出解的最糟狀況皆與 google 所提供的解答相同。

- 當 $(t^*, n^*) = (14, 13)$,「最佳的最糟情況策略」之解集合爲

  $$\{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{13}^*) \in \mathbf{N}^{13} |\ d_1^* \le 14, d_2^* \le 13, \cdots, d_{12}^* \le 3, d_{13}^* \le 2, d_1^* + d_2^* + \cdots + d_{13}^* = 100\}.$$

  在此策略下, 將 100 層樓分成 $n^* = 13$ 的區塊去測試, 最糟糕的情形下, 也是需要測試 $t^* = 14$ 次。我們在此列出兩組滿足需求的解答。

  $$(14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 1, 1, 2) \tag{40}$$

  $$(12, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 1, 1). \tag{41}$$

  以上兩組解在 google 提供的解答中並未出現, 但這組解的最糟次數卻和 google 提供的解答一樣。

- 當 $(t^*, n^*) = (14, 14)$,「最佳的最糟情況策略」之解集合爲

  $$\{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{14}^*) \in \mathbf{N}^{14} |\ d_1^* \le 14, d_2^* \le 13, \cdots, d_{13}^* \le 2, d_{14}^* \le 1, d_1^* + d_2^* + \cdots + d_{14}^* = 100\}.$$

  在此策略下, 將 100 層樓分成 $n^* = 14$ 的區塊去測試。其中, 最後一個區塊 $d_{14}^* = 1$ 必只含一層樓 —— 第 100 層。最糟糕的情形下, 也是需要測試 $t^* = 14$ 次。我們在此列出兩組滿足需求的解答。

  $$(14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 1, 2, 3, 2, 1) \tag{42}$$

  $$(12, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 2, 4, 2, 2, 1). \tag{43}$$

因此不管是 $n^* = 12, 13, 14$, 只要符合不等式皆與答案相同, 我們還發現 google 所提供的參考解答在每一個區間的最糟測試次數皆爲 14 次, 上面某些組合 (像例 (39)(40) (42)(43)) 在最糟狀況仍然是 14 次。

google所提供的解答中, 共有14次會出現 $t^* = 14$ 而我們發現我們所求出來的某些最佳策略中, 出現 $t^* = 14$ 的次數最低可以到8次, 例如在最佳策略 (13, 12, 11, 10, 9, 8, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) 中, 總共只有 8次會出現 $t^* = 14$ 的狀況, 也就是論機率而言, 我們的策略可以用較少的次數測得關鍵樓層 k^*.

四、一般狀況

在 (三、) 巧解google 原題 的討論中, 我們求得當 $y = 100$ 時的「最佳的最糟情況策略」及最佳解。但我們想了解, 當 y 不再是 100, 而是變數時, n 和 t 的關係。按照上一小節的符號, $y = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

由式子 (30), 我們仍然有 (31)-(32) 各項不等式。將所有不等式相加, 可得到 t 的範圍:

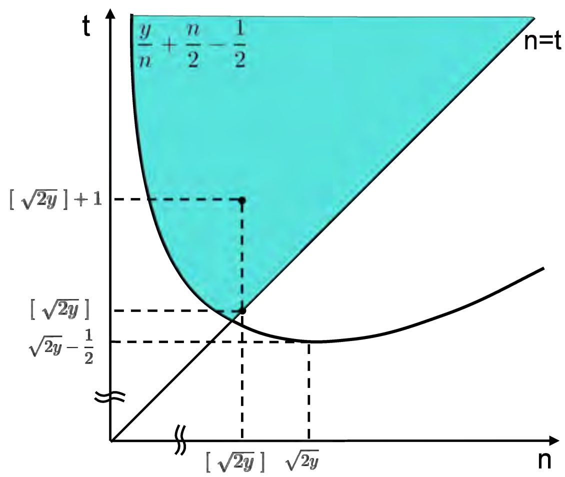
$$\begin{array}{rl}
 & t \ge d_1 \\
 & t \ge d_2 + 1 \\
 & \vdots \\
+) & t \ge d_n + (n-1) \\
\hline
 & nt \ge (d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n) + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) \\
 & = y + \frac{n(n-1)}{2}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow t \geq \frac{y}{n} + \frac{n-1}{2} = \frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2y} - \frac{1}{2}. \tag{44}$$

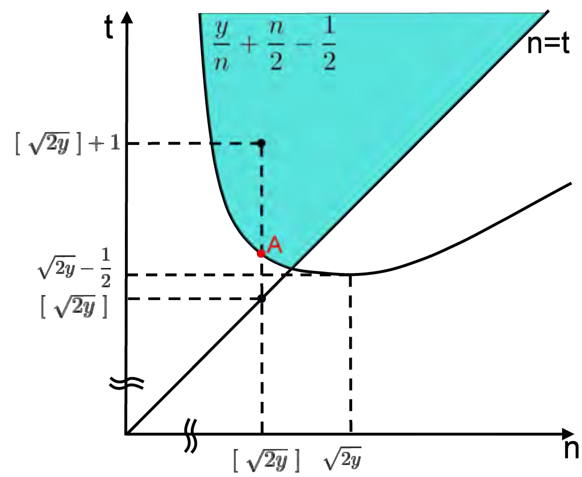
同時, t 還要滿足 (36) 之條件限制式:

$$y \geq t \geq n. \tag{45}$$

將 (44) 和 (45) 聯立, 我們得到下圖藍色區塊。這個區塊畫在橫軸爲 n; 縱軸爲 t 的坐標系上面。而本題解答即爲藍色區塊中, 位置最低的整數格子點 (n^*, t^*)。這裡的縱座標爲 t , 高度最低代表最糟測試次數 t 達到最小值。



(圖 5-1) 當 $\frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \leq [\sqrt{2y}]$ 時的函數圖形



(圖 5-2) 當 $\frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} > [\sqrt{2y}]$ 時的函數圖形

這個藍色區塊的特徵, 我們說明如下。首先我們由 (44) 的算幾不等式得知, 函數 $f(n) = \frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ 的最低點座標爲 $(\bar{n}, \bar{t}) = (\sqrt{2y}, \sqrt{2y} - \frac{1}{2})$. 這個頂點座標顯然落在直線 $t = n$ 的下方。其次, 使用微分來算出函數 $f(n) = \frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ 的一階和二階導數爲

$$f'(n) = -\frac{y}{n^2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}; \quad f''(n) = \frac{2y}{n^3} > 0, \quad \forall n.$$

可知 $f(n)$ 爲凸函數, 而且斜率恆小於 $\frac{1}{2}$. 這代表函數 $f(n)$ 的圖形在最低點座標 $(\bar{n}, \bar{t}) = (\sqrt{2y}, \sqrt{2y} - \frac{1}{2})$ 的左側將會穿出 $t = n$; 在最低點右側則 $f(n)$ 的函數圖形恆在 $n = t$ 的下方。

在底下的討論, 我們依照函數 $f(n) = \frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ 在最低點 $(\bar{n}, \bar{t})$ 左側穿越 $n = t$ 的位置高低分成兩種情形: 一種是如 (圖 5-1) 所示, $t = f(n)$ 和 $t = n$ 交於 $([\sqrt{2y}], [\sqrt{2y}])$ 的左下方; 另一種是如 (圖 5-2) 所示, $t = f(n)$ 和 $t = n$ 交於 $([\sqrt{2y}], [\sqrt{2y}])$ 的右上方。

這個 $t = f(n)$ 和 $t = n$ 交點就是整個藍色區域的最低點。只是, 這個藍色區域最低點未必是符合我們需要的整數格子點。但是, 很確定一件事, 這個藍色區域最低點一定不低於 (高於) 函數 $f(n)$ 的最小值 $\bar{t} = \sqrt{2y} - \frac{1}{2}$. 因此, 藍色區域最低整數格子點高度, 至少會是 $[\sqrt{2y}]$ 起跳。也就是, 本題的解 t^*, 有個 $t^* \geq [\sqrt{2y}]$ 的下界。

當發生 (圖 5-1) 的情況, $t = f(n)$ 和 $t = n$ 交於 $([\sqrt{2y}], [\sqrt{2y}])$ 的左下方, 代表藍色區域包含 $([\sqrt{2y}], [\sqrt{2y}])$ 這個格子點。這個格子點的高度 $[\sqrt{2y}]$ 恰好達到本題下界 $[\sqrt{2y}]$。因此, 在此狀況下, 最小值 $t^* = [\sqrt{2y}]$, 發生在 $n^* = t^* = [\sqrt{2y}]$ 之時。

其次, 當發生 (圖 5-2) 的情況時, 藍色區域的最低點高於 $[\sqrt{2y}]$. 此時, 本題解 t^* 的下界變成是 $[\sqrt{2y}]+1$. 在這種情形下, 我們要證明, 藍色區域包含 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}]+1)$ 這個格子點。由於這個格子點的高度 $[\sqrt{2y}]+1$ 恰爲本情況下, t^* 的下界, 所以我們可以斷言, 在 (圖 5-2) 的情況時, $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}]+1)$ 必爲 (其中之一組) 最佳解。

要說明這一點, 我們只需要證明: $f([\sqrt{2y}]) \leq [\sqrt{2y}]+1$. 也就是證明,(圖 5-2) 中的 A 點會位在 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}])$ 和 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}]+1)$ 之間。這可以很容易透過直接計算去驗證:

$$
\begin{aligned}
([\sqrt{2y}]+1)-f([\sqrt{2y}]) &= ([\sqrt{2y}]+1)-\left(\frac{y}{[\sqrt{2y}]}+\frac{[\sqrt{2y}]}{2}-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{[\sqrt{2y}]}{2}-\frac{y}{[\sqrt{2y}]}+\frac{3}{2} \\
&= \frac{[\sqrt{2y}]^2-2y+3[\sqrt{2y}]}{2[\sqrt{2y}]} \\
&\geq \frac{(\sqrt{2y}-1)^2-2y+3(\sqrt{2y}-1)}{2[\sqrt{2y}]} \\
&= \frac{\sqrt{2y}-2}{2[\sqrt{2y}]} \geq 0, \quad \text{if } y \geq 2.
\end{aligned}
$$

換句話說, 只要總樓層數 y 至少有兩層樓, 則上述不等式必成立。

我們因此得到本作品之最主要定理:

定理 (參):

設 y 爲任意正整數, $y \geq 2$. 今使用兩顆關鍵樓層均爲 k^* 之蛋, $1 \leq k^* \leq y$, 去檢測 k^*, 則「最佳的最糟情況策略」γ^* 所需的檢測次數 t^* 可以表示爲

$$
t^* = \max_{1\leq k^*\leq y}\gamma^*(k^*) = \min_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma(k^*)\right\} = \begin{cases} [\sqrt{2y}], & \text{if } f([\sqrt{2y}]) \leq [\ \sqrt{2y}\ ]; \\ [\sqrt{2y}]+1, & \text{if } f([\sqrt{2y}]) > [\ \sqrt{2y}\ ], \end{cases}
$$

其中, 函數 $f(n)=\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$. 此最佳策略 γ^* 將 y 層樓區分爲 $n^*=[\ \sqrt{2y}\ ]$ 個區域去檢測。設第 i 個區域所需檢測的層樓數量爲 d_i^*, 則「所有」最佳策略 γ^* 可以用數對集合表示爲:

$$
\gamma^* = \{(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_{n^*}^*)\in \mathbf{N}^{n^*} \mid d_1^*\leq t^*, d_2^*\leq t^*-1,\cdots,d_{n^*}^*\leq t^*-n^*+1, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^*=y\}. \tag{46}
$$

接下來我們要探討的是, 如何從最佳策略集 γ^* 中, 找出至少一組解 $(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_{n^*}^*)$. 我們的方法是先設每個 d_i^* 在其上界。亦即, 令

$d_1^* = t^*$;
$d_2^* = t^*-1$;
$\vdots$
$d_{n^*}^* = t^*-(n^*-1)$.

將這些式子相加, 得到 $n^*t^*-(1+2+\cdots+(n^*-1)) = n^*t^*-\frac{n^*(n^*-1)}{2}$. 根據定理 (參), 如果

$f(n^*) = \frac{y}{n^*} + \frac{n^*}{2} - \frac{1}{2} \leq n^*$, 則 $t^* = n^*$. 經過一些代數運算之後, 我們可以將條件 $f(n^*) \leq n^*$ 改寫爲:

$$\begin{aligned} & \frac{y}{n^*} + \frac{n^*}{2} - \frac{1}{2} \leq n^* \\ \Rightarrow \quad & 2y + (n^*)^2 - n^* \leq 2(n^*)^2 \\ \Rightarrow \quad & (n^*)^2 + n^* \geq 2y. \end{aligned} \tag{47}$$

此時, 我們可以發現將 d_i^* 的上界值相加, 所得到的數一定會超過總樓層數 y. 也就是:

$$\begin{aligned} & t^* + (t^* - 1) + \cdots + (t^* - (n^* - 1)) \\ = \quad & n^* t^* - \frac{n^*(n^* - 1)}{2} \\ = \quad & (n^*)^2 - \frac{n^*(n^* - 1)}{2} \\ = \quad & \frac{(n^*)^2 + n^*}{2} \quad \text{(By (47))} \\ \geq \quad & y. \end{aligned}$$

但是同時, 我們也可以證明, 將 d_i^* 的上界值相加, 不會超過 $y + n^*$. 這由以下不等式驗證:

$$\begin{aligned} & n^* t^* - \frac{n^*(n^* - 1)}{2} - (n^* + y) \\ = \quad & \frac{(n^*)^2 + n^*}{2} - (n^* + y) \\ = \quad & \frac{(n^*)^2 - n^*}{2} - y \\ = \quad & \frac{n^*(n^* - 1)}{2} - y \\ \leq \quad & \frac{\sqrt{2y}(\sqrt{2y} - 1)}{2} - y \quad (n^* = [\sqrt{2y}]) \\ = \quad & y - \frac{\sqrt{2y}}{2} - y < 0. \end{aligned}$$

由於我們將所有 d_i^* 都先暫時設在上限值, 其中, 第一區 d_1^* 被設在 $t^*(= n^*)$. 但是由上述不等式我們得出, 就算將所有上限相加, 最多也只會超過 y 這個數達到 $n^* - 1$. 因此我們可以將超過 y 的部分由第一區上限值扣掉, 必可以得到一組滿足 γ^* 集合的最佳解。

定理 (參) 的另一種狀況是, 如果 $f(n^*) = \frac{y}{n^*} + \frac{n^*}{2} - \frac{1}{2} > n^*$, 則 $t^* = n^* + 1$. 在這種狀況下, 我們也證明了將上限值相加, 超過 y 的部分, 同樣最多只會有 $n^* - 1$. 首先, 根據 (47), $f(n^*) > n^*$ 這個條件可以

改寫爲 $(n^*)^2 + n^* < 2y$. 其次, 在這種情況下, 將上限值相加的上界爲:

$$\begin{aligned}
& n^* t^* - \frac{n^*(n^*-1)}{2} \\
= \quad & n^*(n^*+1) - \frac{n^*(n^*-1)}{2} \\
= \quad & n^*(n^*+1) - \frac{(n^*)^2 - n^*}{2} \\
= \quad & \frac{2(n^*)^2 + 2n^* - (n^*)^2 + n^*}{2} \\
= \quad & \frac{(n^*)^2 + 3n^*}{2} \\
= \quad & \frac{(n^*)^2 + n^* + 2n^*}{2} < y + n^*
\end{aligned}$$

而將上限值相加的下界爲:

$$\begin{aligned}
& n^*(n^*+1) - \frac{n^*(n^*-1)}{2} \\
= \quad & \frac{(n^*)^2 + 3n^*}{2} \\
\geq \quad & \frac{(\sqrt{2y}-1)^2 + 3(\sqrt{2y}-1)}{2} \\
= \quad & \frac{2y - 2\sqrt{2y} + 1 + 3\sqrt{2y} - 3}{2} \\
= \quad & \frac{2y + \sqrt{2y} - 2}{2} \\
\geq \quad & y + \frac{\sqrt{2y} - 2}{2} \\
\geq \quad & y \qquad\qquad \text{if } y \geq 2.
\end{aligned}$$

把上面討論總結, 我們可以得到下列的定理肆:

定理 (肆):

滿足

$$\gamma^* = \{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{n^*}^*) \in \mathbf{N}^{n^*} \mid d_1^* \leq t^*, d_2^* \leq t^* - 1, \cdots, d_{n^*}^* \leq t^* - n^* + 1, d_1^* + d_2^* + \cdots + d_{n^*}^* = y\}.$$

的其中一組最佳策略爲: $\bar{d}_2 = t^* - 1,\ \bar{d}_3 = t^* - 2,\ \cdots, \bar{d}_{n^*} = t^* - n^* + 1$ 且 $d_1^* = y - \sum_{i=2}^{n^*} \bar{d}_i$.

我們以 $y=49$ 及 $y=151$ 來做驗證:

1. $y=49$
   首先檢測 $[\sqrt{2y}]$ 和 $\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ 的關係爲何:

$$[\sqrt{2y}]=9<\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\doteqdot 9.4444$$

   可知當 $y=49$ 時, $t^*=n^*+1=[\sqrt{2y}]+1=10$, 則可得到:

$$10=\max\{1+(d_1-1);2+(d_2-1);3+(d_3-1);\cdots;9+(d_9-1)\}$$

$$\begin{array}{rcl}
10\geq & d_1^* & \geq\ 1\\
9\geq & d_2^* & \geq\ 1\\
8\geq & d_3^* & \geq\ 1\\
7\geq & d_4^* & \geq\ 1\\
6\geq & d_5^* & \geq\ 1\\
5\geq & d_6^* & \geq\ 1\\
4\geq & d_7^* & \geq\ 1\\
3\geq & d_8^* & \geq\ 1\\
2\geq & d_9^* & \geq\ 1
\end{array}$$

   可以得知滿足

$$\gamma^*=\{(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_9^*)\in\mathbf{N}^9|\ d_1^*\leq 10,d_2^*\leq 9,\cdots,d_9^*\leq 2,d_1^*+d_2^*+\cdots+d_9^*=49\}.$$

   的其中一組最佳策略爲: $\bar{d}_2=9,\ \bar{d}_3=8,\ \cdots,\bar{d}_9=2$ 且 $d_1^*=49-\sum_{i=2}^{10}\bar{d}_i=5.$

   得到當 $y=49$ 時, $(5,9,8,7,6,5,4,3,2)$爲其中一組最佳解

2. $y=151$

一樣先檢測 $[\sqrt{2y}]$ 和 $\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ 的關係爲何:

$$[\sqrt{2y}]=17>\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\fallingdotseq 16.8824$$

可知當 $y=151$ 時, $t^*=n^*=[\sqrt{2y}]=17$, 則可得:

$$17=\max\{1+(d_1-1);2+(d_2-1);3+(d_3-1);\cdots;16+(d_{16}-1);17\}$$

$$\begin{array}{rcrl}
17\geq & d_1^* & \geq & 1\\
16\geq & d_2^* & \geq & 1\\
15\geq & d_3^* & \geq & 1\\
14\geq & d_4^* & \geq & 1\\
13\geq & d_5^* & \geq & 1\\
12\geq & d_6^* & \geq & 1\\
11\geq & d_7^* & \geq & 1\\
10\geq & d_8^* & \geq & 1\\
9\geq & d_9^* & \geq & 1\\
8\geq & d_{10}^* & \geq & 1\\
7\geq & d_{11}^* & \geq & 1\\
6\geq & d_{12}^* & \geq & 1\\
5\geq & d_{13}^* & \geq & 1\\
4\geq & d_{14}^* & \geq & 1\\
3\geq & d_{15}^* & \geq & 1\\
2\geq & d_{16}^* & \geq & 1\\
 & d_{17}^* & = & 1
\end{array}$$

滿足

$$\gamma^*=\{(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_{17}^*)\in\mathbf{N}^{17}|\ d_1^*\leq 17,d_2^*\leq 16,\cdots,d_{17}^*\leq 1,d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{17}^*=151\}.$$

的其中一組最佳策略爲: $\bar{d}_2=16,\ \bar{d}_3=15,\ \cdots,\bar{d}_{17^*}=1$ 且 $d_1^*=y-\sum_{i=2}^{17}\bar{d}_i=15.$

得到當 $y=151$ 時, $(15,16,15,14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$ 爲其中一組最佳解

陸、研究結果與討論

一、在原問題中 (總樓層數 $y = 100$ 時), 我們所提出的策略, 最佳者爲符合 (三、) 巧解 google 原題 中的「將所有 n 和 t 帶入 $t \geq \frac{100}{n} + \frac{n-1}{2}; y \geq t \geq n$ 中, 皆可得到所有 t 中的最小值」之不等式所得到的所有丟法

二、從策略1的數據中可得到, 當 $y = 100$, 起始樓層 $d = 10$, 每次測試固定增加 10 層樓時, 此策略會產生最佳解: 最糟測試次數爲 19 次。並從此策略的分析證明中推導出此固定樓層策略之最糟情形的一般式爲 $\left[\frac{y}{d}\right] + d - 1$

討論 (一) 起始樓層的高低如何影響最糟次數?
如果起始樓層較高:
優點: 如果蛋的關鍵樓層較高, 第一顆蛋破掉之前的測試次數會比較少, 快速的縮小未知關鍵樓層的範圍
缺點: 如果第一顆蛋破掉之後, 第二顆蛋「一層一層往上丟」的次數也跟著增加, 風險較高
如果起始樓層較低:
優點: 第一顆蛋破掉之後, 第二顆蛋「一層一層往上丟」的次數減少, 是較保險的作法
缺點: 如果蛋的關鍵樓層較高, 第一顆蛋的測試次數會比較多

討論 (二) 爲何策略1中, 有些關鍵樓層的最糟測試次數相同?
當 $y = 100$, 用 $d = 10$ 的策略, 由公式可以得知, 最多需要 $10 + 10 - 1 = 19$ 次。此時, 第一顆蛋共測試 10 次, 確認 $91 \leq k^* \leq 100$, 再由 91 層往上逐層檢查到第 99 層。如果在第 99 層樓破了, 則確認 $k^* = 99$; 如果不破, 則得知 $k^* = 100$, 這次測試可以依破和不破兩種情形來推出關鍵樓層的位置, 因此當關鍵樓層於 99 或 100 時所需的測試次數一樣。

三、策略1分析證明統整

(定理壹) 當 y 爲完全平方數時, 會有三種情況:

- $d \mid y, d = \sqrt{y}$
- $d \nmid y, d = \sqrt{y} - j$, 使得 $\sqrt{y} - 1 \geq j$
- $d \nmid y, d = \sqrt{y} + j$, 使得 $\sqrt{y} + j \leq y$
  以上三種情況, 皆可讓 $\min\limits_{d|y} \left\{ \left[\frac{y}{d}\right] + d - 1 \right\}$ 達到最小值 $2\sqrt{y} - 1$

  y 爲完全平方數, 最佳之 d 值爲 $d^* = \sqrt{y}$ 且 $\max\limits_{1 \leq k^* \leq y} \gamma_{d^*}(k^*) = \min\limits_{1 \leq d \leq y} \left\{ \left[\frac{y}{d}\right] + d - 1 \right\} = 2\sqrt{y} - 1.$

(定理貳) 當 y 爲非完全平方數時, 會有三種情況:

case(i) $[\sqrt{y}]\left([\sqrt{y}] + 1\right) < y$, 再細分成兩種情形:

(1) $[\sqrt{y}] \mid y,\ \min\limits_{d|y} \left\{ \left[\frac{y}{d}\right] + d - 1 \right\} = 2\sqrt{y}$, 最小值發生在 $d = [\sqrt{y}] + 1$

(2) $[\sqrt{y}] \nmid y$, $\min\limits_{d|y} \left\{ \left[\frac{y}{d}\right] + d - 1 \right\} = 2\sqrt{y}$, 最小值發生在 $d = [\sqrt{y}]$ 或 $d = [\sqrt{y}] + 1$

case(ii) $\left[\sqrt{y}\right]\left([\sqrt{y}] + 1\right) > y$, $\min\limits_{1 \le d \le y} \left\{ \left[\frac{y}{d}\right] + d - 1 \right\} = 2[\sqrt{y}] - 1$, 最小值發生在 $d = [\sqrt{y}]$

case(iii) $\left[\sqrt{y}\right]\left([\sqrt{y}] + 1\right) = y$, $\min\limits_{1 \le d \le y} \left\{ \left[\frac{y}{d}\right] + d - 1 \right\} = 2[\sqrt{y}]$, 最小值發生在 $d = [\sqrt{y}]$ 和 $d = [\sqrt{y}] + 1$

y 爲非完全平方數, $\min\limits_{1 \le d \le y} \left\{ \left[\frac{y}{d}\right] + d - 1 \right\} = \begin{cases} 2\left[\sqrt{\mathrm{y}}\right], & \text{if } \left[\sqrt{\mathrm{y}}\right]\left(\left[\sqrt{\mathrm{y}}\right] + 1\right) \le \mathrm{y}; \\ 2\left[\sqrt{\mathrm{y}}\right] - 1, & \text{if } \left[\sqrt{\mathrm{y}}\right]\left(\left[\sqrt{\mathrm{y}}\right] + 1\right) > \mathrm{y}. \end{cases}$

討論 (三) 爲何定理壹和定理貳要分成十多個不同的情況來討論?
我們的想法是以 $\sqrt{y}$ 或 $[\sqrt{y}]$ 爲中心 , 向上加或向下減一個常數 (j, k, 1) 來做爲起始樓層 d 的分類, 並一一帶入公式中求取不等式, 得到一個 d 的範圍, 再去比較每個情況中不同的 d 的範圍, 即可得知特定情形中, 起始樓層爲何時會產生最佳的最糟測試次數。

四、巧解 google 原題 —— y=100 最佳策略統整

令 d_i 爲第一顆蛋經過前 $i-1$ 次測試都沒破, 接下來的第 i 次測試, 比第 $i-1$ 次測試之樓層往上增加的樓層數。$d_1 =$ 第一次測試之樓層高度。
新增一個變數 t, 令

$$t = \max\{1 + (d_1 - 1); 2 + (d_2 - 1); \cdots; n + (d_n - 1)\}$$

原題要求最好的 n^*, t^*, 以及 $(d_1, d_2, ..., d_n^*)$,
綜合

$$t \ge \frac{100}{n} + \frac{n-1}{2} \text{及} t - n + 1 \ge d_n \ge 1 \Rightarrow t - n \ge 0 \Rightarrow t \ge n$$

本題改爲求取所有 n, t 的組合, 滿足

$$t \ge \frac{100}{n} + \frac{n-1}{2}; y \ge t \ge n$$

並使 t 越小越好。在原題 (y=100) 中, 我們取其中的一組解 $n^* = t^* = 14$ 代入答案, 可以得到:
(14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 1, 1, 1, 1) 爲其中一組最佳解。

討論 (四) google 所提供的解答中是將策略 1「第一顆蛋每丟一次最糟測試次數必加一」的缺點改善, 那當 $y = 100$,起始樓層爲 14, 如果不破, 每次測試增加的樓層數從 13 開始遞減 1 時會是最佳解嗎?
在 (三、) 巧解 google 原題 —— y=100 最佳策略中, 我們得到只要滿足我們所提出的不等式, 即可得到最佳丟擲策略中, 第一顆蛋每次丟擲樓層位置範圍 (當 $y = 100$)。
而 google 提供的解答也符合我們的不等式, 但並不是唯一解。

五、一般狀況 (y 爲變數,n 和 t 的關係)

當 $n^* = [\sqrt{2y}]$, 會隨著 $\frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ 的函數圖形的位置高低不同分成兩種情形:

$$t^* = \begin{cases} [\sqrt{2y}], & \text{if } \frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \leq [\ \sqrt{2y}\ ]; \\ [\sqrt{2y}] + 1, & \text{if } \frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} > [\ \sqrt{2y}\ ]. \end{cases}$$

(定理參) 設 y 爲任意正整數, $y \geq 2$。今使用兩顆關鍵樓層均爲 k^* 之蛋, (要滿足$1 \leq k^* \leq y$) 去檢測 k^*, 「最佳的最糟情況策略」γ^* 所需的檢測次數 t^* 可以表示爲:

$$t^* = \max_{1\leq k^* \leq y} \gamma^*(k^*) = \min_{\gamma\in\Gamma} \left\{ \max_{1\leq k^*\leq y} \gamma(k^*) \right\} = \begin{cases} [\sqrt{2y}], & \text{if } f([\sqrt{2y}]) \leq [\ \sqrt{2y}\ ]; \\ [\sqrt{2y}] + 1, & \text{if } f([\sqrt{2y}]) > [\ \sqrt{2y}\ ], \end{cases}$$

函數 $f([\sqrt{2y}]) = f(n^*) = \frac{y}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$.

此最佳策略 γ^* 將 y 層樓區分爲 $n^* = [\ \sqrt{2y}\ ]$ 個區域去檢測。設第 i 個區域所需檢測的層樓數量爲 d_i^*, 則「所有」最佳策略 γ^* 可以用數對集合表示爲:

$$\gamma^* = \{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{n^*}^*) \in \mathbf{N}^{n^*} \mid d_1^* \leq t^*, d_2^* \leq t^*-1, \cdots, d_{n^*}^* \leq t^*-n^*+1, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^* = y\}.$$

(定理肆) 任意一個策略只要滿足

$$\gamma^* = \{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{n^*}^*) \in \mathbf{N}^{n^*} \mid d_1^* \leq t^*, d_2^* \leq t^*-1, \cdots, d_{n^*}^* \leq t^*-n^*+1, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^* = y\}.$$

即爲最佳解, 而其中一組最佳解爲:

$$\bar{d}_2 = t^* - 1,\ \bar{d}_3 = t^* - 2,\ \cdots, \bar{d}_{n^*} = t^* - n^* + 1$$

$$\text{且 } d_1^* = y - \sum_{i=2}^{n^*} \bar{d}_i.$$

討論 (五) 既然只要符合不等式就可以求出最佳解, 那會不會在一些特殊情形下, 該總樓層數只有一種最佳丟法符合不等式的範圍限制?

我們發現在某些特殊情下, 只要是 y 剛好等於某個公差爲 -1 的等差級數的和 (各項均爲正數時, 例如: 當 $y = 66, 78, 91, 105, 120$ 等), 就會發生這種情形 (只有一種丟法)。

而這些特殊的 y 帶入不等式後, 都會使 $d_i = \bar{d}_i, d_1 = \bar{d}_1$. 我們如果要變動這個丟法的任一項, 就必須將某一項加或減某個數, 那必定會超出不等式的範圍限制

柒、結論

本作品主要探討兩顆蛋總樓層數固定時的策略, 及所有總樓層數最佳丟法的不等式, 當 $y = 100$ 時所有策略的解皆在 (三、) 巧解 google 原題—— $y = 100$ 之最佳策略中解決了, 接下來可行的研究方向就朝向 3 顆或多顆蛋, 或像是會自動復原的蛋、丟擲時因樓層數的增加而改變蛋會破的機率等。

捌、參考資料

一、第8屆丘成桐數學獎花蓮女中參賽作品
蛋破魂飛——一個 Google 的雞蛋問題

二、楊重駿、楊照崑 (1982) ・不等式・台北市: 東華出版社

三、國中數學課本第二冊第五章——不等式

四、國中數學課本第四冊第一章——數列與等差級數

【評語】030414

作者討論傳說中的 google 面試問題。用兩顆蛋，測試從 n 層高的大樓中的一樓讓蛋下落，能讓蛋不摔破的最高樓層為哪一層的問題，針對此問題給出了完整的分析。這是一個有趣的問題，作者對一般化的 n 個樓層的問題給出了答案，數學研究的精神值得嘉許，並提出自己的新觀點。作品的結果是好的，全篇作品的觀點、報告中的行文方式、符號運用都非常成熟。但對於本文提出策略與原始引用論文的策略兩者之間的關係與正確性可以需要再多加闡釋與證明。前半部的說明似乎只是要反映思考整個問題的心路歷程，稍嫌繁瑣也不必要，可以適當的刪減。且如果能在延伸的部分有一些初步的結果會更好。

作品海報

摘　要

本作品對於2016年丘成桐中學數學獎作品〈蛋破魂飛一個Google的雞蛋問題〉，給出完整解答。該問題尋找「最佳的最糟情況策略」，也就是將最大值最小化(min-max)的最佳策略。我們從特例出發：每d層樓檢測一次著手，證明出兩個定理(定理壹、貳)來解答在這種特殊情況下「最佳的最糟情況策略」的完整公式解。再將這種固定d層樓檢測一次的策略放寬，求得一個巧解Google原題的方法。我們的解法具一般性，定理參解答任意總樓層的「最佳的最糟情況策略」(原題限制100層樓)，而且刻畫「所有」的「最佳的最糟情況策略」。定理肆中，我們構造出一種方法，可以在眾多最佳解中找到其中一組。本作品主要工具是高斯符號、算幾不等式、除法原理，佐以縝密分析手法，完全解答該問題。

$$\min_{k=1\sim 100}\left\{1+\max\left\{\underbrace{N_{k-1,1}}_{\text{如果破的話}},\underbrace{N_{100-k,2}}_{\text{如果沒破}}\right\}\right\}$$

花蓮女中同學作品中之遞迴式1↑

$$L_{e,n}=L_{e-1,n-1}+1+L_{e,n-1}$$

花蓮女中同學作品中之遞迴式2↑

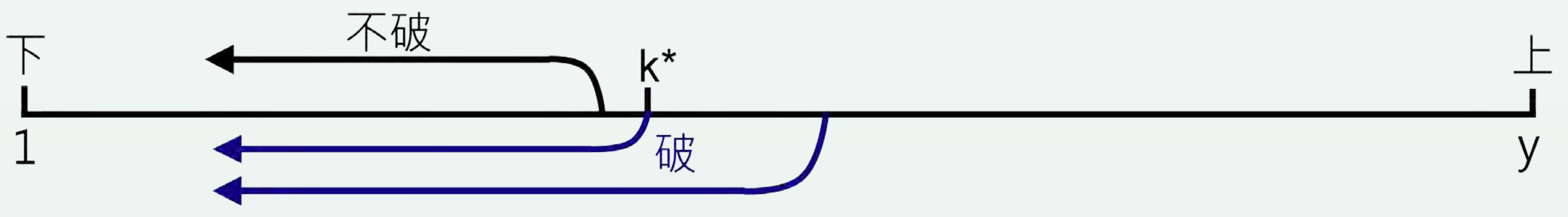
壹、研究動機

一年級的暑假作業是找一份科展作品進行報告。在找尋題目的過程，我們讀到了一份花蓮女中同學的作品〈蛋破魂飛——一個Google 的雞蛋問題〉。這題目原出處 Google 公司的面試題目：「如何最快的用兩顆條件相同的蛋，檢測出它在一棟100層的大樓中丟下去會破的樓層？」我們覺得這個題目很有趣，而Google公司所提供的解答是：(14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,1,1,1,1)，其最糟測試次數為14次，但是我們不明瞭為何那是「最佳策略」！ 花蓮女中同學的作品是以高中課程中的「遞迴數列」進行解題，然而其中有幾個建立遞迴關係的步驟我們覺得有疑問，且她們也沒有證明或求出遞迴式的一般式。我們認為可以用所學到的方法進行分析，因此決定以此為題來進行研究。

貳、問題介紹

網路上 Google 的問題與解答並沒有用精確的數學說明，使得該問題的題意相當模糊。
因此，有必要將原題以精確數學方式定義一次，以方便後續的數學分析工作。

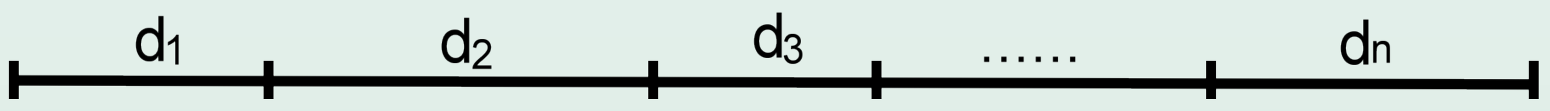
① 什麼是關鍵樓層 k^* ？



我們定義某一顆蛋的關鍵樓層為第 $k^*\in\mathbb{N}$ 層為：將該顆蛋從第 $n\geq k^*$ 層往下丟會被摔破，但從第 $n<k^*$ 層往下丟則不會破，也就是 k^*是該顆蛋會被摔破的最低樓層。

② 兩顆蛋如何去檢測關鍵樓層?

假設有兩顆關鍵樓層 k^*相同的蛋，已知 $1\leq k^*\leq y$，欲使用某種策略 γ 去「試摔」這兩顆蛋以找出未知的 k^* 值。
我們定義一個策略γ可以用一策略序對 $(n;\ d_1,d_2,d_3,\dots,d_n)$ 來表示，其中 n 是將總樓層數 y 切割成 n 個區塊，進行檢測，而每個區塊的長度分別是 $d_1,d_2,d_3,\dots,d_n$ ，且要符合 $d_1+d_2+\cdots+d_n=y$ 的條件。



$$\gamma=(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)\mid d_1+d_2+\cdots d_n=y,d_i\in\mathbf{N}$$

第一顆蛋從 d_1 層樓往下丟，如果破了，代表關鍵樓層 k^* 位在1到 d_1 之間，因為只剩一顆蛋，所以必須逐層檢測1到d_1-1層樓。如果沒破，再往上增加 d_2 層樓，在 d_1+d_2 層樓再測試一次。如果破了，代表關鍵樓層 k^* 位在d_1+1到 d_2 之間，因為只剩一顆蛋，所以必須逐層檢測 d_1+1 到 d_2 −1 層樓。如果沒破，再往上增加 d_3 層樓進行測試，以此類推到 d_n 這個區間。
此題目即是如何「將最大值最小化」，找出最佳的檢測策略的最大測試次數，讓最大測試次數達到最小值。
由於任何一種策略所需的測試次數會隨著 k^*所在位置不同而變化。
令 $\gamma(k^*)$ 為策略 γ 找出關鍵樓層為 k^*的所需的「試摔」(測試)次數， γ^*為「最佳的最糟情況策略」，
Γ 是任意檢測策略 γ 所形成之集合；而最佳策略γ^* 要滿足右方的式子：
本題希望找出滿足條件的最好策略序對$(n;\ d_1,d_2,d_3,\dots,d_n)$，
使該策略的最糟測試次數能夠是其他所有策略的最糟測試次數中的最小值。

$$\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma^*(k^*)=\min_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma(k^*)\right\}$$

參、研究目的

1. 以不同的策略檢測兩顆蛋在100層的大樓中丟下去會破樓層的測試次數，並比較其優、缺點。
2. 分析上述不同策略的一般式，並進行數學求解。
3. 比較不同解之間的最佳策略，並以數學證明此策略優於他者。
4. 將原本的問題延伸成「蛋數相同，改變總樓層數」，並以數學方法找出最佳的策略。

肆、研究過程及方法

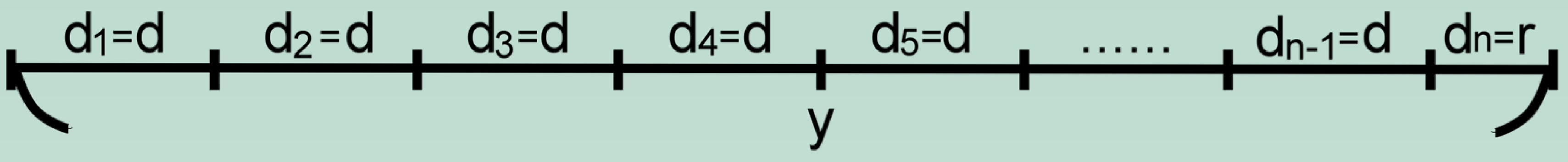
1. 要比較各個策略的好壞，必須求出每個策略中最糟的次數來做比較，才能保證此策略優於他者。
2. 每個策略依不同狀況分類進行研究分析，並在分析證明中找出不同狀況的最糟測試次數範圍，得到每種狀況的最佳解範圍。

型態為策略1的「最佳的最糟情況策略」γ_{d^*} 之分析證明

策略 1 當中，令序對 $(n,\ d_1,\ d_2,\dots,d_n)$ 中的 $d_1 d_2,\dots,d_n$ 相等，丟擲的情況可以用下圖來表示

$$\underbrace{\text{破}}_{d};\ \underbrace{\text{不破—破}}_{2d};\ \underbrace{\text{不破—不破—破}}_{3d};\ \cdots;\ \underbrace{\text{不破—不破}\cdots\text{—不破—破}}_{qd};\ \underbrace{\text{不破—不破—}\cdots\text{—不破}}_{qd}\ \underbrace{\text{—破}}_{r}$$

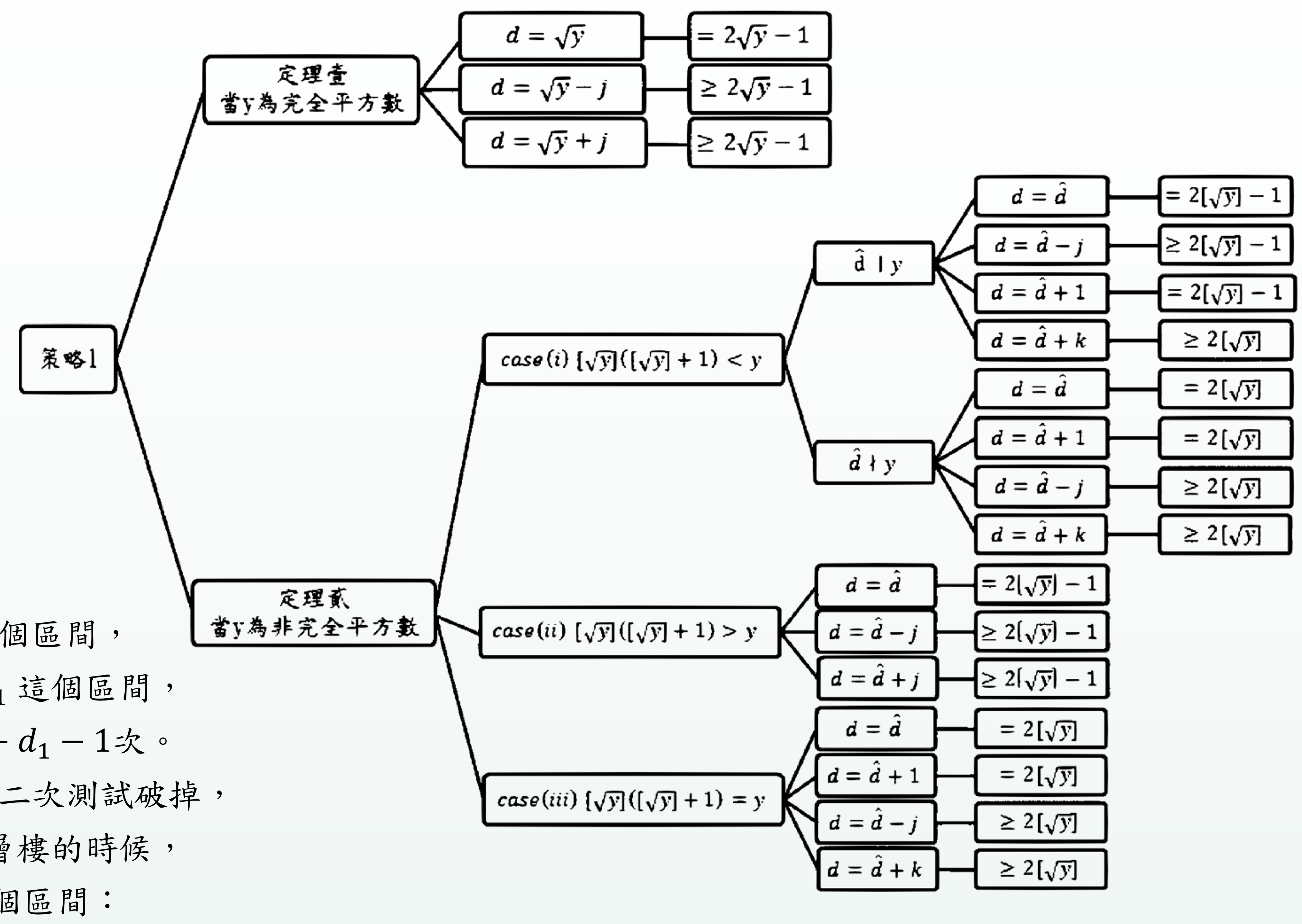
此時，令 $y=qd+r, n-1=q=\left[\frac{y}{d}\right], d_n=r$ ：



我們將此策略的最糟測試次數以下列式子來表示：

$$\begin{aligned}\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma_d(k^*)&=\max\left\{\max_{1\leq k^*\leq d}\gamma_d(k^*)\,;\max_{d+1\leq k^*\leq 2d}\gamma_d(k^*)\,;\cdots;\max_{(q-1)d+1\leq k^*\leq qd}\gamma_d(k^*)\,;\max_{qd+1\leq k^*\leq qd+r}\gamma_d(k^*)\right\}\\&=\max\left\{\underbrace{1+(d-1)}_{<q+(d-1)};\underbrace{2+(d-1)}_{<q+(d-1)};\underbrace{3+(d-1)}_{<q+(d-1)};\cdots;q+(d-1);\underbrace{q+(r-1)}_{<q+(d-1)}\right\}\\&=q+d-1\\&=\left[\frac{y}{d}\right]+d-1(\text{[ ]代表高斯符號})\end{aligned}$$

下圖是我們將不同的 d 代入式子中，所得到的最糟測試次數範圍，而我們必須先求出 $\left[\frac{y}{d}\right]$ 的範圍(或值，即是估商 $\hat{q}$)，才能估出 $\left[\frac{y}{d}\right]+d-1$ 的下界。
其中定理貳的分類法，是為了方便估商(求 $\left[\frac{y}{d}\right]$ 的範圍)，如此才有辦法算出答案，在此令 $\hat{d}=[\sqrt{y}]$ 。
另外在定理貳的case(i)中，又分為 $\hat{d}\mid y$ 和 $\hat{d}\nmid y$ 兩種，這是因為在 $\hat{d}\mid y$ 和 $\hat{d}\nmid y$ 中，$d=\hat{d}$ 時的商不一樣。



我們可以得到定理壹和貳的結果：

定理壹——當 y 為完全平方數時

$$\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma_{d^*}(k^*)=\min_{1\leq d\leq y}\left\{\left[\frac{y}{d}\right]+d-1\right\}=2\sqrt{y}-1.$$

定理貳——當 y 為非完全平方數時

$$\min_{1\leq d\leq y}\left\{\left[\frac{y}{d}\right]+d-1\right\}=\begin{cases}2\left[\sqrt{y}\right], & \text{if } \left[\sqrt{y}\right]\left(\left[\sqrt{y}\right]+1\right)\leq y;\\ 2\left[\sqrt{y}\right]-1, & \text{if } \left[\sqrt{y}\right]\left(\left[\sqrt{y}\right]+1\right)>y.\end{cases}$$

巧解 Google原題之一般狀況

前面的討論是限制每次測試增加固定樓層數 d 。
接下來將討論將此限制取消，進而考慮以下的一般狀況：
回到檢測策略 γ ，要求取一個檢測策略 γ 的最糟測試次數，
我們必須將它拆成幾個部分來看：如果關鍵樓層 k^* 位在 d_1 這個區間，
則第一顆蛋第一次測試一定會破，之後用第二顆蛋逐層檢測 d_1 這個區間，
當 k^* 位在 d_1-1 層樓的時候，所需的測試次數會達到最大值 $1+d_1-1$ 次。
同理，如果關鍵樓層 k^* 位在 d_2 這個區間，則第一顆蛋會在第二次測試破掉，
之後用第二顆蛋逐層檢測 d_2 這個區間，當 k^* 位在 d_1+d_2-1 層樓的時候，
所需的測試次數會達到最大值 $2+d_2-1$ 次。以此類推到 d_n 這個區間：
當 k^* 位於 d_n 這個區間時，最糟測試次數為 $n+d_n-1$ 次。這些最糟測試次數中的最大值，就會是這種策略 γ 中，
關鍵樓層 k^* 在1~y 之間變化所產生的最糟測試次數，因此我們可以列出下列式子：

$$\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma(k^*)=\max\left\{\max_{1\leq k^*\leq d_1}\gamma(k^*),\max_{d_1+1\leq k^*\leq d_1+d_2}\gamma(k^*),\ldots,\max_{d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}+1\leq k^*\leq y}\gamma(k^*)\right\}$$
$$=\max\left\{1+(d_1-1);2+(d_2-1);\cdots;n+(d_n-1)\right\}$$

接著新令一變數 $t=\max\left\{1+(d_1-1);2+(d_2-1);\cdots;n+(d_n-1)\right\}$，
則原題變成右側的不等式：

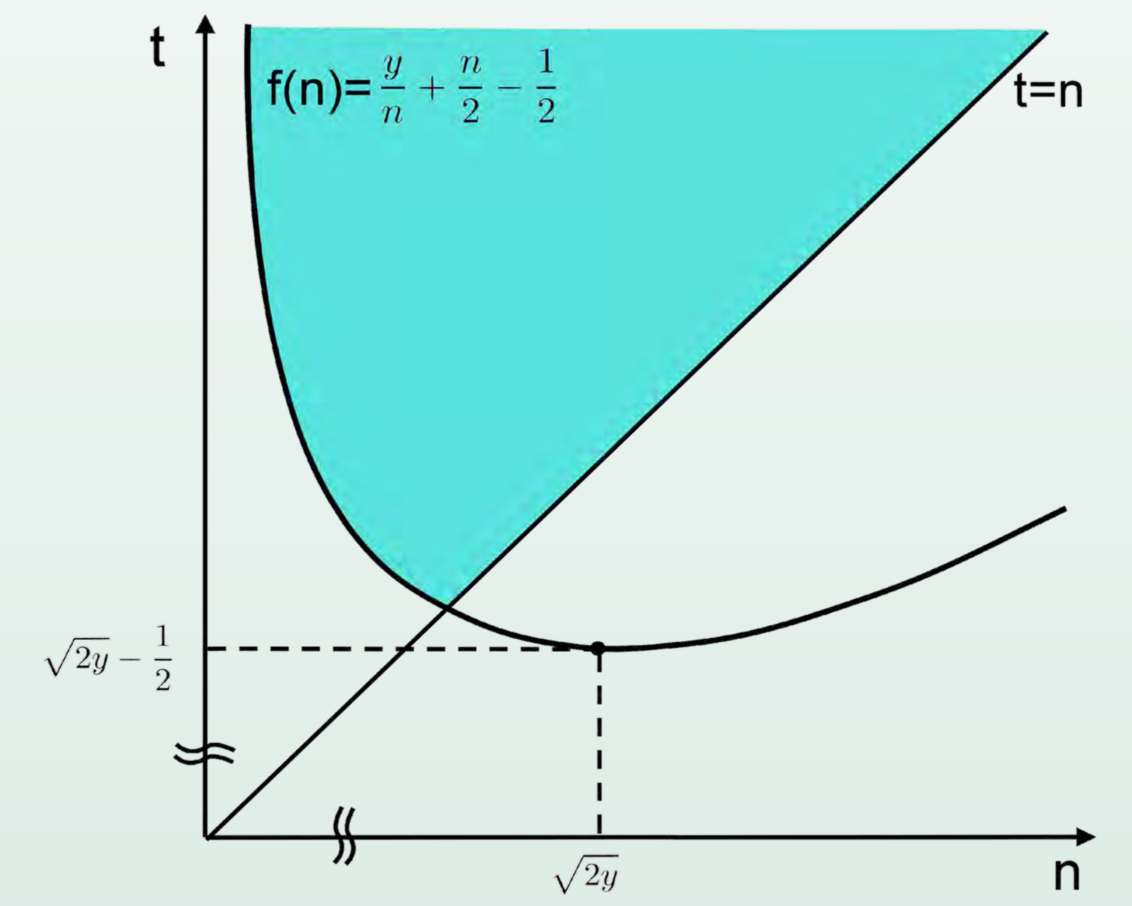
$$\begin{aligned}\min\quad & t\\ s.t\quad & t\ \geq d_1\\ & t\ \geq d_2+1\\ & t\ \geq d_3+2\\ & \vdots\\ & t\ \geq d_n+(n-1)\end{aligned}\,,\quad d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n=y\,,\quad y\geq t\geq 1$$

將數個不等式相加得到：

$$\begin{aligned}nt &\geq (d_1+d_2+\cdots d_n)+(1+2+\cdots+(n-1))=y+\frac{n(n-1)}{2}\\ t &\geq \frac{y}{n}+\frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

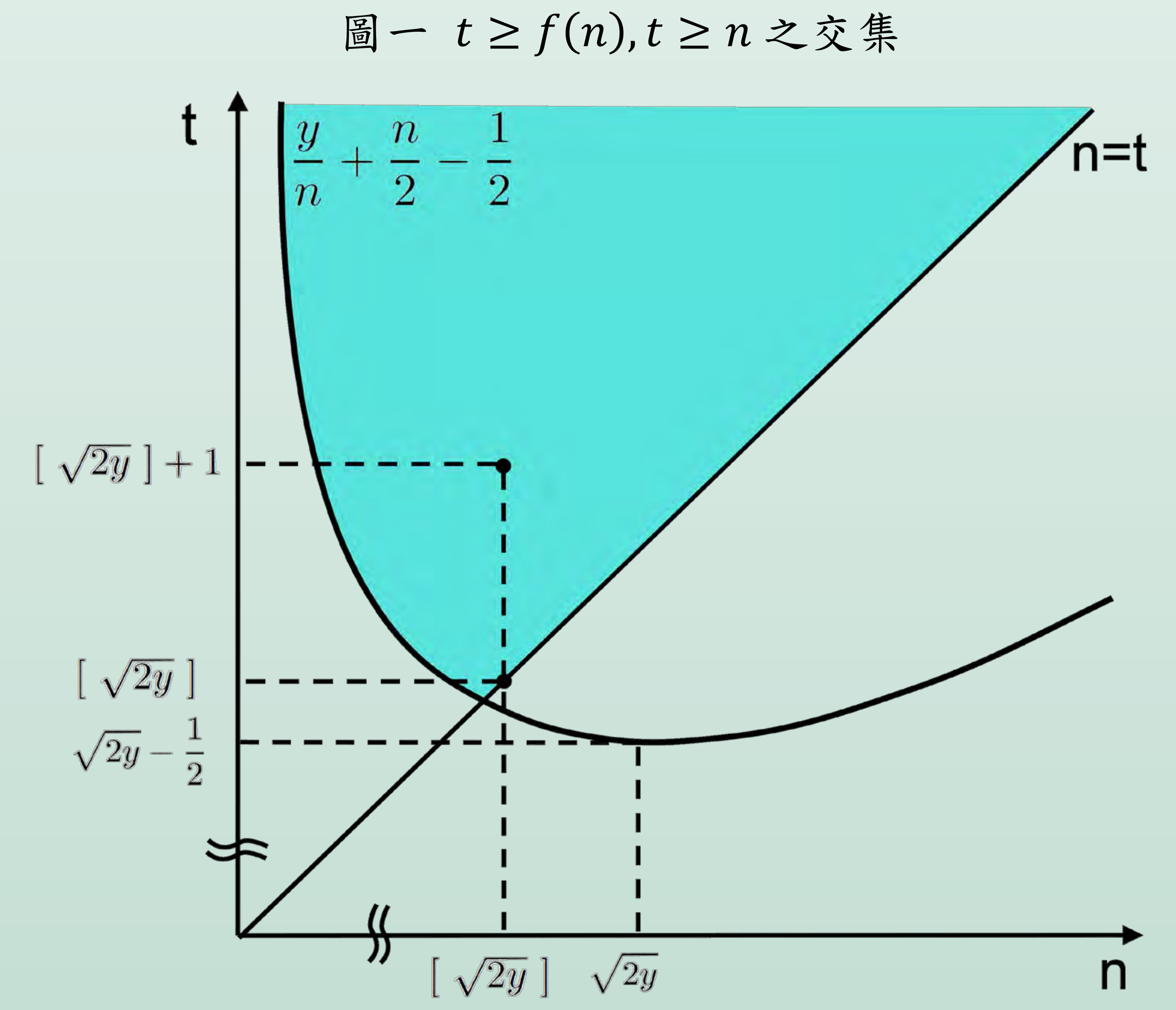
並得到 $\Longrightarrow\ t\ \geq\ \frac{y}{n}+\frac{n-1}{2}=\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{\frac{y}{2}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2y}-\frac{1}{2}$

我們令 $\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}=f(n)$，並將 $f(n)$ 畫在一橫軸為 n 、縱軸為 t 的直角坐標平面系上。
因為 $f''(n)=\frac{2y}{n^3}>0$ ，所以 $f(n)$ 為一凸函數，最低點發生在當 $\frac{y}{n}=\frac{n}{2}, n=\sqrt{2y}$ ，
其座標為 $\left(\sqrt{2y},\sqrt{2y}-\frac{1}{2}\right)$ ，而 $t\geq f(n)$ 可以用 $t=f(n)$ 上方的區域表示。
從 $t\geq d_n+(n-1), d_n\in\mathbf{N}$ 得到 $t-n+1\geq d_n\geq 1\Rightarrow t-n\geq 0\Rightarrow t\geq n$ ，
$t\geq n$ 可以用 $t=n$ 上方的區域表示。
$t\geq f(n), t\geq n$ 會交集出一藍色區域，如圖一所示



圖一 $t\geq f(n), t\geq n$ 之交集

因為 $f(n)$ 最低點 $(\sqrt{2y},\sqrt{2y}-\frac{1}{2})$ 的 y 座標 $<x$ 座標，所以 $f(n)$ 的最低點會在 $t=n$ 的下方。
而 $f(n)$ 最低點的左側會和 $t=n$ 交於一點，而 $f'(n)=-\frac{y}{n^2}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ ，其斜率 $<\frac{1}{2}$ ，
$t=n$ 的斜率 $=1$ ，所以 $f(n)$ 穿過 $t=n$ 後就不會再和 $t=n$ 有任何交點。
依照 $f(n)$ 穿過 $t=n$ 的位置分成兩種情形：

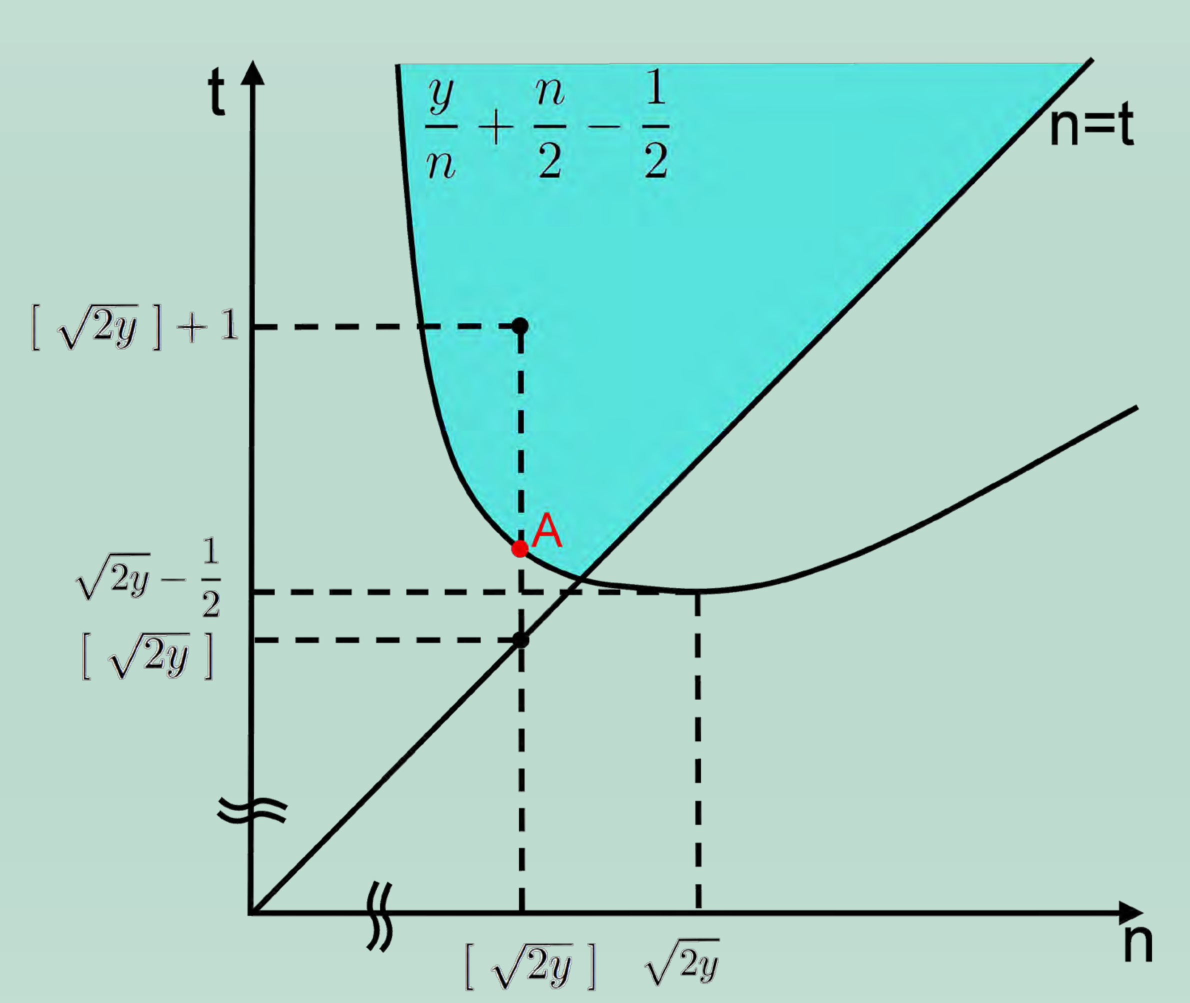


圖二 $\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\leq[\sqrt{2y}]$

- 第一種情形，$f(n)$ 從 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}])$ 的左下方穿過，如圖二所示。藍色區域中的最低整數格子點要比 $f(n)$ 的最低點 $(\sqrt{2y},\sqrt{2y}-\frac{1}{2})$ 來的高，而比 $\sqrt{2y}-\frac{1}{2}$ 大的最小整數是 $[\sqrt{2y}]$ 可知藍色區域中最低的整數格子點皆需 $\geq[\sqrt{2y}]$ ，而 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}])$ 即位在藍色區域中，此點的 y 座標正好是下界 $[\sqrt{2y}]$ ，可以知道 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}])$ 為藍色區域中最低的整數格子點。
- 第二種情形，$f(n)$ 從 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}])$ 的右上方穿過，如圖三所示。藍色區域中最低的整數格子點要比 $[\sqrt{2y}]$ 來的高，而比 $[\sqrt{2y}]$ 大的最小整數為 $[\sqrt{2y}]+1$ ，可知藍色區域中最低的整數格子點皆需 $\geq[\sqrt{2y}]+1$ 。由於我們證明了 $f(n)$ 在 $n=[\sqrt{2y}]$ 這個點的高度比 $[\sqrt{2y}]+1$ 還要低，所以 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}]+1)$ 會位在藍色區域中，此點的 y 座標正好是下界 $[\sqrt{2y}]+1$ ，可以知道 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}]+1)$ 為藍色區域中最低的整數格子點。

證明：A點在 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}])$ 和 $([\sqrt{2y}],[\sqrt{2y}]+1)$ 之間：

$$([\sqrt{2y}]+1)-f([\sqrt{2y}])=([\sqrt{2y}]+1)-\left(\frac{y}{[\sqrt{2y}]}+\frac{[\sqrt{2y}]}{2}-\frac{1}{2}\right)\geq\frac{\sqrt{2y}-2}{2[\sqrt{2y}]}\geq 0\,,if\ y\geq 2$$



圖三 $\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}>[\sqrt{2y}]$

定理參

設 y 為正整數，且 $y\geq 2$。今使用兩顆關鍵樓層均為 k^* 之蛋，$1\leq k^*\leq y$，去檢測 k^*,「最佳的最糟情況策略」γ^* 所需的檢測次數 t^* 可以表示為：

$$t^*=\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma^*(k^*)=\min_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_{1\leq k^*\leq y}\gamma(k^*)\right\}=\begin{cases}[\sqrt{2y}], & \text{if}\quad f([\sqrt{2y}])\leq[\sqrt{2y}]\\ [\sqrt{2y}]+1, & \text{if}\quad f([\sqrt{2y}])>[\sqrt{2y}]\end{cases}$$

其中，函數 $f(n)=\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$. 此最佳策略 γ^* 將 y 層樓區分為 $n^*=[\sqrt{2y}]$ 個區域去檢測。設第 i 個區域所需檢測的層樓數量為 d_i^*,
則「所有」最佳策略 γ^* 可以用數對集合表示為：$\gamma^*=\{(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_{n^*}^*)\in\mathbf{N}^{n^*}\mid d_1^*\leq t^*, d_2^*\leq t^*-1,\cdots,d_{n^*}^*\leq t^*-n^*+1, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^*=y\}.$

我們要從 $\gamma^* = \{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{n^*}^*) \in \mathbf{N}^{n^*} \mid d_1^* \le t^*, d_2^* \le t^*-1, \cdots, d_{n^*}^* \le t^*-n^*+1, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^* = y\}.$

中構造出其中的一組最佳解。

首先令 $t^* = \widehat{d_1}$

$t^*-1 = \widehat{d_2}$

$\vdots$

$t^*-n^*+1 = \widehat{d_n}$

將每個不等式的最大值相加後得到：$\widehat{d_1}+\widehat{d_2}+\ldots+\widehat{d_n}$

我們證明了：

不管 $f(n^*) = \frac{y}{n^*}+\frac{n^*}{2}-\frac{1}{2} \le n^*$ 還是 $f(n^*) = \frac{y}{n^*}+\frac{n^*}{2}-\frac{1}{2} > n^*$ 兩種情況，

將這些上界相加後的值： $y \le \widehat{d_1}+\widehat{d_2}+\ldots+\widehat{d_n} \le y+n^*-1$，

也就是這些最大值相加之後不會超過 $y+n^*$

如果 $\widehat{d_1}+\widehat{d_2}+\ldots+\widehat{d_n} = y$，則滿足 $d_1+d_2+\cdots+d_n = y$ 的限制，

此時這些最大值就是唯一的一組最佳解。

如果 $\widehat{d_1}+\widehat{d_2}+\ldots+\widehat{d_n} > y$，則令 $\overline{d_2} = \widehat{d_2}$, $\overline{d_3} = \widehat{d_3}, \cdots$, $\overline{d_n} = \widehat{d_n}$,

$\overline{d_1} = y-\widehat{d_2}-\widehat{d_3}-\cdots-\widehat{d_n}$

利用 $\widehat{d_1}+\widehat{d_2}+\ldots+\widehat{d_n} \le y+n^*-1$ 可以證明 $\overline{d_1}$ 會落在 1 和 t^* 之間，

滿足第一個不等式的限制，因此 $\overline{d_1}, \overline{d_2}, \ldots, \overline{d_n}$ 就會是這個解集合中

其中的一組最佳解。

實例：原題 $y = 100$ 之最佳丟法

首先確認 $[\sqrt{2y}] = 14 > \frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2} \fallingdotseq 13.6429$

當 $y = 100$ 時 $t^* = n^* = [\sqrt{2y}] = 14$ ，則：

$$14 = \max\{1+(d_1-1); 2+(d_2-1); \ldots; 14+(d_{14}-1)\}$$

$$\begin{aligned} 14 \ge d_{1^*} &\ge 1 \\ 13 \ge d_{2^*} &\ge 1 \\ 12 \ge d_{3^*} &\ge 1 \\ 11 \ge d_{4^*} &\ge 1 \\ &\vdots \\ 3 \ge d_{12^*} &\ge 1 \\ 2 \ge d_{13^*} &\ge 1 \\ d_{14^*} &= 1 \end{aligned}$$

可知滿足

$\Upsilon^* = \{(d_1^*, d_2^*, \ldots d_{14}^*,) \in N^{14} | d_1^* \le 14, d_2^* \le 13, \ldots, d_{14}^* = 1, d_1^*+d_2^* \ldots + d_{14}^* = 100\}$

的其中一組最佳策略為：$\overline{d_2} = 13, \overline{d_3} = 12, \ldots, \overline{d_{14}} = 1$ ，

且 $\overline{d_1} = y-\sum_{i=2}^{14}\overline{d_i} = 9$

當 $y = 100$ 時，

$(9,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$ 為其中一組最佳解。

定理肆——滿足 $\gamma^* = \{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{n^*}^*) \in \mathbf{N}^{n^*} \mid d_1^* \le t^*, d_2^* \le t^*-1, \cdots, d_{n^*}^* \le t^*-n^*+1, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^* = y\}.$

的其中一組最佳策略為： $\overline{d_2} = t^*-1, \overline{d_3} = t^*-2, \ldots, \overline{d_n^*} = t^*-n^*+1$ 且 $d_1^* = y-\sum_{i=2}^{n^*}\overline{d_i}$

伍、研究結果與討論

一、在原問題中(總樓層數 $y = 100$ 時)，最佳者為符合巧解Google原題中的「將所有 n 和 t 帶入 $t \ge \frac{100}{n}+\frac{n-1}{2}; y \ge t \ge n$ 中，皆可得到所有 t 中的最小值」之不等式所得到的所有丟法。

二、從策略1可得到，當 $y = 100$，起始樓層 $d = 10$，每次測試固定增加10層樓時，會產生最佳解：最糟測試次數為 19 次。並從此策略的分析證明中推導出此固定樓層策略之最糟情形的一般式為 $\left[\frac{y}{d}\right]+d-1$.

三、策略1分析證明統整

定理壹——當 y 為完全平方數時，會有三種情況：

$d = \sqrt{y}$

$d = \sqrt{y}-j$，使得 $\sqrt{y}-1 \ge j$

$d = \sqrt{y}+j$，使得 $\sqrt{y}+j \le y$

以上三種情況，皆可讓 $\min_{d|y}\{[\frac{y}{d}]+d-1\}$ 達到最小值 $2\sqrt{y}-1$

y 為完全平方數，最佳之 d 值為 $d^* = \sqrt{y}$ 且 $\max_{1\le k^*\le y}\gamma_{d^*}(k^*) = \min_{1\le d\le y}\{[\frac{y}{d}]+d-1\} = 2\sqrt{y}-1.$

定理貳——當 y 為非完全平方數時，會有三種情況：

case(i) $[\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1) < y$ ，再細分成兩種情形：

(1) $[\sqrt{y}] \mid y$, $\min_{d|y}\{[\frac{y}{d}]+d-1\} = 2[\sqrt{y}]$ ，最小值發生在 $d = [\sqrt{y}]+1$

(2) $[\sqrt{y}] \nmid y$, $\min_{d|y}\{[\frac{y}{d}]+d-1\} = 2[\sqrt{y}]$ ，最小值發生在 $d = [\sqrt{y}]$ 或 $d = [\sqrt{y}]+1$

case(ii) $[\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1) > y$，$\min_{1\le d\le y}\{[\frac{y}{d}]+d-1\} = 2[\sqrt{y}]-1$，最小值發生在 $d = [\sqrt{y}]$

case(iii) $[\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1) = y$，$\min_{1\le d\le y}\{[\frac{y}{d}]+d-1\} = 2[\sqrt{y}]$，最小值發生在 $d = [\sqrt{y}]$ 和 $d = [\sqrt{y}]+1$

y 為非完全平方數， $\min_{1\le d\le y}\{[\frac{y}{d}]+d-1\} = \begin{cases} 2[\sqrt{y}], & \text{if } [\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1) \le y; \\ 2[\sqrt{y}]-1, & \text{if } [\sqrt{y}]([\sqrt{y}]+1) > y. \end{cases}$

討論(一)為何定理壹和定理貳要分成十多個不同的情況來討論？

我們以 $\sqrt{y}$ 或 $[\sqrt{y}]$ 為中心，向上加或向下減一個常數 $(j, k, 1)$ 來做為起始樓層 d 的分類，一一帶入公式中求取不等式，得到一個 d 的範圍，再比較每個情況中不同的 d 的範圍，即可得知特定情形中，起始樓層為何時會產生最佳的最糟測試次數。

四、巧解 Google 原題— $y = 100$ 最佳策略統整

新增一個變數 t，令 $t = \max\{1+(d_1-1); 2+(d_2-1); \cdots; n+(d_n-1)\}$，原題要求最好的 n^*, t^*，以及 $(d_1, d_2, \ldots, d_n^*)$，綜合 $t \ge \frac{100}{n}+\frac{n-1}{2}$ $t-n+1 \ge d_n \ge 1 \Rightarrow t-n \ge 0 \Rightarrow t \ge n$，本題即是求取所有 n, t 的組合，滿足 $t \ge \frac{100}{n}+\frac{n-1}{2}; y \ge t \ge n$，使 t 越小越好。在原題 $(y = 100)$ 中，只有當 $n^* = t^* = 14$ 時，可以確定 $d_{14}^* = 1$，所以將 $n^* = t^* = 14$ 這組代入答案。可以得到：$(14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,1,1,1,1)$ 為其中一組最佳解。

五、一般狀況(y為變數，n和t的關係)

當 $n^* = [\sqrt{2y}]$ ，會隨著 $\frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ 的函數圖形的位置高低分成兩種情形： $t^* = \begin{cases} [\sqrt{2y}], & \text{if } \frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2} \le [\sqrt{2y}] \\ [\sqrt{2y}]+1, & \text{if } \frac{y}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2} > [\sqrt{2y}] \end{cases}$

定理參——設 y 為正整數，且 $y \ge 2$，「最佳的最糟情況策略」γ^* 所需的檢測次數 t^* 可以表示為：

$$t^* = \max_{1\le k^*\le y}\gamma^*(k^*) = \min_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_{1\le k^*\le y}\gamma(k^*)\right\} = \begin{cases} [\sqrt{2y}], & \text{if } f([\sqrt{2y}]) \le [\sqrt{2y}] \\ [\sqrt{2y}]+1, & \text{if } f([\sqrt{2y}]) > [\sqrt{2y}] \end{cases}$$

「所有」最佳策略 γ^* 可用數對集合表示為：$\gamma^* = \{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{n^*}^*) \in \mathbf{N}^{n^*} \mid d_1^* \le t^*, d_2^* \le t^*-1, \cdots, d_{n^*}^* \le t^*-n^*+1, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^* = y\}.$

定理肆——滿足 $\gamma^* = \{(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_{n^*}^*) \in \mathbf{N}^{n^*} \mid d_1^* \le t^*, d_2^* \le t^*-1, \cdots, d_{n^*}^* \le t^*-n^*+1, d_1^*+d_2^*+\cdots+d_{n^*}^* = y\}.$ 的其中一組最佳策略為：

$\overline{d_2} = t^*-1, \overline{d_3} = t^*-2, \ldots, \overline{d_n^*} = t^*-n^*+1$ 且 $d_1^* = y-\sum_{i=2}^{n^*}\overline{d_i}$

討論(二)既然只要符合不等式就可求出最佳解，是否在一些特殊情形下，該總樓層數只有一種最佳丟法符合不等式的範圍限制？

我們發現在某些特殊情下，只要 y 剛好等於某個公差為 -1 的等差級數的和(各項均為正數時, 例如：當 $y = 66, 78, 91, 105, 120$ 等)，就會發生這種情形(只有一種丟法)。而這些特殊的 y 帶入不等式後，都會使 $d_i = \overline{d_i}, d_1 = \overline{d_1}$。我們如果要變動這個丟法的任一項，就必須將某一項加或減某個數，那必定會超出不等式的範圍限制。

陸、結論

本作品主要探討兩顆蛋總樓層數固定時的策略，及所有總樓層數最佳丟法的不等式，當 y=100 時所有策略的解皆在巧解google原題—— y=100 之最佳策略中解決了，接下來可行的研究方向就朝向 3 顆或多顆蛋，或像是會自動復原的蛋、丟擲時因樓層數的增加而改變蛋會破的機率等。

柒、參考文獻

一、第8屆丘成桐數學獎花蓮女中參賽作品《蛋破魂飛——一個 Google 的雞蛋問題》

二、《不等式》，楊重駿、楊照崑(1982)，東華出版社