

中華民國第 57 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

第三名

030413

Sejfried 定理在四邊形的推廣

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者： 國二 沈執中 國二 陳彥睿	指導老師： 蕭偉智
---------------------------------	------------------

關鍵詞：交比、圓射影到圓、不變量

摘要

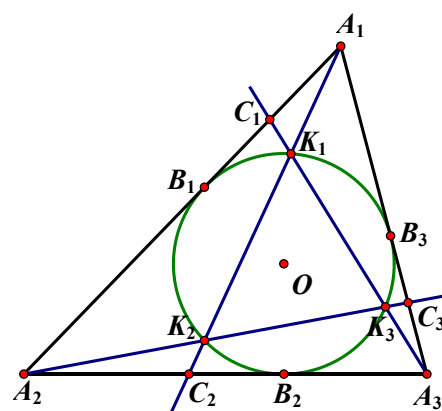
本研究源自 Sejfried 與 Shelomovskii 於 2012 年提出的三角形與其內切圓的 Sejfried 定理。我們構造射影模型，從高觀點將 Sejfried 定理推廣至任意圓外切四邊形，研究結果獲得原作者的肯定！本研究發現為：(1) 四邊形基礎 Sejfriedian 構圖之存在唯一性；(2) 四邊形的 Sejfried 定理及其直觀圖形意義；(3) 四邊形基礎 Sejfriedian 構圖中的八線共點性；(4) 正多邊形的 Sejfried 定理及收斂性；(5) 我們進一步以交比為參數，推廣出正則四邊形的 Sejfried 二次曲線族，發現該二次曲線族的兩個焦點與內切圓圓心、對角線交點，四點恆為「調和點列」。

壹、前言

一、研究動機

2012 年，Sejfried 與 Shelomovskii 在 ATCM 研討會上發表關於三角形與其內切圓的幾何定理，稱作 Sejfried 定理[1]。

如圖 1-1-1，給定任意 $\Delta A_1A_2A_3$ 及其內切圓 O ，分別自 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三個頂點各作一條射線 $\overrightarrow{A_1C_2}$ 、 $\overrightarrow{A_2C_3}$ 、 $\overrightarrow{A_3C_1}$ ，且此三條射線彼此的交點都落在內切圓上，此時三邊上的四點（兩個頂點、一個切點、一個分割點）的交比與「黃金比例」有關，也就是 $(A_1, B_1; C_1, A_2) = (A_2, B_2; C_2, A_3) = (A_3, B_3; C_3, A_1) = 1 - \phi$ ($\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$)，這個定理被稱作



▲圖 1-1-1

「Sejfried 定理」。Sejfried 定理引起了我們濃厚的興趣而搜

尋及閱讀原始的論文，並且嘗試將 Sejfried 定理推廣到四邊形、五邊形等多邊形。

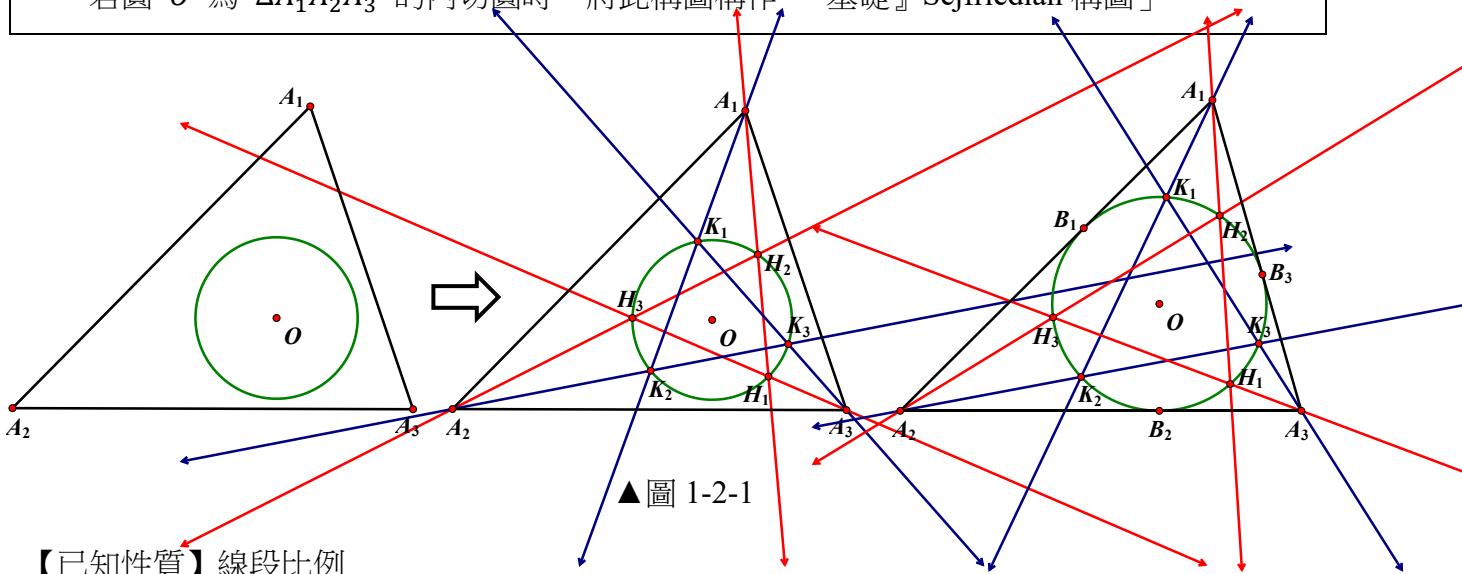
二、文獻探討（原始問題）

Michael Sejfried 和 Vladimir Shelomovskii 在 2012 年 ATCM (Asian Technology Conference in Mathematics) 國際學術研討會提出關於三角形及圓構成一系列的性質，並將研究成果命名為 Sejfried 定理[1][2]，其給定條件如下：

【構造作圖】

如圖 1-2-1，平面上給定任意三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 與圓 O ，分別過三頂點 A_1, A_2, A_3 作六條直線 $L_1, M_1, L_2, M_2, L_3, M_3$ ，令 $L_1 \cap L_2 = K_2$ 、 $L_2 \cap L_3 = K_3$ 、 $L_3 \cap L_1 = K_1$ 、 $M_1 \cap M_2 = H_2$ 、 $M_2 \cap M_3 = H_3$ 、 $M_3 \cap M_1 = H_1$ ，此六個交點共圓 O 。此時，滿足以上條件的構圖稱作「Sejfriedian 構圖」，另外 $\Delta K_1K_2K_3$ 與 $\Delta H_1H_2H_3$ 稱作一組「Sejfried 三角形」，圓 O 稱作「Sejfried 圓」。

若圓 O 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的內切圓時，將此構圖稱作「『基礎』 Sejfriedian 構圖」。



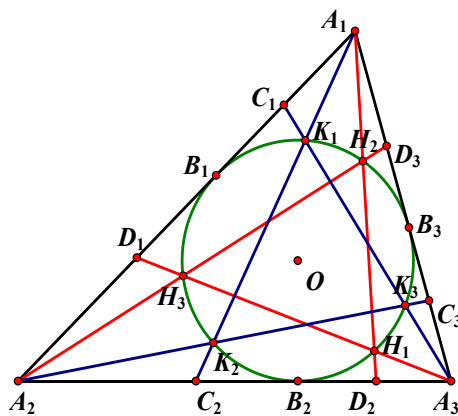
▲圖 1-2-1

【已知性質】線段比例

如圖 1-2-2，考慮直線 $\overline{K_1K_2}$ 、 $\overline{K_2K_3}$ 、 $\overline{K_3K_1}$ 、 $\overline{H_1H_2}$ 、 $\overline{H_2H_3}$ 、 $\overline{H_3H_1}$ 與基礎 Sejfriedian 構圖中的三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 的交點，則有以下 Sejfried 定理，與黃金比例 $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 有關。特別的是，這些性質對於任意三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 都成立[1][2]。

Sejfried 定理 交比 $(A_1, B_1; C_1, A_2) = (A_2, B_2; C_2, A_3) = (A_3, B_3; C_3, A_1) = 1 - \phi$

交比 $(A_1, B_1; D_1, A_2) = (A_2, B_2; D_2, A_3) = (A_3, B_3; D_3, A_1) = \phi$



$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1} = -0.61803 \quad \frac{D_1A_1}{D_1B_1} = 1.61803$$

$$\frac{A_2A_1}{A_2B_1} = -0.61803 \quad \frac{A_2A_1}{A_2B_1} = 1.61803$$

$$\left(\frac{A_1C_1}{C_1A_2}\right) \cdot \left(\frac{A_2C_2}{C_2A_3}\right) \cdot \left(\frac{A_3C_3}{C_3A_1}\right) = 0.05573$$

$$\left(\frac{A_1D_1}{D_1A_2}\right) \cdot \left(\frac{A_2D_2}{D_2A_3}\right) \cdot \left(\frac{A_3D_3}{D_3A_1}\right) = 17.94427$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{-6} = 0.05573 \quad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^6 = 17.94427$$

▲圖 1-2-2

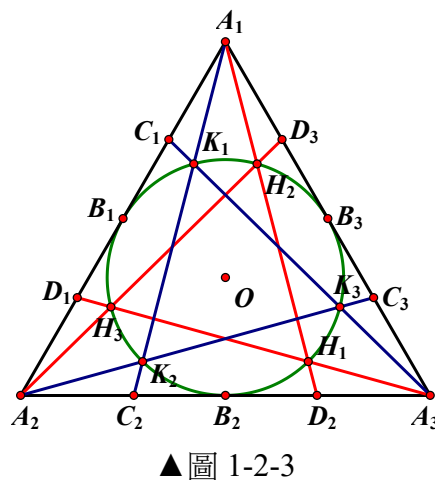
證明.

Sejfried 和 Shelomovskii 從射影幾何角度思考，提出任意三角形 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 射影到正三角形 $\Delta A'_1 B'_1 C'_1$ ，且 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 的內切圓 O 也會射影到正三角形 $\Delta A'_1 B'_1 C'_1$ 的內切圓 O' 的方法。因為交比是射影變換不變量，僅需證明正三角形 $\Delta A'_1 B'_1 C'_1$ 的基礎 Sejfriedian 構圖即可。

如圖 1-2-3，令 $\overline{A_1 A_2} = 1$ 、 $\overline{A_1 C_1} = \lambda < \frac{1}{2}$ ，利用孟氏定理可求

出 $\Delta K_1 K_2 K_3 = \frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda^2-\lambda+1} \Delta A_1 A_2 A_3$ ，又因為 $\Delta K_1 K_2 K_3 =$

$\frac{1}{4} \Delta A_1 A_2 A_3$ ，解 $\lambda = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ ，最後求出 $(A_1, B_1; C_1, A_2) = 1 - \phi$ 。



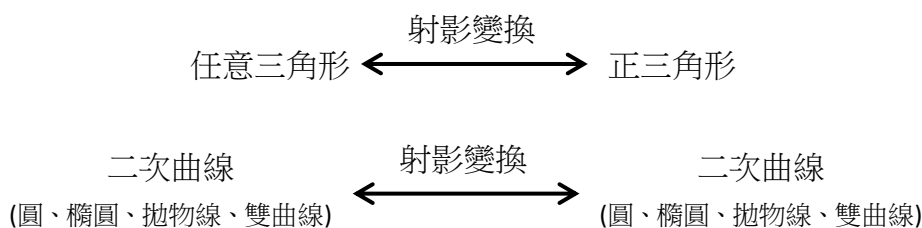
□

【討論與分析】

本研究中，我們關注 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 邊上的交比 $(A_1, B_1; C_1, A_2)$ 與 $(A_1, B_1; D_1, A_2)$ 。

第一，Sejfried 定理的另一個意義在於，它是一個困難的「作圖問題」，也就是任意三角形的基礎 Sejfriedian 構圖的「**存在性**」，該如何尺規作圖使得通過頂點的直線交點落在內切圓上呢？圓內接的一組「Sejfried 三角形 $\Delta K_1 K_2 K_3$ 與 $\Delta H_1 H_2 H_3$ 」是否「**唯一**」呢？Shelomovskii 在參考文獻[2]中給出存在唯一性的作圖方法。

第二，確認任意三角形的基礎 Sejfriedian 構圖的存在唯一性後，Sejfried 定理的難度在於「如何證明在『任意』三角形下，各邊上的交比皆等於 ϕ ？」利用射影幾何是一個好的策略，如圖 1-2-4，已知射影變換下任意三角形可變為正三角形，二次曲線之間也可以變換，**如何找出在任意三角形變換為正三角形時，同時確保圓也會變換為圓的射影變換呢？**這是 Sejfried、Shelomovskii 的研究中最重要貢獻及價值。

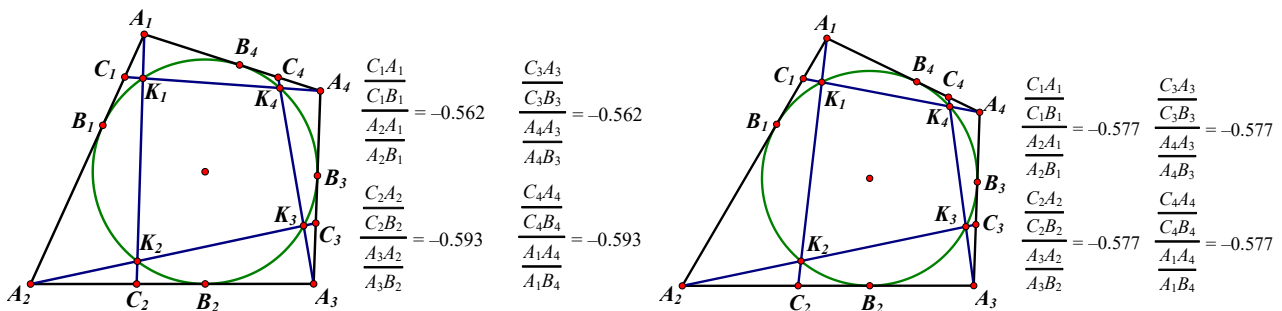


▲圖 1-2-4

【我們的提問】

我們十分好奇 Sejfried 定理推廣到多邊形的情形？基礎 Sejfriedian 構圖是否存在？它與三角形的差異是什麼？我們查閱全國科展資料庫、Google 學術搜尋、Jstor 資料庫等，並沒有發現 Sejfried 定理在多邊形上的推廣研究。

因此，我們利用動態幾何軟體 GSP、Geogebra、Cabri 3D 針對「四邊形」的基礎 Sejfriedian 構圖，先進行模擬實驗（如圖 1-2-5），發現了有趣且不同於三角形的性質（並非如同三角形，四邊形的四邊交比沒有全部相同），隨後展開一系列的推廣研究與證明。



▲ 圖 1-2-5

三、與原作者的書信討論

我們於 2016 年 8 月開始研究多邊形的 Sejfried 定理並且獲得不少美麗的性質，於是我們與 Sejfried 進行學術討論與諮詢，確認本研究中的多邊形的 Sejfried 定理是嶄新的成果。以下節錄 Sejfried 的回信文字（完整電子郵件書信內容詳見研究日誌）：

- ◇ I'm very pleased that you wanted to deal with the part of the geometrical problems concerning the "amicable triangles" and "perfect circles" (I called them so). Your nice construction raises above issue for quadrilateral and in this case based on rhombus. (2017/5/16)
- ◇ In the separate e-mail I will try to send you my Power Point presentation from ICGG 2012 in Montreal. If you will use parts of my elaboration for your publication, I would be pleased to be mentioned in it for further contacts with other mathematicians interested in these problems. (2017/5/21)

四、名詞定義

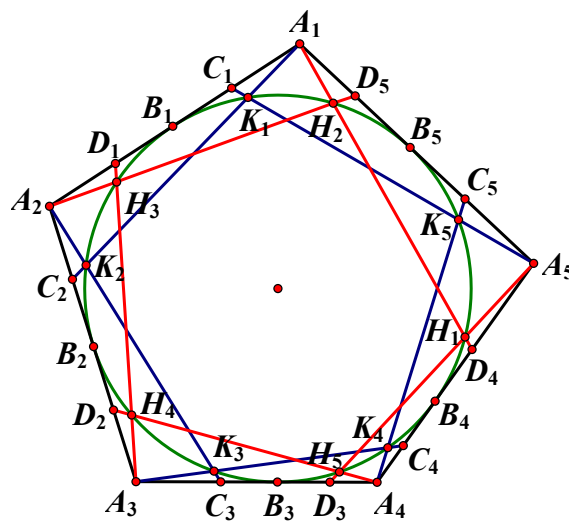
在平面上，給定凸多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 與其內切圓 O ，分別過所有頂點 A_n 各作兩直線 L_n 與 M_n (共有 $2n$ 條直線)，令 $L_1 \cap L_2 = K_2, \dots, L_{n-1} \cap L_n = K_n, L_n \cap L_1 = K_1$ 且 $M_1 \cap M_2 =$

$H_2, \dots, M_{n-1} \cap M_n = H_n, M_n \cap M_1 = H_1$ ，使得此 $2n$ 個交點共圓 O (如圖 1-4-1)。

定義 1.1 滿足前述條件的構圖稱作「多邊形的基礎 Sejfriedian 構圖」。

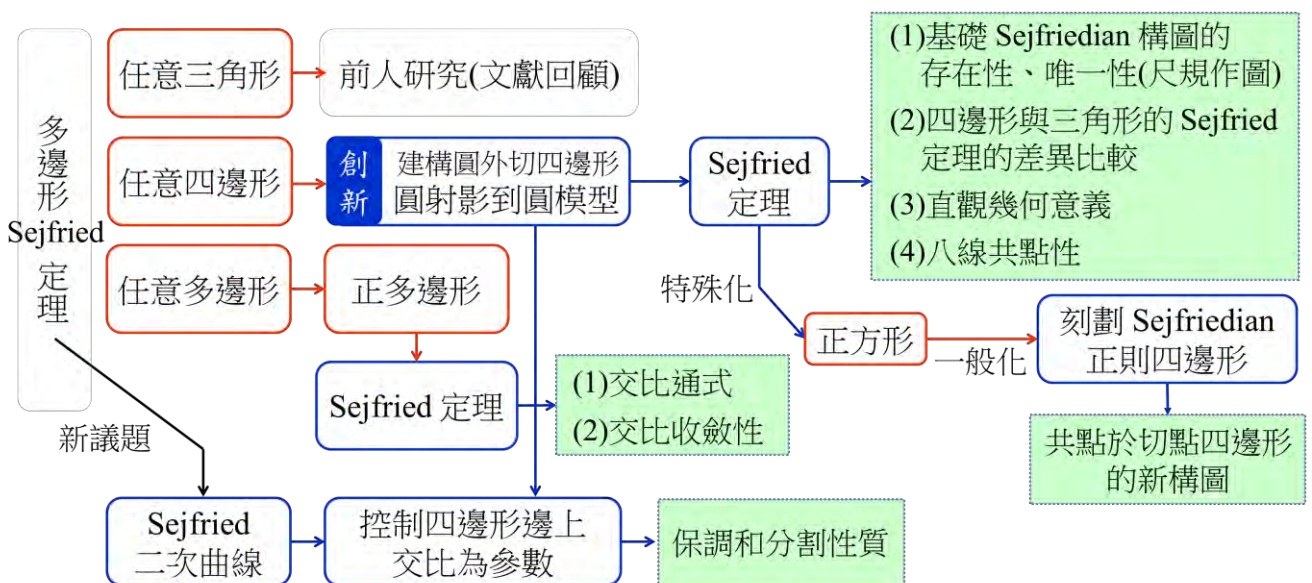
定義 1.2 多邊形的基礎 Sejfriedian 構圖中，多邊形 $K_1K_2 \dots K_n$ 與 $H_1H_2 \dots H_n$ 稱作一組「Sejfried 多邊形」。

定義 1.3 多邊形的基礎 Sejfriedian 構圖中，若交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ (或 $(A_k, B_k; D_k, A_{k+1})$) 為定值，則本研究將此多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 稱作「Sejfriedian 正則多邊形」，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, n; A_{n+1} = A_1$ 。



▲圖 1-4-1

五、研究架構與目的



貳、研究工具與方法

一、研究工具

The Geometer's Sketchpad 5.0、GeoGebra 5.0、Cabri 3D v2、Wolframalpha 網站

二、預備知識

起初，我們研究多邊形的 Seifried 定理時，想利用解析幾何坐標化的方式，但是需要假設的變數或方程式過多，例如：多邊形的頂點坐標、圓的方程式、直線方程式等，並且解多次的聯立方程式以求出交點坐標，最後以坐標距離公式求出長度，才能得出 Seifried 交比定理。因此，我們決定避開繁瑣的解析幾何，以綜合幾何方式切入證明，利用基礎的射影變換作為研究方法，以下為本研究相關預備知識。

(一) 有向線段比 (Ratio of segments)

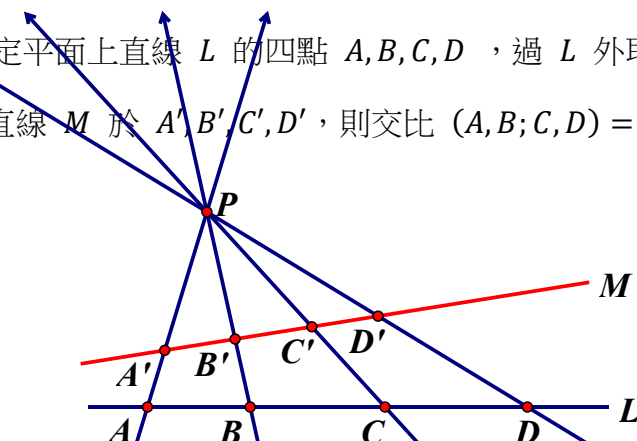
若 A, B, C 為平面上共線的三點，定義其有向線段比為 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ 。若 \overline{AC} 與 \overline{BC} 同向，則 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ ；反之，若 \overline{AC} 與 \overline{BC} 反向，則 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ 。

(二) 交比 (Cross-ratio)

給定平面上共線的四點 A, B, C, D ，定義其交比為有向線段比 $(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} / \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ 。其中， $(A, B; C, D) = -1$ ，則 A, B, C, D 四點稱為調和點列 (Harmonic range of points)。

(三) 交比為射影幾何的不變量 (Projective invariant)

如圖 2-2-1，給定平面上直線 L 的四點 A, B, C, D ，過 L 外取一點 P ，直線 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC} 、 \overline{PD} 交另一條直線 M 於 A', B', C', D' ，則交比 $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ 。



▲圖 2-2-1

(四) 反演變換 (Inversion transformation)

平面上給定的一個半徑為 r 的圓 O ，對平面上任意一點 P ，將其變換為射線 \overline{OP} 上

的一點 P' ，使得 $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$ ，則稱 P' 為 P 關於圓 O 的反演點。

(五) 圓射影到圓 (Projection of a circle into a circle)

關於圓射影到圓的方法是文獻[1]中，Sejfried 和 Shelomovskii 提出的方法（兩球相交的球系），本研究採用這個構造原理來討論 Sejfried 定理在多邊形之推廣情形。

如圖 2-2-2，在空間中，給定一個平面 E_1

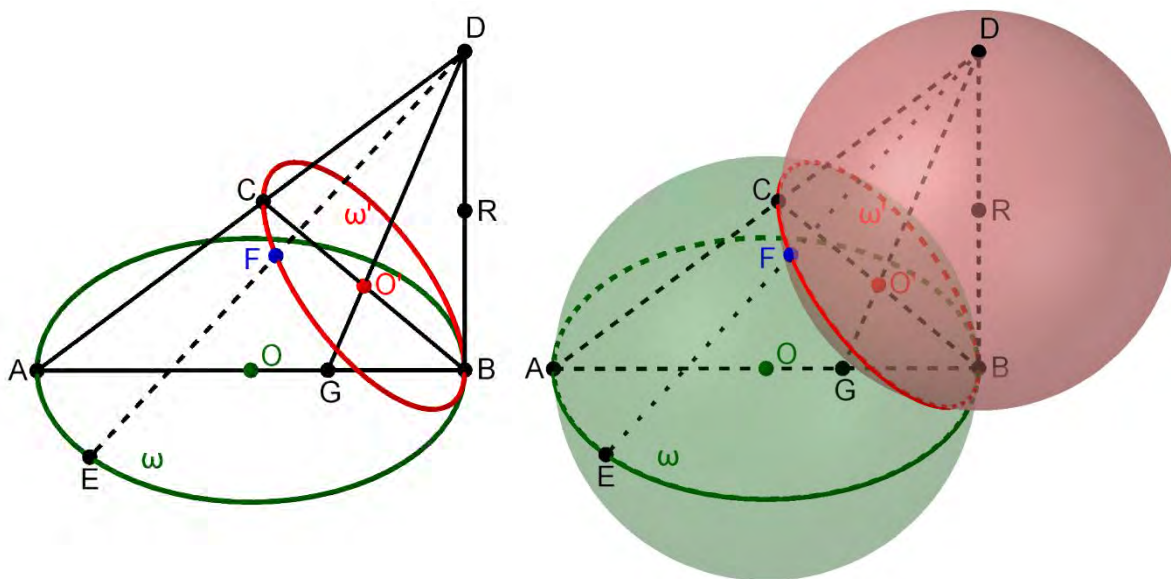
步驟一：平面 E_1 上構造直角 $\triangle ABD$ 且斜邊上的高為 \overline{BC} 。

步驟二：以 \overline{AB} 為直徑作圓 ω 且圓 ω 所在平面垂直 \overline{BD} 。

步驟三：以 \overline{BC} 為直徑作圓 ω' 且圓 ω' 所在平面垂直 \overline{AD} 。

以 D 點為射影點，可使得圓 ω 變換成圓 ω' ，也就是說在圓 ω 上任取一點 E ，則在圓 ω' 上存在唯一一點 F 使得 D, E, F 三點共線。

注意到，利用孟氏定理可得此模型的充要條件是 $\overline{AB} = \overline{DB} \sqrt{\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}} - 1$ 。若控制了 G 點，則可以找出射影點 D 點，而將圓 ω 與圓 ω' 相互射影變換。



▲圖 2-2-2

參、 結果與討論

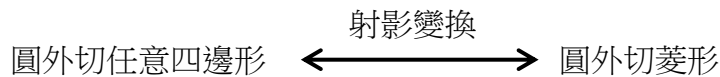
一、 圓外切四邊形射影到另一個圓外切四邊形的模型

我們採用 Sejfried 和 Shelomovskii 針對三角形 Sejfried 定理所提出的圓射影到圓的構造法[1]，但是如何將一個圓外切四邊形射影到另一個圓外切四邊形呢？

注意到，以下我們提出以四邊形的對角線交點作為控制點 K ，構造出點光源的射影點 R 的方法！這是本研究的創意及實質突破。

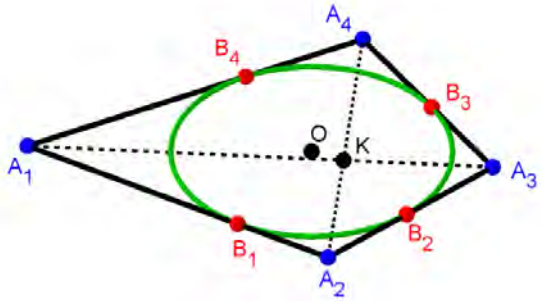
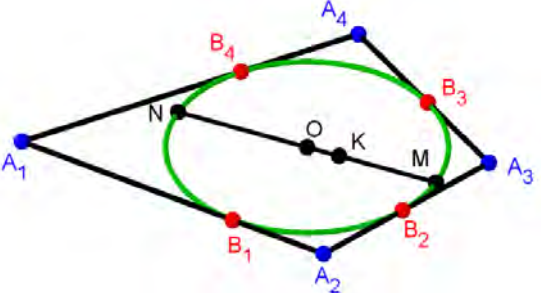
（一）建構圓外切四邊形的射影模型

我們建構的圓外切四邊形射影模型步驟如下表 1。注意到，利用此射影模型，可將任意圓外切四邊形都經由射影變換為圓外切菱形（圖 3-1-1）！



▲圖 3-1-1

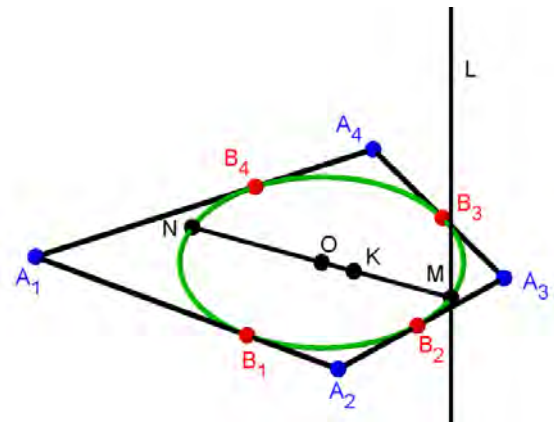
表 1 圓外四邊形的射影模型步驟

模型構造步驟	圖例
<p>【步驟 1】</p> <p>空間中，在平面 E 上作圓 O 的任意外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，切點分別為 B_1, B_2, B_3, B_4。令圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 K 點。</p>	
<p>【步驟 2】</p> <p>連接直線 \overrightarrow{OK} 交圓 O 於 M, N 點。</p>	

【步驟 3】

不失一般性令 $\overline{MK} \leq \overline{KN}$

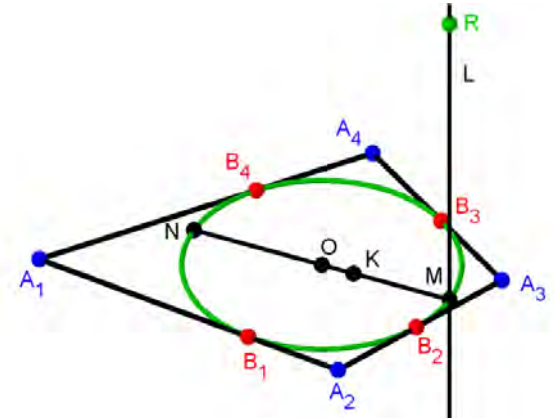
過 M 作直線 L 垂直於平面 E 。



【步驟 4】

在直線 L 上取一點 R ，使得

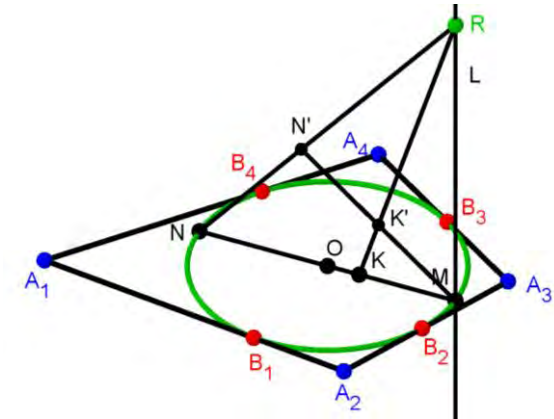
$$\overline{RM} = \frac{\overline{MN}}{\sqrt{\frac{\overline{NK}}{\overline{KM}} - 1}}$$



【步驟 5】

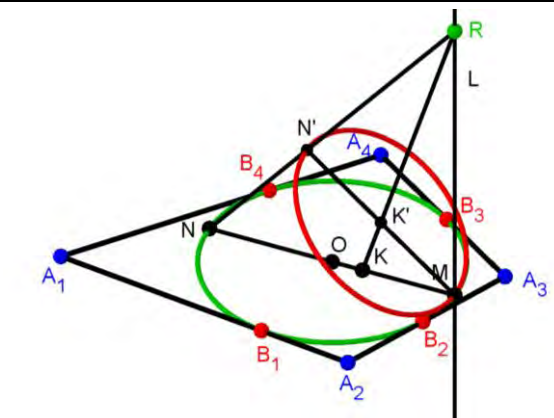
在直角 ΔRMN 所在平面上，過 M 點作 \overline{RN} 的垂直線分別交 $\overline{RN}, \overline{RK}$ 於 N', K' 點

注意到， K' 點與 K 點互為射影點。



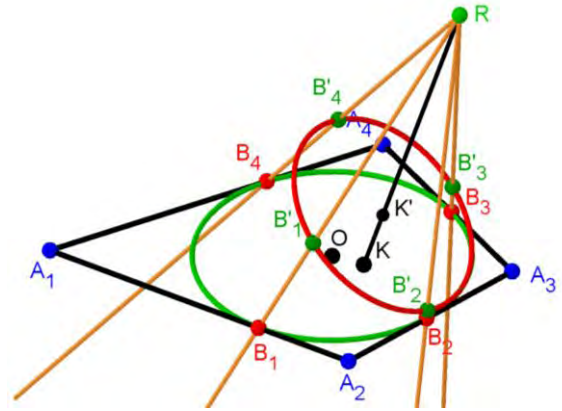
【步驟 6】

令平面 E' 垂直 \overline{RN} 且通過 $\overline{N'M}$ 。在平面 E' 上，以 K' 為圓心， $\overline{N'M}$ 為直徑作圓，則此模型即為以 R 為射影點，將圓 O 射影變換至圓 K' 。



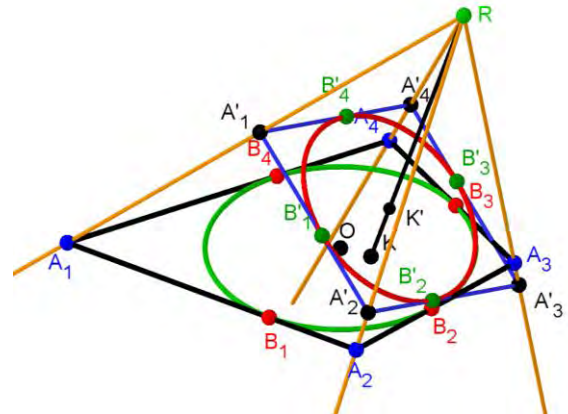
【步驟 7】

作射線 $\overrightarrow{RB_1}, \overrightarrow{RB_2}, \overrightarrow{RB_3}, \overrightarrow{RB_4}$ 分別交圓 O' 於 B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 點。



【步驟 8】

作射線 $\overrightarrow{RA_1}, \overrightarrow{RA_2}, \overrightarrow{RA_3}, \overrightarrow{RA_4}$ 分別交平面 E' (圓 K' 所在平面) 於 A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 點。
 連接線段 $\overline{A'_1A'_2}, \overline{A'_2A'_3}, \overline{A'_3A'_4}, \overline{A'_4A'_1}$ ，則四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 即為所求。

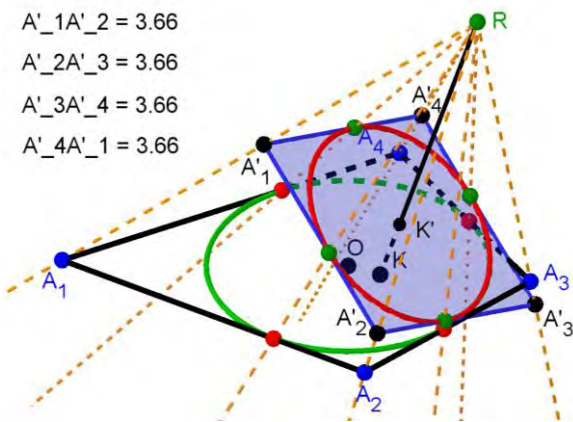


【討論】射影四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 是否為菱形？

應用兩球相交的球系可建構「圓射影到圓」作圖法，我們再將其推廣到四邊形，建構出圓外切四邊形射影到另一個圓外切四邊形的模型。

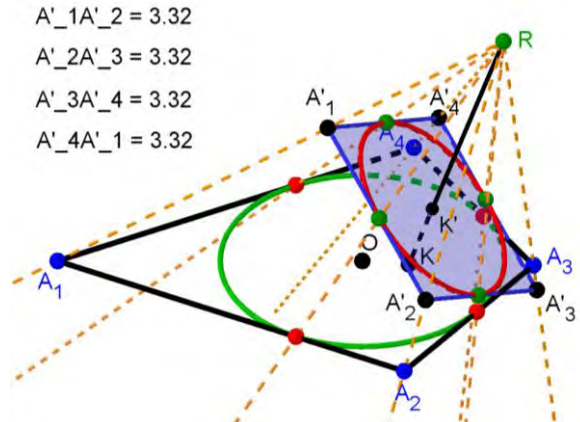
在圖 3-1-2(a)與圖 3-1-2(b)中，利用軟體 GeoGebra 模擬任意四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的射影四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ ，結果發現射影四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 為菱形。以下我們將進行證明。

$A'_1A'_2 = 3.66$
 $A'_2A'_3 = 3.66$
 $A'_3A'_4 = 3.66$
 $A'_4A'_1 = 3.66$



▲圖 3-1-2(a)

$A'_1A'_2 = 3.32$
 $A'_2A'_3 = 3.32$
 $A'_3A'_4 = 3.32$
 $A'_4A'_1 = 3.32$



▲圖 3-1-2(b)

(二) 刻劃「射影四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 」

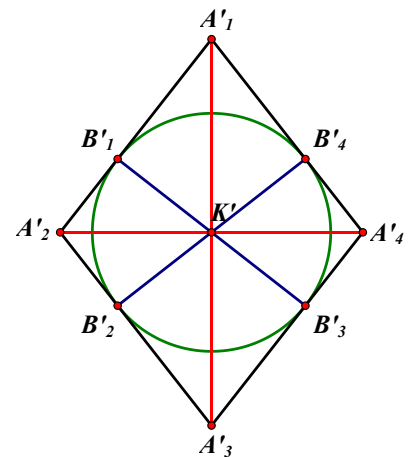
在圓外切四邊形的射影模型中，可以知道 K' 點是 K 點（四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的對角線交點）射影點，所以 K' 點是四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的對角線交點。此外， K' 點同時也是四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的內切圓圓心。所以，我們要研究的問題則變為「對角線交點與內切圓圓心相同（重合）的四邊形是什麼樣的四邊形？」我們需要利用到以下引理 1.1。

引理 1.1 (牛頓定理) 圓外切四邊形的對角線交點和對邊切點連線四線共點 ([3], p.153-156)

性質 1.1 在圓外切四邊形射影模型中，任意四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的射影四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 必為菱形

證明.

射影四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的對角線交點與其內切圓圓心重合，又依據引理 1.1 牛頓定理可推得對角線 $\overline{A'_1A'_3}$ 、 $\overline{A'_2A'_4}$ 與切點連線 $\overline{B'_1B'_3}$ 、 $\overline{B'_2B'_4}$ 四線共點。如圖 3-1-3，在 $\Delta A'_1B'_1K'$ 與 $\Delta A'_3B'_3K'$ 中， $\angle A'_1K'B'_1 = \angle A'_3K'B'_3$ 、 $\angle A'_1B'_1K' = \angle A'_3B'_3K' = 90^\circ$ 、 $\overline{B'_1K'} = \overline{B'_3K'}$ ，所以 $\Delta A'_1B'_1K' \cong \Delta A'_3B'_3K'$ (ASA 全等)，因此 $\overline{A'_1B'_1} = \overline{A'_3B'_3}$ ，同理可得 $\overline{A'_2B'_1} = \overline{A'_4B'_3}$ ，因此 $\overline{A'_1A'_2} = \overline{A'_2A'_3} = \overline{A'_3A'_4} = \overline{A'_4A'_1}$ ，即 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 為菱形。



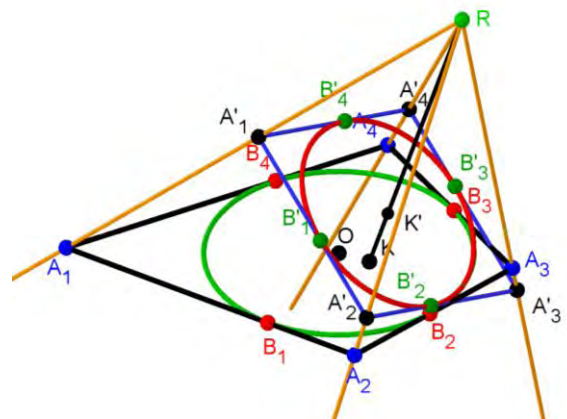
▲圖 3-1-3

□

二、四邊形基礎 Sejfriedian 構圖的存在性與唯一性

(一) 存在性

透過我們建構的射影模型，如圖 3-2-1，可將任意圓外切四邊形射影變換為圓外切菱形，又射影變換擁有不變性，使得點列變點列，直線變直線，線束變線束，點和直線的結合性不變，為雙射對應，因此探討「任意四邊形」基礎 Sejfriedian 構圖等價探討「菱形」基礎 Sejfriedian 構圖。



▲圖 3-2-1

表 2 為我們發現的「菱形」基礎 Sejfriedian 構圖之作圖步驟。

表 2 「菱形」基礎 Sejfriedian 構圖之作圖步驟

構圖步驟	圖例
【步驟 1】	
<p>給定菱形 $A_1'A_2'A_3'A_4$ 與其內切圓 K'</p> <p>令 $\overline{A_1'A_3'} \cap \overline{A_2'A_4'} = K'$、$\overline{B_1'B_4'} \cap \overline{A_1'A_3'} = E'$、 $\overline{B_3'B_4'} \cap \overline{A_2'A_4'} = F'$。</p>	
【步驟 2】	
<p>連接直線 $\overline{E'F'}$</p>	
<p>$\overline{E'F'} \cap \text{圓}K' = K'_1$ 與 H'_1</p>	
【步驟 3】	
<p>依序作 $\overline{A_1'K_1'} \cap \text{圓}K' = K_2'$、$\overline{A_2'K_2'} \cap \text{圓}K' = K_3'$、$\overline{A_3'K_3'} \cap \text{圓}K' = K_4'$，則 $\overline{A_4'K_4'}$ 必通過 K_1'，即得 Sejfried 四邊形 $K_1'K_2'K_3'K_4'$。</p>	
【步驟 4】	
<p>同樣的操作可得出 Sejfried 四邊形 $H_1'H_2'H_3'H_4'$。</p>	

「菱形」基礎 Sejfriedian 構圖存在性的證明如下：

引理 2.1 (反演性質) 給定圓 O ，直線 L 關於圓 O 的反演變換為過 O 點的圓；反之，過 O 點的圓關於圓 O 的反演變換為直線 L

證明. 略。

如圖 3-2-2(a)，給定給定菱形 $A_1'A_2'A_3'A_4$ 與其內切圓 K' ， B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 為邊上切點，

$\overline{B'_1B'_4} \cap \overline{A_1'A_3'} = E'$ 、 $\overline{B'_3B'_4} \cap \overline{A_2'A_4'} = F'$ ， $\overline{E'F'} \cap \text{圓}K' = K'_1$ 與 H'_1 ，而有以下性質 2.1。

性質 2.1 若 A'_1, K'_1, K'_2 三點共線，若且唯若點 E', G', K'_2 三點共線

證明.

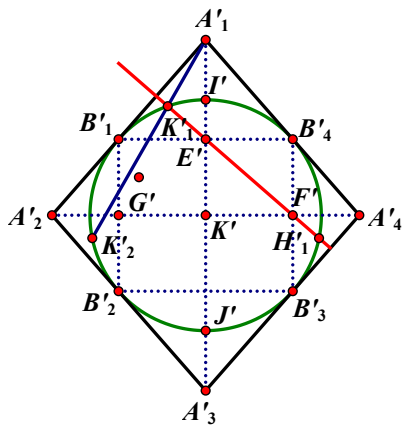
充分性 (\Rightarrow)

如圖 3-2-2(a)，因為 A'_1, K'_1, A'_2 三點共線，依據引理 2.1，將此三點對圓 K' 進行反演變換可得 E', K'_1, K'_2, K' 四點共圓，得圖 3-2-2(b)， $\angle K'_2 K'_1 E' + \angle K'_2 K' E' = 180^\circ$ ，即 $\widehat{K'_2 B'_1 I'} + \frac{1}{2} \widehat{K'_2 J' H'_1} = 180^\circ$ (式 1)，又因 $\widehat{K'_2 I' H'_1} + \widehat{K'_2 J' H'_1} = 360^\circ$ (式 2)。

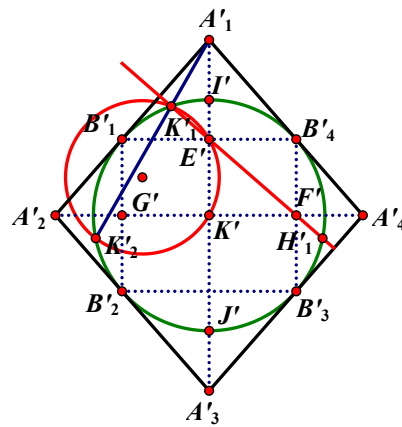
由式 1 與式 2 可知 $2\widehat{K'_2 B'_1 I'} = \widehat{K'_2 I' H'_1}$ ，即 K'_2 與 H'_1 互為對稱點 (對稱軸為 $\overline{A'_1 A'_3}$)，又已知 F' 與 G' 亦為對稱點，因此點 E', G', K'_2 三點共線。

必要性 (\Leftarrow)

將前面證明反推即可得證。



▲圖 3-2-2(a)



▲圖 3-2-2(b)

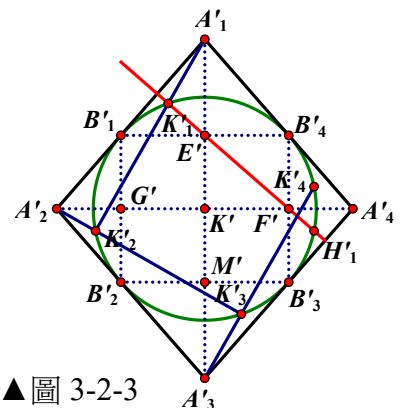
□

性質 2.2(存在性) 菱形 $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$ 的基礎 Sejfriedian 構圖必然存在

證明.

如圖 3-2-3，依據性質 2.1 可知，因為 $\overline{E'F'}, \overline{A'_1 K'_2}$ ，所以 E', G', K'_2 三點共線，同理可得 M', F', K'_4 三點共線，因此 A'_4, K'_4, K'_1 三點共線。

□



▲圖 3-2-3

(二) 唯一性

我們接下來要證明給定任意的圓外切菱形的基礎 Sejfriedian 構圖是唯一的，也就是僅有一組的 Sejfried 四邊形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$ 與 $H'_1H'_2H'_3H'_4$ 。因為對稱性，只需鎖定其中的一個 Sejfried 四邊形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$ 即可。我們以下證明四邊形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$ 必為矩形。

性質 2.3 給定菱形基礎 Sejfriedian 構圖，則其 Sejfried 四邊形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$ 必為矩形

證明.

如圖 3-2-4，令 $\angle A'_2A'_1K'_2 = \alpha$ 、 $\angle A'_1A'_2K'_2 = \beta$ 、 $\angle A'_3A'_2K'_3 = \gamma$ 、

$\angle A'_2A'_3K'_3 = \delta$ 。利用反證法，四邊形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 為菱形，

假設四邊形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$ 不是矩形，所以 $\overline{A'_1K'_2} \nparallel \overline{A'_3K'_4}$ ，因

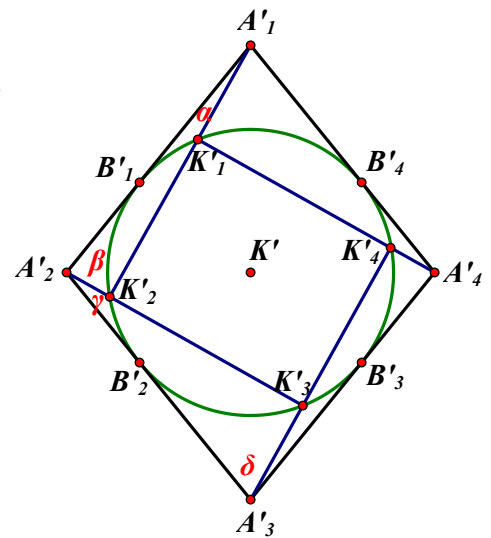
為點 K'_1 、 K'_2 、 K'_3 、 K'_4 都在圓上，不失一般性，令

$\angle A'_4A'_3K'_4 = \alpha - h$ ($\alpha > h > 0$)， $\angle A'_3A'_4K'_4 = \beta - k$ ($\beta >$

$k > 0$)，則 $\angle A'_1A'_4K'_1 = \gamma + k$ ，因此 $\angle A'_4A'_1K'_1 > \delta$ 。

考慮菱形的對角頂點，可得 $\angle A'_2A'_1A'_4 > \alpha + \delta$ ，但是 $\angle A'_2A'_3A'_4 < \alpha + \delta$ ， $\angle A'_2A'_1A'_4 \neq$

$\angle A'_2A'_3A'_4$ ，矛盾。由反證法得知四邊形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$ 必為矩形。



▲圖 3-2-4

□

性質 2.4(唯一性) 菱形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的基礎 Sejfriedian 構圖僅有唯一一種

證明.

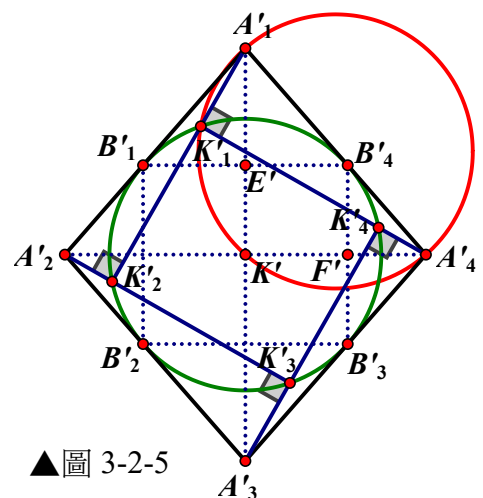
如圖 3-2-5，依據性質 2.3，Sejfried 四邊形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$ 必

為矩形，所以 K'_1 在以 $\overline{A'_1A'_4}$ 為直徑的圓上，又因為

A'_1, K'_1, K', A'_4 四點共圓，將其對圓 K' 進行反演變換可得

K'_1, E', F' 三點共線，也就是說 K'_1 在 $\overleftrightarrow{E'F'}$ 上，即菱形

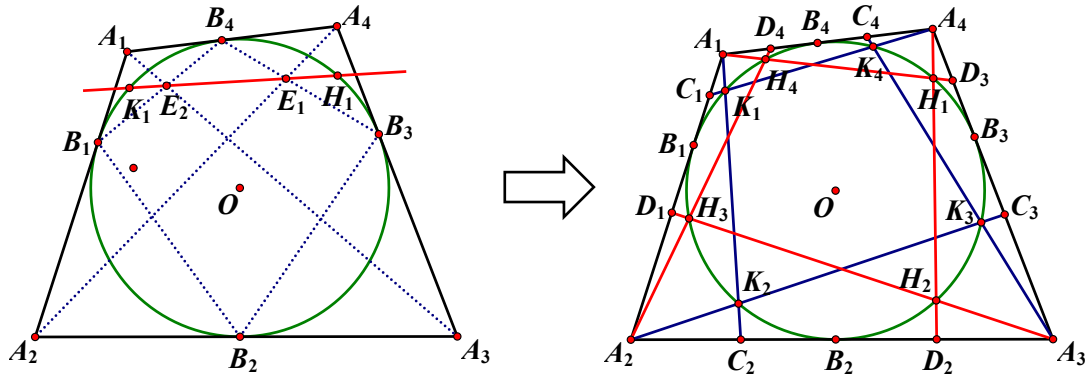
$A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的基礎 Sejfriedian 構圖僅有唯一一種。



▲圖 3-2-5

(三) 四邊形基礎 Sejfriedian 構圖方法

如圖 3-2-6，給定四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與其內切圓 K ，令 $\overline{A_2A_4} \cap \overline{A_3A_4} = E_1$ 、 $\overline{A_1A_2} \cap \overline{B_1B_4} = E_2$ 。連接直線 $\overline{E_1E_2}$ 交圓 K 於 K_1 與 H_1 ，再依據 Sejfriedian 構圖步驟即可得 Sejfried 四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ 與 $H_1H_2H_3H_4$ 。



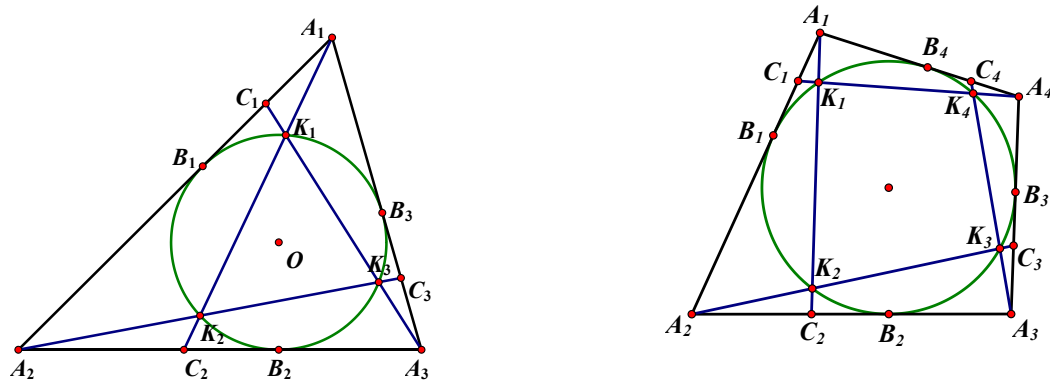
▲圖 3-2-6

三、四邊形的 Sejfried 定理探究

在前兩節中，我們建構圓外切四邊形的射影模型，並且透過此模型證明四邊形基礎 Sejfriedian 構圖的存在唯一性。接下來，繼續探究四邊形 Sejfried 定理（邊上的四點交比）。

(一) 四邊形的 Sejfried 定理

我們發現 Sejfried 性質推廣至四邊形時，不同於三角形的現象。這一節中，我們將證明四邊形 Sejfried 定理為「對邊的四點交比相同」，而非四邊交比相同。



$$(A_1, B_1; C_1, A_2) = (A_2, B_2; C_2, A_3) = (A_3, B_3; C_3, A_1)$$

$$(A_1, B_1; C_1, A_2) = (A_3, B_3; C_3, A_4)$$

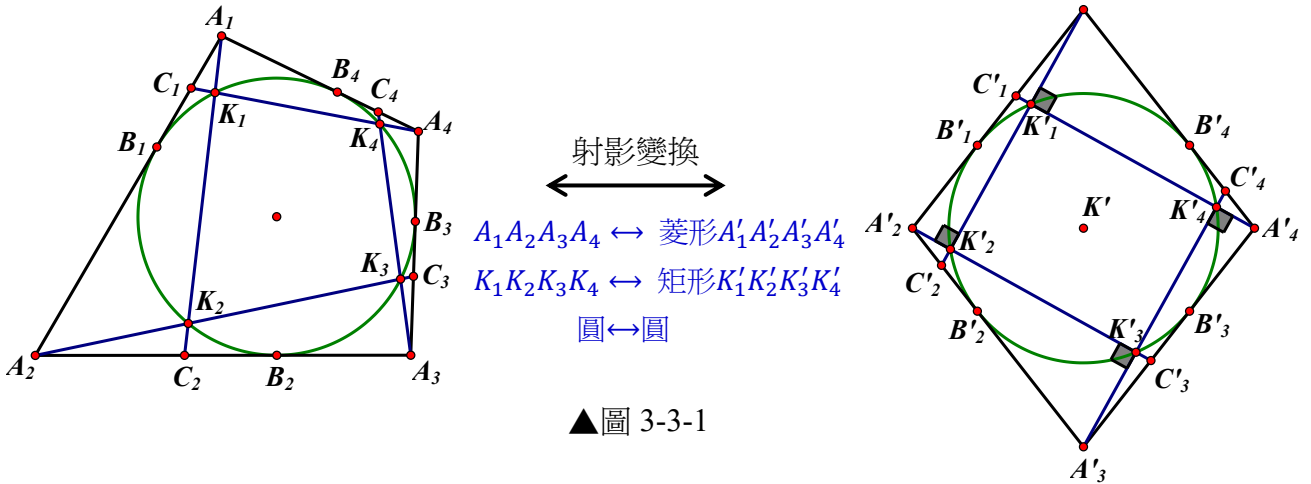
$$(A_2, B_2; C_2, A_3) = (A_4, B_4; C_4, A_1)$$

如圖 3-3-1，我們已經刻劃出四邊形基礎 Sejfriedian 構圖可射影變換為菱形基礎

Sejfriedian 構圖，且該構圖具有存在唯一性。因此，本研究成功將 Sejfried 定理推廣在任意四邊形，如下推論 3.1、推論 3.2 與推論 3.3。

四邊形基礎 Sejfriedian 構圖

菱形基礎 Sejfriedian 構圖



性質 3.1 菱形基礎 Sejfriedian 構圖中，

$$(A'_1, B'_1; C'_1, A'_2) = (A'_3, B'_3; C'_3, A'_4) \text{ 且 } (A'_2, B'_2; C'_2, A'_3) = (A'_4, B'_4; C'_4, A'_1)$$

$$(A'_1, B'_1; D'_1, A'_2) = (A'_3, B'_3; D'_3, A'_4) \text{ 且 } (A'_2, B'_2; D'_2, A'_3) = (A'_4, B'_4; D'_4, A'_1)$$

證明.

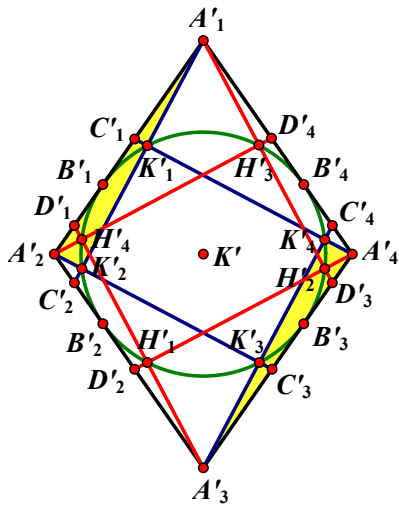
1. 由存在唯一性中，可知矩形 $K'_1K'_2K'_3K'_4 \cong H'_2H'_3H'_4H'_1$ 且 $\Delta A'_1A'_2K'_2 \cong \Delta A'_3A'_4K'_4$ (圖 3-3-2(a) 中黃色三角形)。

2. 如圖 3-3-2(b)中紅色三角形 $\Delta A'_1C'_1K'_1$ 與 $\Delta A'_3C'_3K'_3$ 中， $\angle A'_1K'_1C'_1 = 90^\circ = \angle A'_3K'_3C'_3$ 、 $\overline{A'_1K'_1} = \overline{A'_3K'_3}$ 、 $\angle C'_1A'_1K'_1 = \angle C'_3A'_3K'_3$ ，所以 $\Delta A'_1C'_1K'_1 \cong \Delta A'_3C'_3K'_3$ (ASA 全等)，得出 $\overline{A'_1C'_1} = \overline{A'_3C'_3}$ ，再利用切線段等長得 $\overline{B'_1C'_1} = \overline{B'_1C'_3}$ 。同理 $\overline{A'_2C'_2} = \overline{A'_4C'_4}$ ， $\overline{B'_2C'_2} = \overline{B'_4C'_4}$ ，所以

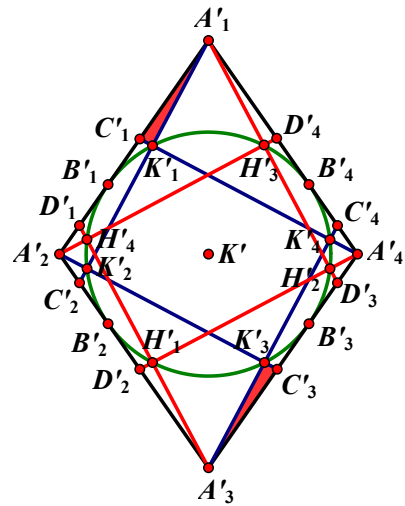
$$(A'_1, B'_1; C'_1, A'_2) = (A'_3, B'_3; C'_3, A'_4) \text{ 且 } (A'_2, B'_2; C'_2, A'_3) = (A'_4, B'_4; C'_4, A'_1)$$

同理可得

$$(A'_1, B'_1; D'_1, A'_2) = (A'_3, B'_3; D'_3, A'_4) \text{ 且 } (A'_2, B'_2; D'_2, A'_3) = (A'_4, B'_4; D'_4, A'_1)$$



▲圖 3-3-2(a)



▲圖 3-3-2(b)

□

利用射影模型與菱形的對稱性可以得出任意的任意四邊形基礎 Sejfriedian 構圖的交比性質，如下推論 3.1、推論 3.2、推論 3.3。

推論 3.1 四邊形基礎 Sejfriedian 構圖中，對邊交比相同，即 $(A_1, B_1; C_1, A_2) = (A_3, B_3; C_3, A_4)$
且 $(A_2, B_2; C_2, A_3) = (A_4, B_4; C_4, A_1)$

推論 3.2 (1) $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) + (A_k, B_k; D_k, A_{k+1})$ 為常數
(2) $(A_1, B_1; C_1, A_2) + (A_2, B_2; D_2, A_3) = 1$ 、 $(A_2, B_2; C_2, A_3) + (A_1, B_1; D_1, A_2) = 1$

推論 3.3(西瓦形式) $\frac{A_1C_1}{C_1A_2} \times \frac{A_2C_2}{C_2A_3} \times \frac{A_3C_3}{C_3A_4} \times \frac{A_4C_4}{C_4A_1} \times \frac{A_1D_1}{D_1A_2} \times \frac{A_2D_2}{D_2A_3} \times \frac{A_3D_3}{D_3A_4} \times \frac{A_4D_4}{D_4A_1} = 1$

(二) 四邊形的 Sejfried 定理的直觀幾何圖形意義

我們好奇的問題是給定四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的 Sejfried 定理中， $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 以及 $(A_k, B_k; D_k, A_{k+1})$ 的值是什麼？也就是定義上的兩組有向線段單比的比值外，**它與原圖形的幾何量（邊長與對角線長度）是否有關係？**

任意的四邊形基礎 Sejfriedian 構圖都可射影變換為對應的菱形基礎 Sejfriedian 構圖，而給定兩對角線長度即可決定菱形。因此，我們接下來鎖定討論四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的邊上交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 或 $(A_k, B_k; D_k, A_{k+1})$ 與射影變換後的菱形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的對角線關係。

令菱形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 中， $\overline{A'_1A'_3}/\overline{A'_2A'_4} = a/b = x$ 、 $\overline{A'_1A'_3} \cap \overline{A'_2A'_4} = K'$ 。因為對邊交比相同，所以我們僅處理邊 $\overline{A'_1A'_2}$ 與 $\overline{A'_2A'_3}$ 的交比即可。

性質 3.2 $(A_1, B_1; C_1, A_2) = \frac{-x^2+1-2\sqrt{x^4+x^2+1}}{3(x^2+1)}$; $(A_1, B_1; D_1, A_2) = \frac{2x^2+4+2\sqrt{x^4+x^2+1}}{3(x^2+1)}$

$(A_2, B_2; C_2, A_3) = \frac{x^2-1-2\sqrt{x^4+x^2+1}}{3(x^2+1)}$; $(A_2, B_2; D_2, A_3) = \frac{4x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}{3(x^2+1)}$

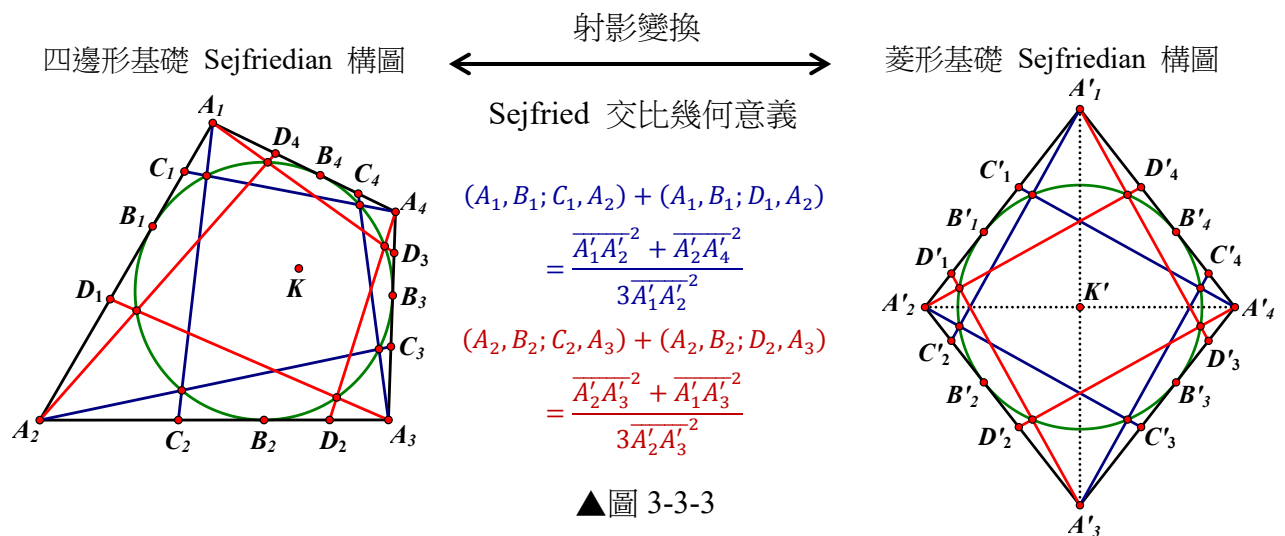
證明. 令 K' 為直角座標的原點，依據 Sejfriedian 構圖的尺規作圖以解析幾何求出 $\overline{K'_1A'_4}$ 方程式，再利用孟氏定理可求出 $\overline{C_1A_1}/\overline{C_1A_2}$ ，運算化簡可得出交比 $(A_1, B_1; C_1, A_2)$ ，依據對稱輪轉性再得出 $(A_2, B_2; C_2, A_3)$ 。再依據推論 3.3 可得 $(A_2, B_2; D_2, A_3)$ 與 $(A_1, B_1; D_1, A_2)$ 。

□

將性質 3.2 化簡可得推論 3.4，即四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的 Sejfried 定理的直觀幾何意義，且不難得出交比和 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) + (A_k, B_k; D_k, A_{k+1})$ 下界為 $\frac{1}{3}$ 、上界為 $\frac{5}{3}$ 。

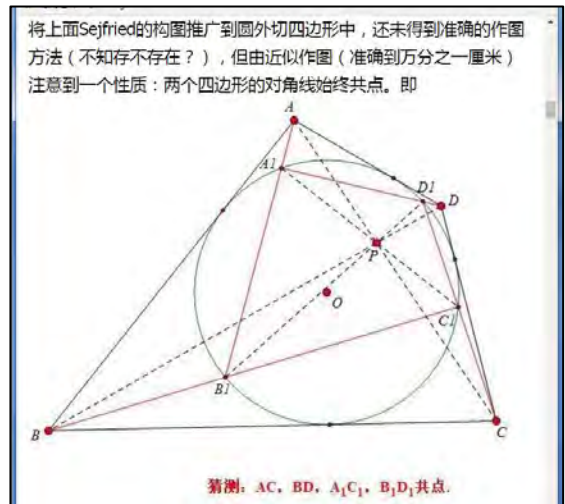
推論 3.4(幾何直觀性) $(A_1, B_1; C_1, A_2) + (A_1, B_1; D_1, A_2) = \left(\overline{A'_2A'_4}^2 / 3\overline{A'_1A'_2}^2\right) + \frac{1}{3}$

$(A_2, B_2; C_2, A_3) + (A_2, B_2; D_2, A_3) = \left(\overline{A'_1A'_3}^2 / 3\overline{A'_2A'_3}^2\right) + \frac{1}{3}$



(三) 共點性：解決懸掛四年的猜想

2013年2月，在東方網路論壇，中國平面幾何專家，葉中豪（老封）曾介紹三角形的 Sejfried 定理，當時引起不少網友加入討論，趙勇（dqzy800）將 Sejfried 構圖推廣到四邊形，並提出一個尚未證明的猜想：如圖 3-3-4，四邊形 $ABCD$ 是基礎 Sejfriedian 構圖（提出者只是近似作圖），對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 、 $\overline{A_1C_1}$ 、 $\overline{B_1D_1}$ 四線共點，截至目前（2017年6月）為止，該文章討論串並沒有任何人提出這個共點性質的證明。



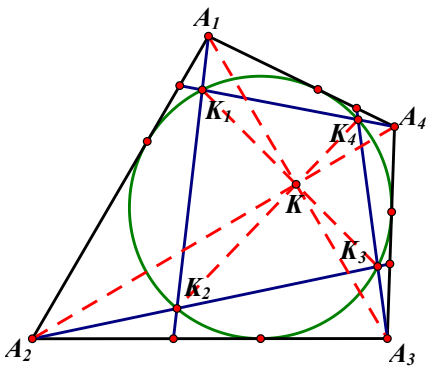
▲圖 3-3-4

事實上，透過本研究的發現即可證明此猜想。

性質 3.3 四邊形基礎 Sejfriedian 構圖中對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 、 $\overline{K_1K_3}$ 、 $\overline{K_2K_4}$ 四線共點

證明. 如圖 3-3-5，考慮射影變換後的菱形，在菱形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 中，不難得出對角線 $\overline{A'_1A'_3}$ 、 $\overline{A'_2A'_4}$ 交於其內切圓圓心 K' ，又因為四邊形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$ 為矩形，所以 $\overline{K'_1K'_3}$ 、 $\overline{K'_2K'_4}$ 通過圓心 K' ，因此 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 、 $\overline{K_1K_3}$ 、 $\overline{K_2K_4}$ 四線共點。

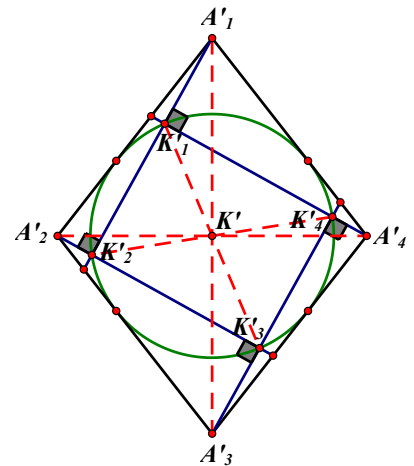
四邊形基礎 Sejfriedian 構圖



射影變換
↔

$A_1A_2A_3A_4 \leftrightarrow$ 菱形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$
 $K_1K_2K_3K_4 \leftrightarrow$ 矩形 $K'_1K'_2K'_3K'_4$
 圓 \leftrightarrow 圓

菱形基礎 Sejfriedian 構圖



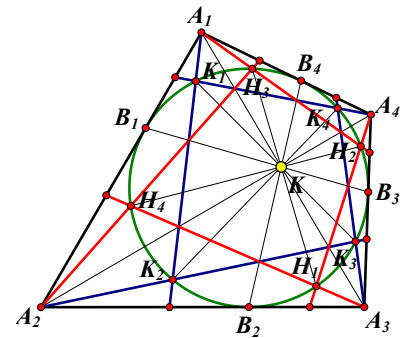
▲圖 3-3-5

□

性質 3.4 共點性： $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 、 $\overline{B_1B_3}$ 、 $\overline{B_2B_4}$ 、 $\overline{K_1K_3}$ 、 $\overline{K_2K_4}$ 、 $\overline{H_1H_3}$ 、 $\overline{H_2H_4}$ 八線共點

證明.

如圖 3-3-6, 透過本研究的射影變換模型即可證明 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 、
 $\overleftrightarrow{B_1B_3}$ 、 $\overleftrightarrow{B_2B_4}$ 、 $\overleftrightarrow{K_1K_3}$ 、 $\overleftrightarrow{K_2K_4}$ 、 $\overleftrightarrow{H_1H_3}$ 、 $\overleftrightarrow{H_2H_4}$ 八線共點。



□ ▲圖 3-3-6

(四) 特殊化：正方形的 Seifried 定理

如圖 3-3-7, 討論正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 的 Seifried 定理, 也就是邊上的交比 $(A_1, B_1; C_1, A_2)$ 、
 $(A_1, D_1; C_1, A_2)$ 為何? (因為對稱性, 邊 $\overline{A_2A_3}$ 、邊 $\overline{A_3A_4}$ 、邊 $\overline{A_4A_1}$ 與邊 $\overline{A_1A_2}$ 的交比情形相同), 以下我們利用相似三角形、畢氏定理求出其邊上交比。

性質 3.5 正方形中的 Seifried 定理：交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 、 $(A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($k = 1, 2, 3, 4; A_5 = A_1$)

證明.

1. 不失一般性, 僅需討論正方形的一邊交比情形, 如圖 3-3-7, 令正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 邊長

$$\overline{A_1A_2} = 1, \overline{A_1C_1} = \lambda, \overline{A_1K_1} = \overline{A_2K_2} = \mu$$

$$\text{因為 } \overline{OK_1} = \overline{OK_2} = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } \overline{K_1K_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{在直角三角形 } \Delta A_1A_2K_2 \text{ 中, } \mu^2 + \left(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\text{化簡可得 } \mu = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

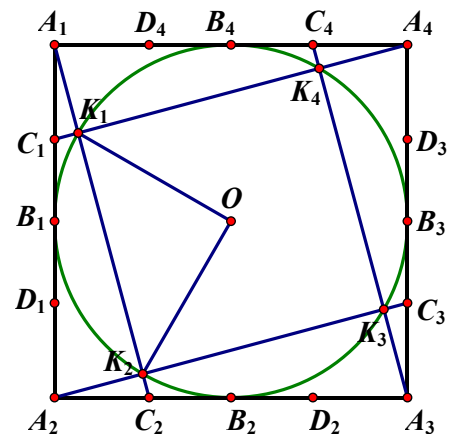
2. $\Delta A_1C_1K_1 \sim \Delta A_2A_2K_2$ (AA 相似)

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_1K_1}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{A_1K_2}}{\overline{A_1A_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\lambda} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Rightarrow \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{所以 } (A_1, B_1; C_1, A_2) = -\frac{\overline{A_1C_1}/\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1C_1}/\overline{B_1A_2}} = \frac{\sqrt{3}-2}{\frac{1}{2}-(2-\sqrt{3})} / \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{再得 } (A_1, B_1; D_1, A_2) = \frac{\overline{A_1D_1}/\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1D_1}/\overline{B_1A_2}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

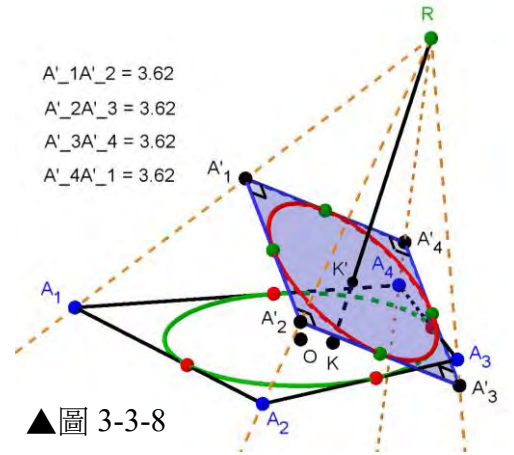


▲圖 3-3-7

(五) 一般化：刻劃四邊交比相同的四邊形基礎 Sejfriedian 構圖

我們證明四邊形基礎 Sejfriedian 構圖的交比性質是「對邊交比相同」後，也發現正方形的交比性質是「四邊交比相同」。進一步探討「**還有哪些四邊形的四邊交比相同？充要條件是什麼？**」

如圖 3-3-8，在四邊形基礎 Sejfriedian 構圖中，**什麼樣的四邊形經由射影變換後會變成正方形？**

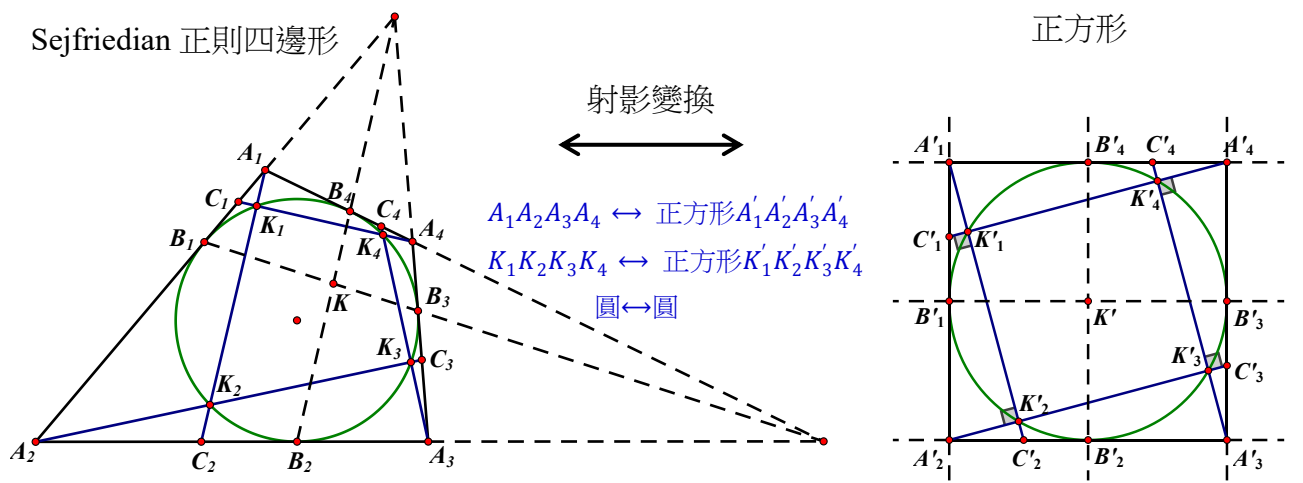


▲圖 3-3-8

性質 3.6 四邊形基礎 Sejfriedian 構圖中，四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的**四邊交比相同**的充要條件為 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overrightarrow{B_2B_4}$ 三線共點 ($\overrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overrightarrow{A_4A_1}$ 、 $\overrightarrow{B_1B_3}$ 三線共點)

證明.

由於射影變換擁有不變性，使得點列變點列，直線變直線，線束變線束，點和直線的結合性不變，為雙射對應。因此，如圖 3-3-9，考慮正方形「各邊」及「切點連線」的性質，可發現其充要性： $\overrightarrow{A'_1A'_2}$ 、 $\overrightarrow{A'_3A'_4}$ 、 $\overrightarrow{B'_2B'_4}$ 三線平行 / 三線交於同一個無窮遠點 ($\overrightarrow{A'_2A'_3}$ 、 $\overrightarrow{A'_4A'_1}$ 、 $\overrightarrow{B'_1B'_3}$ 三線平行 / 三線交於同一個無窮遠點)，也不難得出滿足前述三線平行的圓外切四邊形即為正方形。利用這個性質及射影的不變性即可刻劃四邊交比相同的四邊形基礎 Sejfriedian 構圖，我們將這樣的四邊交比相同的四邊形稱作 Sejfriedian 正則四邊形。



▲圖 3-3-9

□

推論 3.5 Sejfriedian 正則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的 Sejfried 定理：交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 、

$$(A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (k = 1, 2, 3, 4; A_5 = A_1)$$

(六) 創新構造：Sejfriedian 正則四邊形的新 Sejfriedian 構圖

我們利用 Sejfriedian 正則四邊形的對稱性，討論一個新問題：

我們倒過來，如圖 3-3-10，先考慮給定交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 為某常數時，內部的 Sejfried 四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ ($H_1H_2H_3H_4$) 的頂點落在「切點四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 」邊上，此時這個常數是多少呢？（逆定理亦成立）

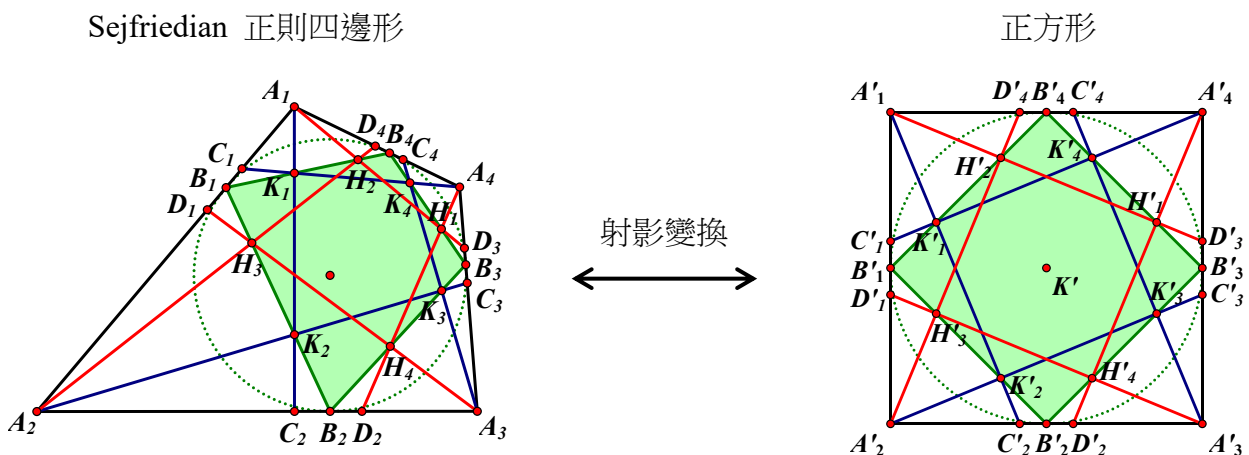
將 Sejfriedian 正則四邊形射影變換為正方形後，不難得出以下性質 3.7。注意到，射影變換後 $\angle A'_{k+1}A'_kC'_{k+1} = 22.5^\circ$ 、 $\angle A'_{k+1}A'_{k+2}D'_k = 22.5^\circ$

性質 3.7 在 Sejfriedian 正則四邊形中，若交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = -\sqrt{2} - 1$

$(A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = \sqrt{2} + 2$ ，若且唯若 Sejfried 四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ ($H_1H_2H_3H_4$) 落在切點四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 邊上（事實上共一個二次曲線）

證明.

考慮圖 3-3-10 的正方形，連接對角線 $\overline{A'_2A'_4}$ 利用平行線截比例線段、全等三角形即可證明。



▲圖 3-3-10

□

(七) Sejfried 二次曲線之調和性質

性質 3.7 中發現 Sejfriedian 正則四邊形中，若交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = -\sqrt{2} - 1$
 $(A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = \sqrt{2} + 2$ ，若且唯若 $K_1, K_2, K_3, K_4, H_1, H_2, H_3, H_4$ 八點共二次曲線。

事實上，利用射影模型我們可以給出一個更強的結論：

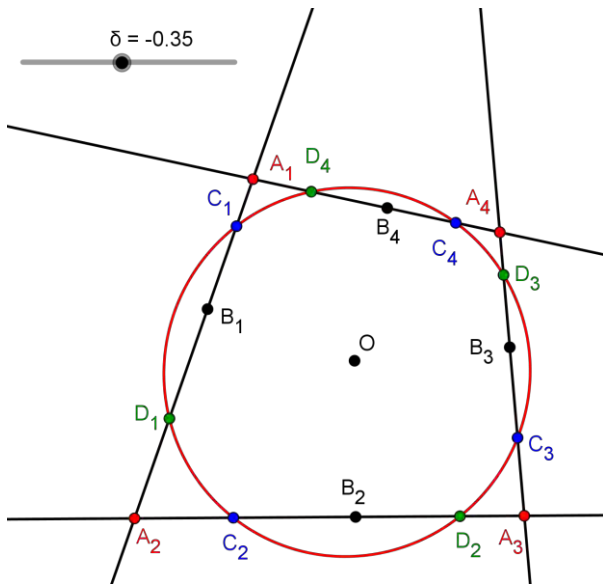
給定正則四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，點 B_1, B_2, B_3, B_4 為其內切圓在邊上切點。

性質 3.8 若分別在邊上分別取八點 C_1, C_2, C_3, C_4 及 D_1, D_2, D_3, D_4 滿足

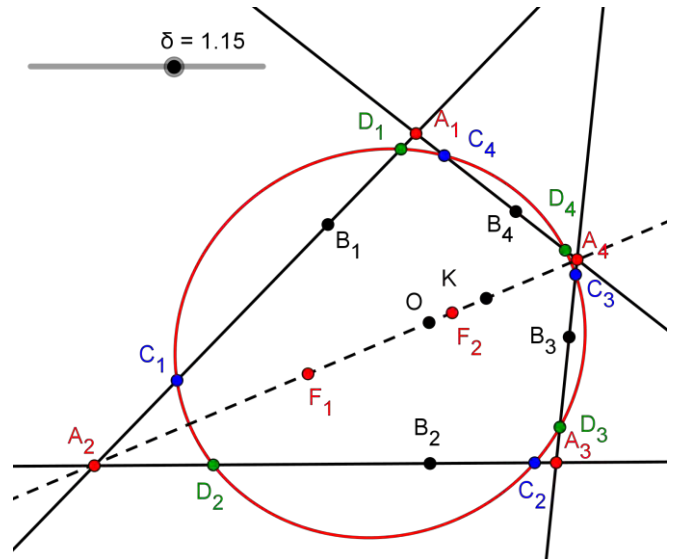
$$(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = \delta \text{ 與 } (A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = 1 - \delta$$

則點 C_k 及 D_k 共二次曲線 Γ

我們將這樣的二次曲線稱作「Sejfried 二次曲線 Γ 」(圖 3-3-11 中紅色曲線)



▲圖 3-3-11(a)



▲圖 3-3-11(b)

我們發現一個更有趣的現象：如圖 3-3-11(b)，對於所有實數 δ ，通過 C_k 及 D_k 的 Sejfried 二次曲線的兩個焦點 F_1 與 F_2 (當 Sejfried 二次曲線為拋物線時，其中一個焦點為無窮遠點)、與內切圓圓心 O 與對角線交點 K 成調和點列，即 $(F_1, F_2; O, K) = -1$ 。

【討論】 F_1, F_2, O, K 調和性質與四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 無關

事實上，要處理圖 3-3-11(b) 平面上的四邊形 $(F_1, F_2; O, K) = -1$ 是非常困難的！因為平面上能提供的資訊量太少。但是依據我們的立體射影模型 (如圖 3-3-12) 則可以看出四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 平面上的 Γ 是正方形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 平面上內切圓之同心圓 Γ' 的射影二次曲線，依據構造對稱性 (表 1)，可得出性質 3.9。注意到，因為 Γ' 為同心圓 (直徑為 $\overline{A'B'}$ 、圓心

為 K')，所以調和點列的本質是斜圓錐 $RA'B'$ 的平面截痕問題，與四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 無關。

性質 3.9 F_1, F_2, O, K 四點共線

性質 3.10 $(F_1, F_2; O, K) = -1$ ($\overrightarrow{TF_1}^2 = \overrightarrow{TF_2}^2 = \overrightarrow{TK} \times \overrightarrow{TB}$)

證明.

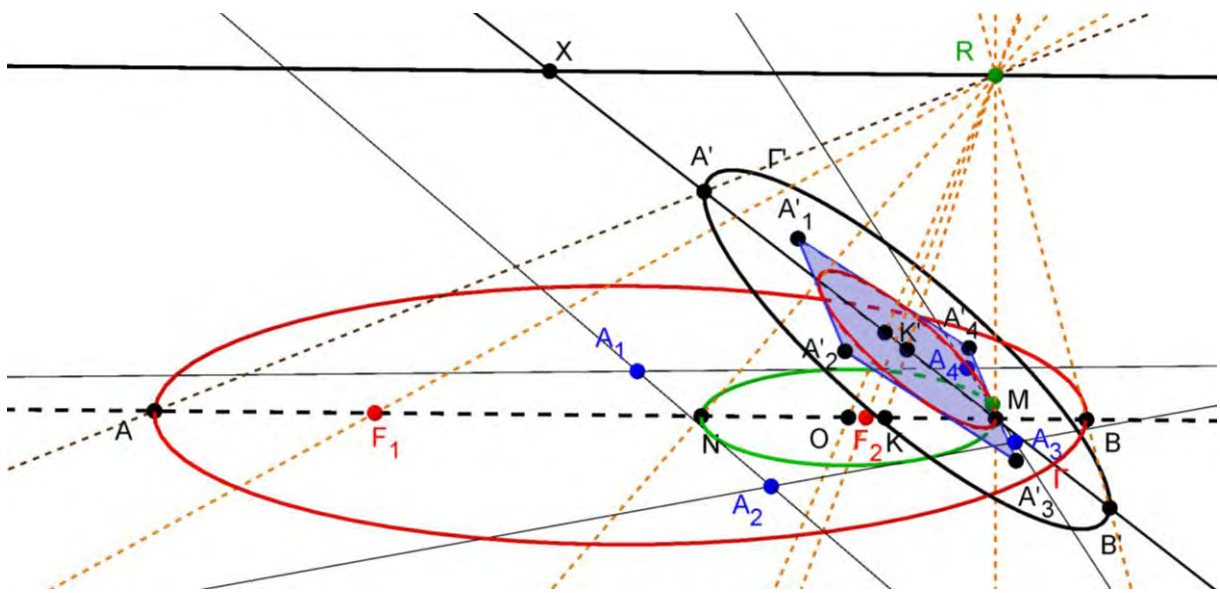
1. 因為 F_1, F_2, O, K 四點共線，如圖 3-3-12 考慮將斜圓錐 $RA'B'$ 的情形簡化為二維平面 RAB ，
 再作 $\overrightarrow{RX} \parallel \overrightarrow{AB}$ 交於 R 點，依據文獻[4]可得 Seifried 二次曲線 Γ 的正焦弦長為

$\frac{\overrightarrow{B'X} \times \overrightarrow{A'X}}{\overrightarrow{RX} \times \overrightarrow{RX}} \times \overrightarrow{AB}$ 。交比參數 δ 決定了 $\overrightarrow{K'A'}$ 的長度，當 A' 與 X 重合時， Γ 為拋物線； A' 在 \overrightarrow{RX} 下方時， Γ 為橢圓； A' 在 \overrightarrow{RX} 上方時， Γ 為雙曲線。

2. 令 T 為二次曲線 Γ 的中心 (即 \overrightarrow{AB} 中點)、 $\overrightarrow{MN} = a$ 、 $\overrightarrow{RM} = b$ 、 $\overrightarrow{RN} = c$ ($a^2 + b^2 = c^2$)、
 $\overrightarrow{AN'} = \overrightarrow{BM'} = d$ ，再利用正焦弦長，則可推得 $\overrightarrow{TF_1}^2 = \overrightarrow{TF_2}^2 = \overrightarrow{TB}^2 \times \left(1 - \frac{\overrightarrow{B'X} \times \overrightarrow{A'X}}{\overrightarrow{RX} \times \overrightarrow{RX}}\right)$ 。利用相似

三角形化簡可得 $\frac{\overrightarrow{B'X} \times \overrightarrow{A'X}}{\overrightarrow{RX} \times \overrightarrow{RX}} = \frac{\overrightarrow{B'M} \times \overrightarrow{A'M}}{\overrightarrow{BM} \times \overrightarrow{AM}} = \frac{(ad+bc)(b^3-acd)}{b^4c}$ ，最後推得 $\frac{\overrightarrow{TK}}{\overrightarrow{TB}} \times \frac{\overrightarrow{TO}}{\overrightarrow{TB}} = \frac{\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{KB}}{\overrightarrow{TB}} \times \frac{\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{TB}} =$
 $1 - \left(\frac{\overrightarrow{KB}}{\overrightarrow{TB}} + \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{TB}} - \frac{\overrightarrow{KB}}{\overrightarrow{TB}} \times \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{TB}}\right) = 1 - \frac{\overrightarrow{B'X} \times \overrightarrow{A'X}}{\overrightarrow{RX} \times \overrightarrow{RX}}$ ，即 $\overrightarrow{TF_1}^2 = \overrightarrow{TF_2}^2 = \overrightarrow{TK} \times \overrightarrow{TB}$ 。

3. 當 A' 與 X 重合時， Γ 為拋物線，即 T 點和 F_1 點為無窮遠點，亦滿足 $(F_1, F_2; O, K) = -1$ ，
 此時 F_2 為 \overrightarrow{OK} 的中點。



▲圖 3-3-12

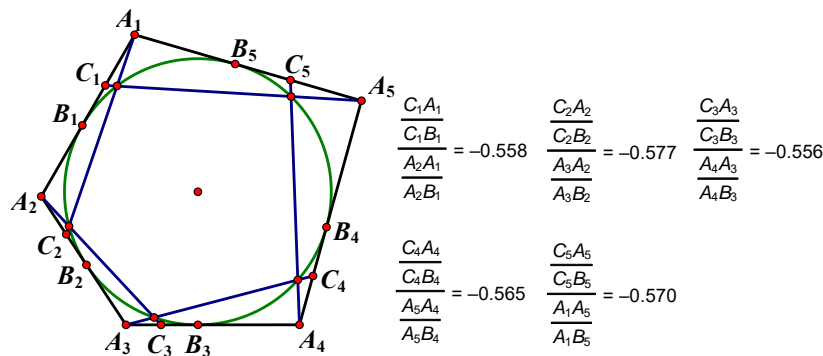
□

四、正 n 邊形的 Sejfried 交比及收斂性

(一) 正 n 邊形的 Sejfried 交比之通式

Sejfried 與 Shelomovskii (2012) 證明了三角形的 Sejfried 交比性質。關於四邊形，我們推廣證明了四邊形基礎 Sejfriedian 構圖及其 Sejfried 定理 (表 3)。

關於五邊形、六邊形等多邊形的基礎 Sejfriedian 構圖存在唯一性，不難證明出來。但是這些多邊形沒有較特殊的性質，我們亦嘗試仿照四邊形對角線交點的射影模型作法，但是並沒有得到特殊的幾何刻劃 (圖 3-4-1)，所以接下來我們僅探討正 n 邊形的 Sejfried 定理。



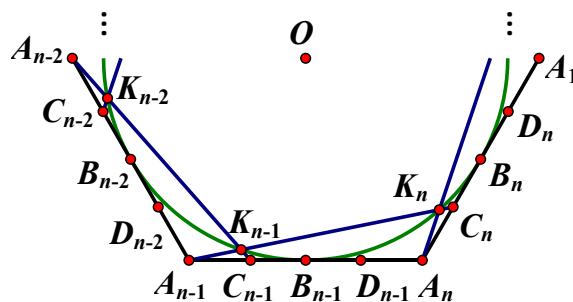
▲圖 3-4-1

關於構造作圖部分，因為正 n 邊形具有對稱性，所以不難得出正 n 邊形的基礎 Sejfriedian 構圖存在唯一性，因此我們直接進行正 n 邊形的 Sejfried 定理交比的通式推導。

表 3 正三角形與正方形的 Sejfried 定理

正三角形的 Sejfried 定理	正方形的 Sejfried 定理
交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

如圖 3-4-2，給定正 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$)，我們將利用相似三角形、餘弦定理推導出交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 的一般式，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, n$; $A_{n+1} = A_1$ ，即用 n 表示（因為圖形具有對稱性，僅討論 C_k 點即可推論 D_k 點所構成的交比）。



▲圖 3-4-2

不失一般性，令 $\overline{A_k A_{k+1}} = 1$ 、 $\overline{A_k K_k} = \mu$ 、 $\overline{A_k C_k} = \lambda$ 。

性質 4.1 $\overline{A_{n-1} K_{n-1}} = \mu = \frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 1} \right)$

證明.

如圖 3-4-3(a)，在直角 $\Delta O A_{n-1} B_{n-1}$ 中，由正切函數可得 $\overline{O B_{n-1}} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{n}$

所以 $\overline{O K_{n-1}} = \overline{O K_n} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{n}$

如圖 3-4-2(b)，在等腰 $\Delta O K_{n-1} K_n$ 中，根據餘弦定理有

$$\overline{K_{n-1} K_n}^2 = 2\overline{O K_n}^2 - 2\overline{O K_n}^2 \cos \frac{2\pi}{n} = \cos^2 \frac{\pi}{n}$$

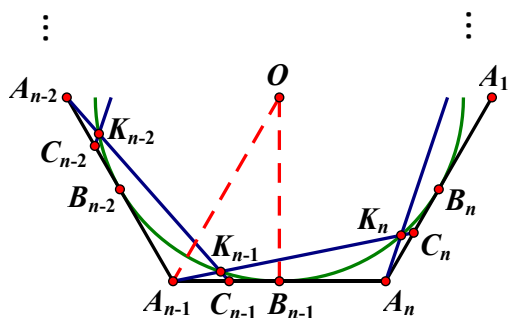
又因為 $n \geq 3$ ，所以 $\overline{K_{n-1} K_n} = \cos \frac{\pi}{n}$

在 $\Delta A_{n-1} K_n A_n$ 中，根據餘弦定理

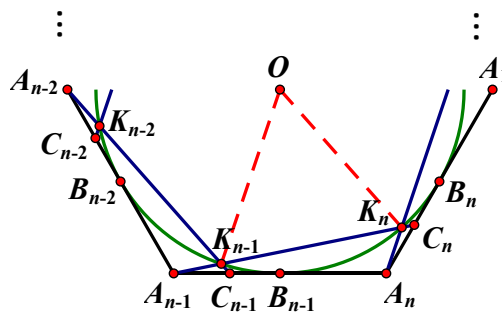
$$\overline{A_{n-1} K_n}^2 + \overline{A_n K_n}^2 - 2\overline{A_n K_n} \times \overline{A_{n-1} K_n} \times \cos \angle A_{n-1} K_n A_n = \overline{A_{n-1} A_n}^2$$

因為 $\sin \frac{\pi}{n} > 0$ ，前式化簡可得 $4\mu^2 + 4\cos \frac{\pi}{n} \mu - 1 = 0$

取其正根得到 $\overline{A_{n-1} K_{n-1}} = \mu = \frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 1} \right)$



▲圖 3-4-3(a)



▲圖 3-4-3(b)

□

性質 4.2 正 n 邊形的 Sejfried 定理： $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = \frac{\lambda}{2\lambda-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n; A_{n+1} = A_1$)，

其中 $\lambda = \frac{\cos \frac{2\pi}{n} \mu^2 + \mu \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n}}}{1 - \mu^2}$

證明. 如圖 3-4-3(b)中，因為 $\Delta A_{n-1}K_{n-1}C_{n-1} \sim \Delta A_{n-1}A_nC_n$ (AA 相似)，所以

$\overline{A_{n-1}K_{n-1}} : \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_{n-1}C_{n-1}} : \overline{A_{n-1}C_n}$ ，可得 $\mu : 1 = \lambda : \sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \frac{2\pi}{n}}$ ，化簡前式，取其正根可得到

$$\lambda = \frac{\cos \frac{2\pi}{n} \mu^2 + \mu \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n}}}{1 - \mu^2}$$

依據交比定義 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = -\frac{\lambda}{\frac{1}{2}-\lambda} / \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2\lambda-1}$

□

(二) 交比 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 的收斂性

關於正 n 邊形的 Sejfried 交比，我們找出其一般通式：

$$(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = \frac{\lambda}{2\lambda-1}$$

式 (1)

將性質 4.1 與性質 4.2 合併可得 λ

$$\lambda = \frac{\left(\cos \frac{2\pi}{n}\right) \left(\frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 1}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 1}\right)\right) \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 1}\right)\right)^2 \left(-\sin^2 \frac{2\pi}{n}\right) + 1}}{1 - \left(\frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 1}\right)\right)^2}$$

式 (2)

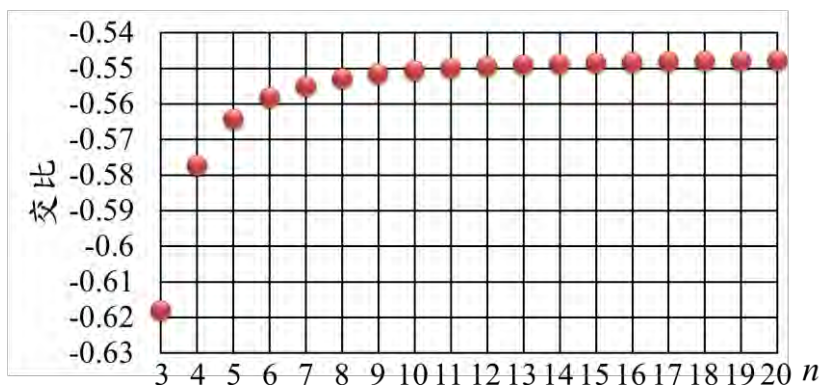
利用 Excel，我們先將 $n =$

3, 4, ..., 20 代入 λ 並計算交比

$(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 。如圖 3-4-4，可知當 n 遞增時， $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 會遞增。

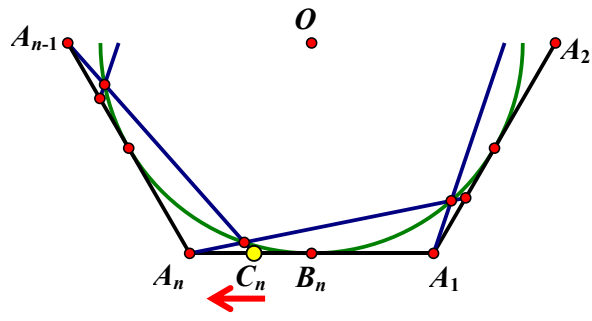
換句話說，當正多邊形的邊數

越大時， $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 會遞增。



▲圖 3-4-4

如圖 3-4-5，幾何上的意義是，當正多邊形的邊數越大時， C_n 點會向左方運動。



▲圖 3-4-5

接著，當 n 趨近無限大， C_n 點會向左方運動「收斂」於何處？也就是說當 n 趨近無限大時，交比 $\frac{\lambda}{2\lambda-1}$ 會收斂到哪個值？以下進行證明：

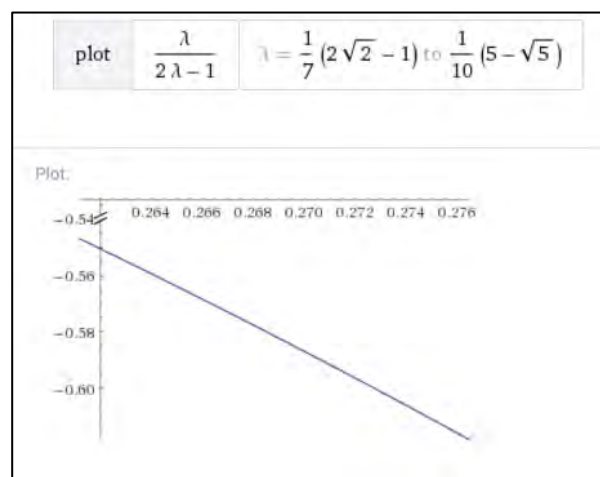
Step1：討論 λ 的範圍

令 $x = \cos \frac{\pi}{n}$ ，因為 $n \in \mathbb{N} \wedge n > 3$ ，所以 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ，式 (2) 可寫成

$$\lambda = f(x) = \frac{(2x^2 - 1) \left(\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) \sqrt{\left(\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)^2 (4x^2(x^2 - 1)) + 1}}{1 - \left(\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)^2}$$

注意到， $\lambda = \overline{A_{n-1}K_{n-1}} > 0$ ，我們利用 WolframAlpha 網站的計算功能求出 λ 的最大值，當 $x = \frac{1}{2}$ ， λ 有最大值 $\frac{5-\sqrt{5}}{10} \cong 0.276393$ ，同理可得 $x = 1$ ， λ 有最小值 $\frac{2\sqrt{2}-1}{7} \cong 0.261203$

Step2：繪製 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = f(\lambda) = \frac{\lambda}{2\lambda-1}$ 的函數圖形 (圖 3-4-6)



▲圖 3-4-6

Step3： $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = f(\lambda) = \frac{\lambda}{2\lambda-1}$ 的收斂值

綜合 Step1、Step2 可得，當 n 趨近無限大時， $x = \cos \frac{\pi}{n}$ 趨近於 1， λ 趨近 $\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$ ， $f(\lambda)$

會收斂在 $-\frac{2\sqrt{2}+1}{7} \cong -0.546918$ ，而有以下性質 4.3。

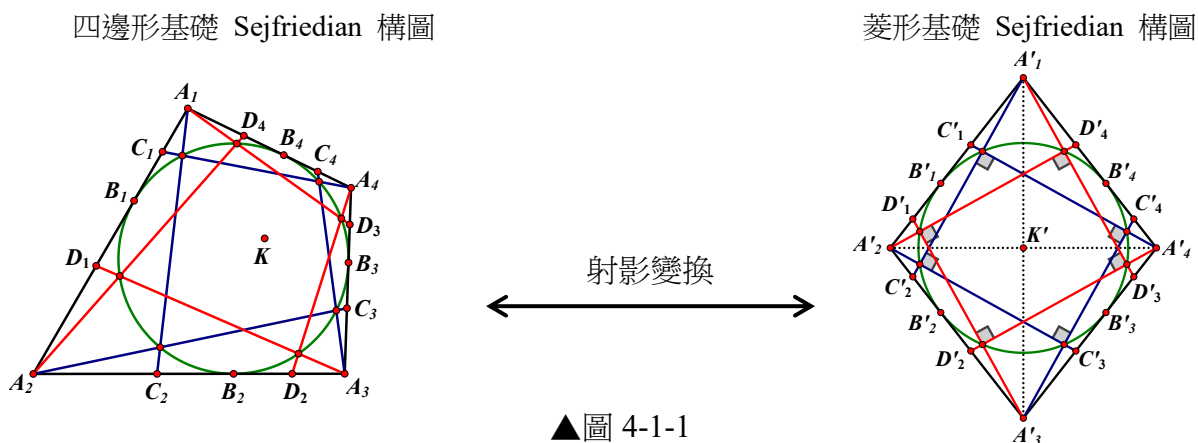
性質 4.3 正 n 邊形的 Sejfried 定理： $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = \frac{\lambda}{2\lambda-1}$ ，當 n 趨近無限大時，
 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 會收斂在 $-\frac{2\sqrt{2}+1}{7} \cong -0.546918$ ，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, n$; $A_{n+1} = A_1$

肆、 結論

本研究構造射影模型，從高觀點將 Sejfried 定理推廣至任意圓外切四邊形與正多邊形，發現四邊形基礎 Sejfriedian 構圖的「存在性、唯一性、共點性」，以及 Sejfried 交比的直觀幾何意義。我們亦刻劃 Sejfriedian 正則四邊形，推廣 Sejfried 二次曲線中的調和點列性質。我們與原定理提出者 Michael Sejfried 進行學術討論與諮詢，已經確認本研究推廣的四邊形的 Sejfried 定理是嶄新的成果。

一、 建構四邊形基礎 Sejfriedian 構圖投影模型

我們構造「以圓外切四邊形的對角線交點 K 作為投影模型控制點，構造點光源的投影點 R 」之方法，透過此射影模型，對於每一個四邊形基礎 Sejfriedian 構圖都可以變換為對應的菱形基礎 Sejfriedian 構圖（圖 4-1-1）。



二、 四邊形的 Sejfried 定理與直觀幾何意義

應用圖 4-1-1 的射影變換，發現四邊形的 Sejfried 定理，是對邊交比相同，而不同於三角形的 Sejfried 定理（Sejfried 與 Shelomovskii 研究發現三角形為每邊交比相同），即

$$(A_1, B_1; C_1, A_2) = (A_3, B_3; C_3, A_4) \text{ 且 } (A_2, B_2; C_2, A_3) = (A_4, B_4; C_4, A_1)$$

研究發現該交比和，可由投影對應的菱形之邊長與對角線長度所表示。這樣的觀點是 Sejfried 與 Shelomovskii 研究中沒有的。

$$\frac{1}{3} < (A_k, B_k; C_k, A_k) + (A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = \frac{\overline{A'_k A'_{k+1}}^2 + \overline{A'_{k+1} A'_{k+3}}^2}{3\overline{A'_k A'_{k+1}}^2} < \frac{5}{3}$$

三、Sejfriedian 正則四邊形

針對所有的四邊形基礎 Sejfriedian 構圖，我們刻劃出 Sejfriedian 正則四邊形，其四邊的 Sejfried 交比都相同，充要條件為兩對邊及切點連線 $\overline{A_1 A_2}$ 、 $\overline{A_3 A_4}$ 、 $\overline{B_2 B_4}$ 三線共點。

四、Sejfried 二次曲線族的調和性質

以交比為參數，可推廣出正則四邊形的 Sejfried 二次曲線族，研究發現該二次曲線族的兩個焦點與內切圓圓心、對角線交點，四點恆為「調和點列」，亦即 $(F_1, F_2; O, K) = -1$ 。

五、多邊形的 Sejfried 定理及收斂性

多邊形的 Sejfried 定理並無特殊幾何性質，所以我們針對正 n 邊形探究其 Sejfried 定理。我們找出 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 的一般式並發現 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 會收斂在 $-\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$ 。

伍、參考文獻

- [1] M. Sejfried, V.Shelomovskii (2012). *Elementary Proof of Sejfriedian Properties*, at the Proceedings of the 17th Asian Technology Conference in Mathematics, pp 342-352.
- [2] V. Shelomovskii (2014). *Sejfriedian: existence, uniqueness, constructing and the proof of properties*, at the Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG 2014), pp 1095-1110.
- [3] 沈文選、楊清桃 (2010)。幾何瑰寶：平面幾何 500 名題暨 1000 條定理 (下)。哈爾濱工業大學出版社。
- [4] 蘇惠玉 (2008)。HPM 與高中幾何教學：以圓錐曲線的正焦弦為例。HPM 通訊，第十一卷第二、三期合刊，1-11。

【評語】 030413

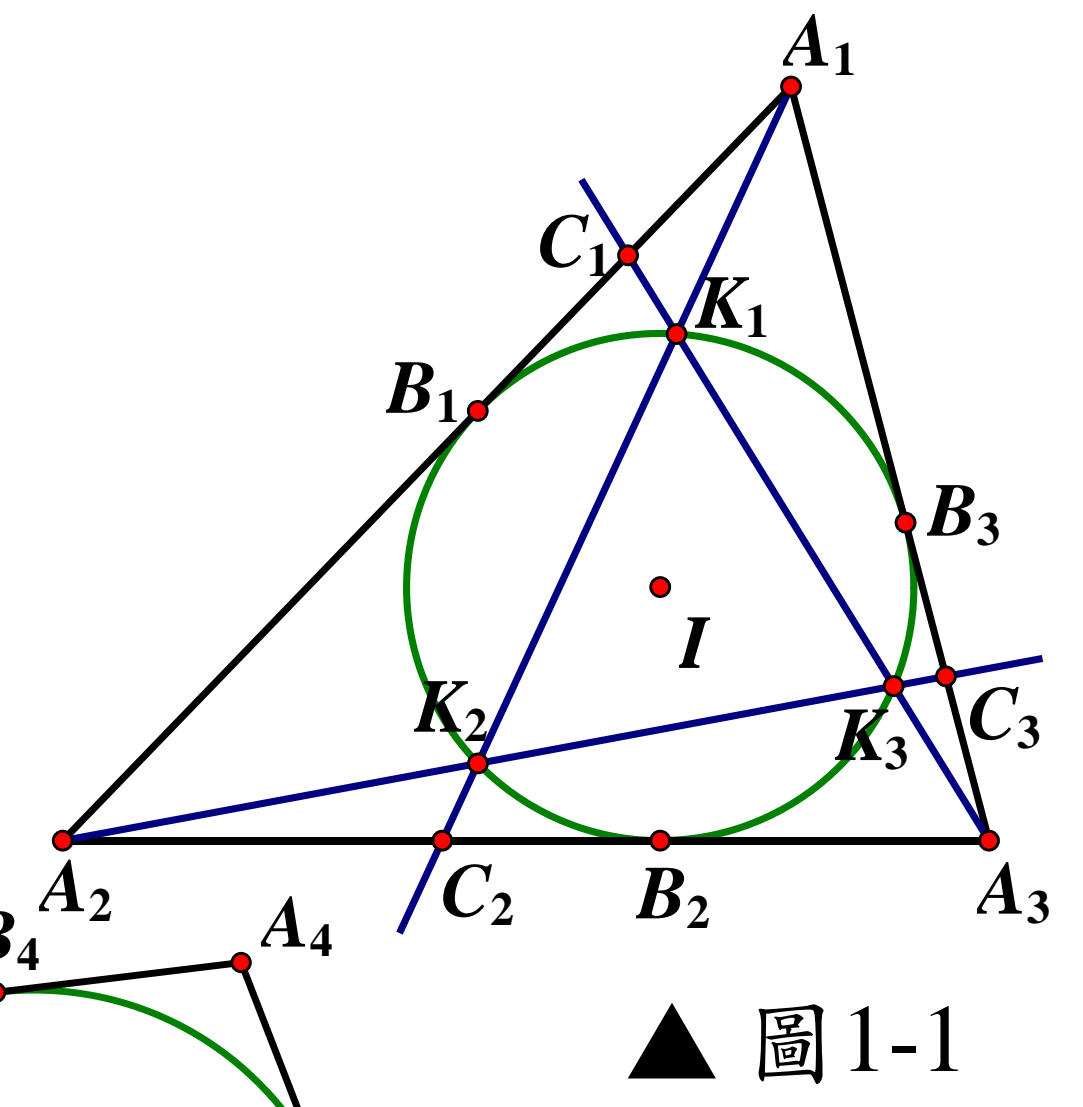
作者推廣某個小研討會中發表之平面幾何性質，得到一些性質。作者用到射影幾何為工具，展現御繁為簡的能力，研究的過程與思路都自然，學生數學能力相當強，值得嘉許。可惜的是原始的選材問題是一個幾何小性質（並非所有數學性質都值得以發表者為名稱為”定理”），深度亦沒有強到需要使用高等數學推廣或探究，因此作者數學能力的優勢在作品中並沒有能充分發揮，是可惜之處。往後選材可以再審慎過濾，宜選擇有數學理論潛力的問題，會能更凸顯數學能力的優勢。

作品海報

壹、原始問題

本研究起源於 Sejfried 與 Shelomovskii 在 2012 年 ATCM 國際研討會上發表關於三角形的幾何定理（稱為 Sejfried 定理）：

給定 $\Delta A_1A_2A_3$ 及其內切圓，分別過三個頂點作射線 $\overrightarrow{A_1C_2}, \overrightarrow{A_2C_3}, \overrightarrow{A_3C_1}$ 。若此三條射線彼此的交點都落在內切圓上，若且唯若交比 $(A_1, B_1; C_1, A_2) = (A_2, B_2; C_2, A_3) = (A_3, B_3; C_3, A_1) = 1 - \phi$



▲ 圖 1-1

本研究以高觀點建構射影模型研究任意四邊形的基礎 Sejfriedian 構圖、Sejfried 定理與 Sejfried 二次曲線族，並推廣至多邊形。

貳、預備知識

定義 1. 交比：給定平面上共線的四點 A, B, C, D ，其交比為有向線段比 $(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} / \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ 。

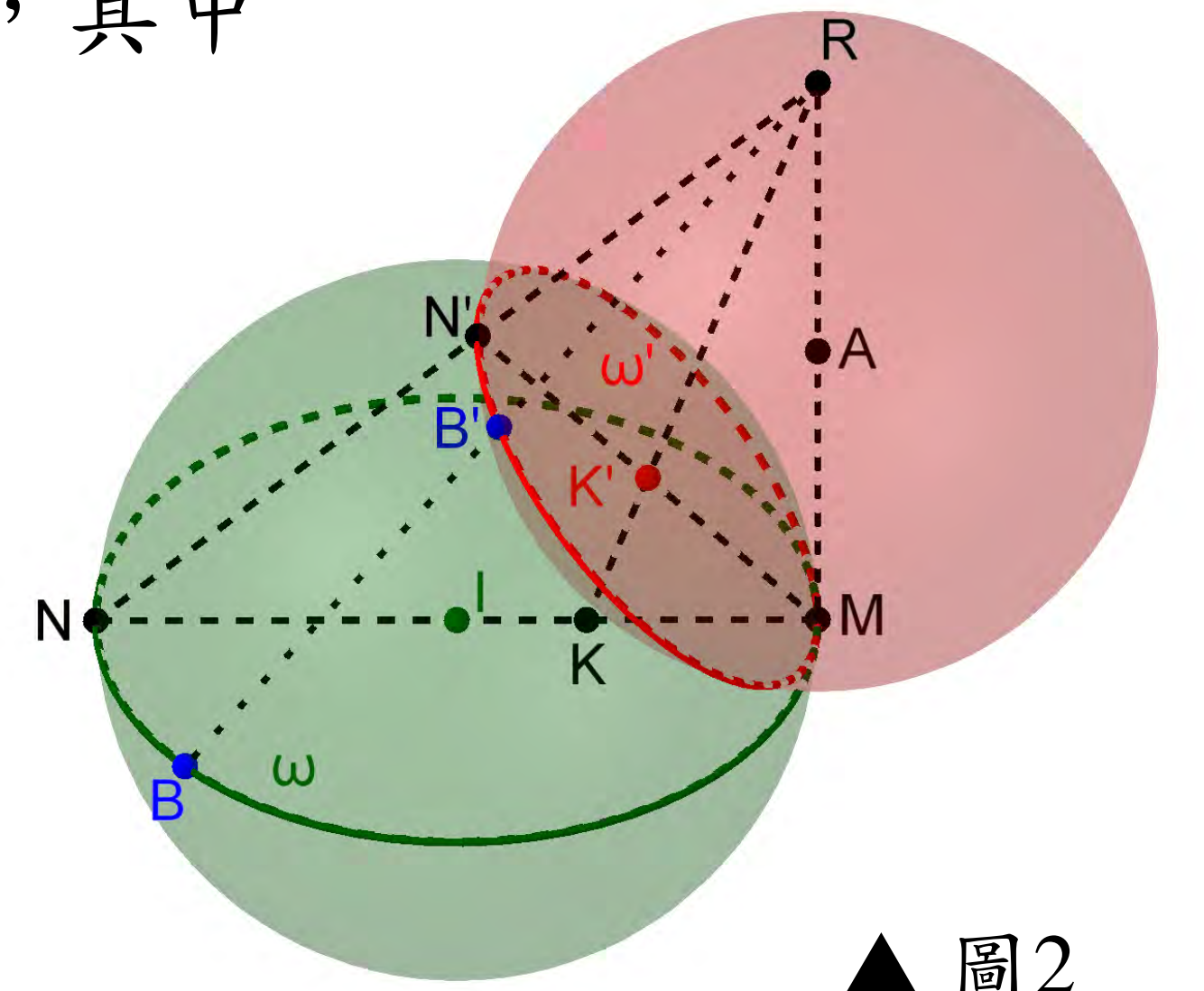
定義 2. 交比為射影不變量：給定平面上直線 L 上四點 A, B, C, D ，在 L 外取一點 P ，直線 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$ 交另一條直線 M 於 A', B', C', D' ，則交比 $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ 。

定義 3. 圓射影到圓：構造圓射影到圓 $\omega' \mapsto \omega$ ($\omega \mapsto \omega'$) 的立體模型，其中

$$\overline{MN} = \overline{RM} \sqrt{\frac{\overline{NK}}{\overline{KM}} - 1}.$$

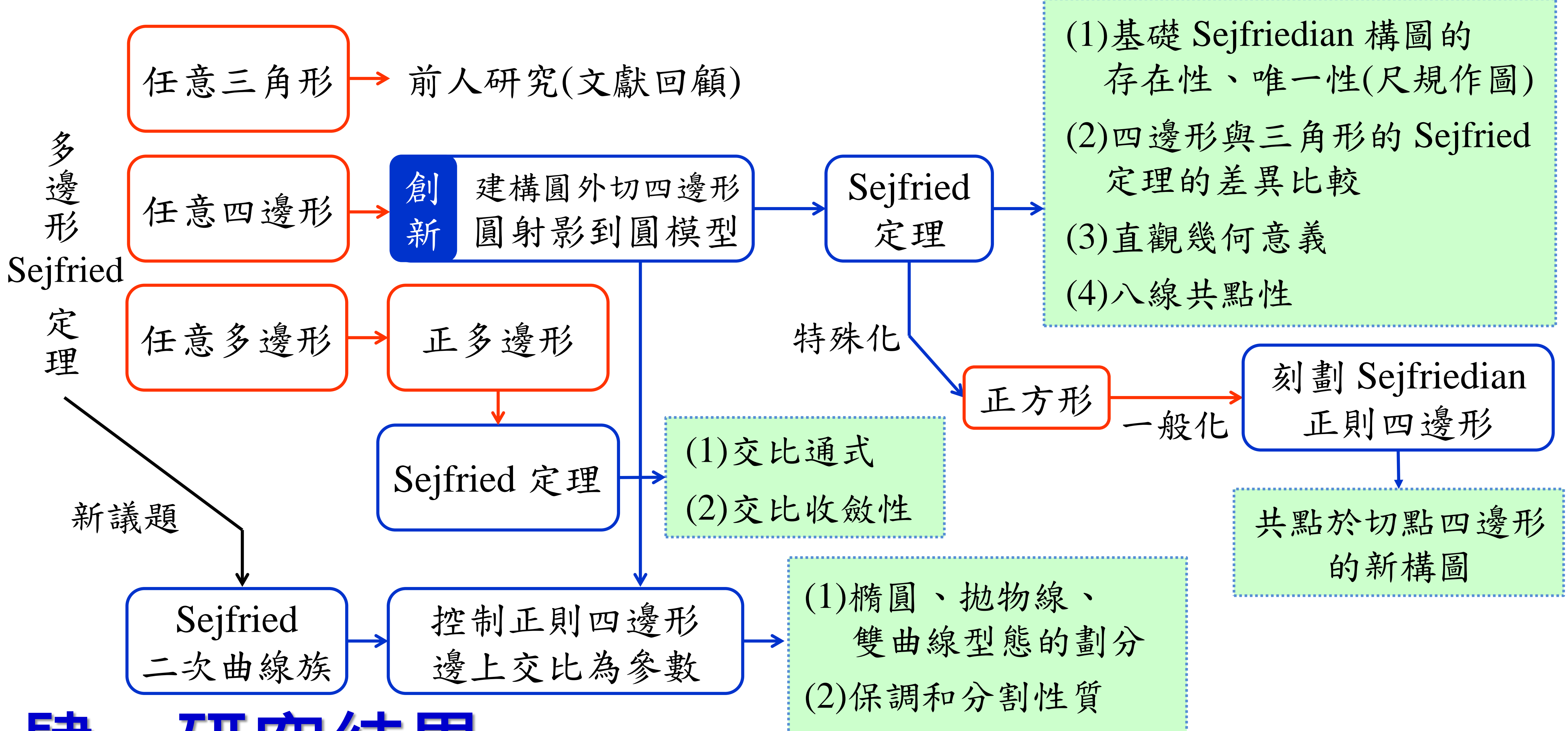
定義 4. 反演變換：平面上給定半徑為 r 的圓 O ，對任意一點 P ，將其變換為射線 \overline{OP} 上的一點 P' ，使得 $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$ ，則稱 P' 為 P 關於圓 O 的反演點。

定義 5. 多邊形的基礎 Sejfriedian 構圖、Sejfried 二次曲線族



▲ 圖 2

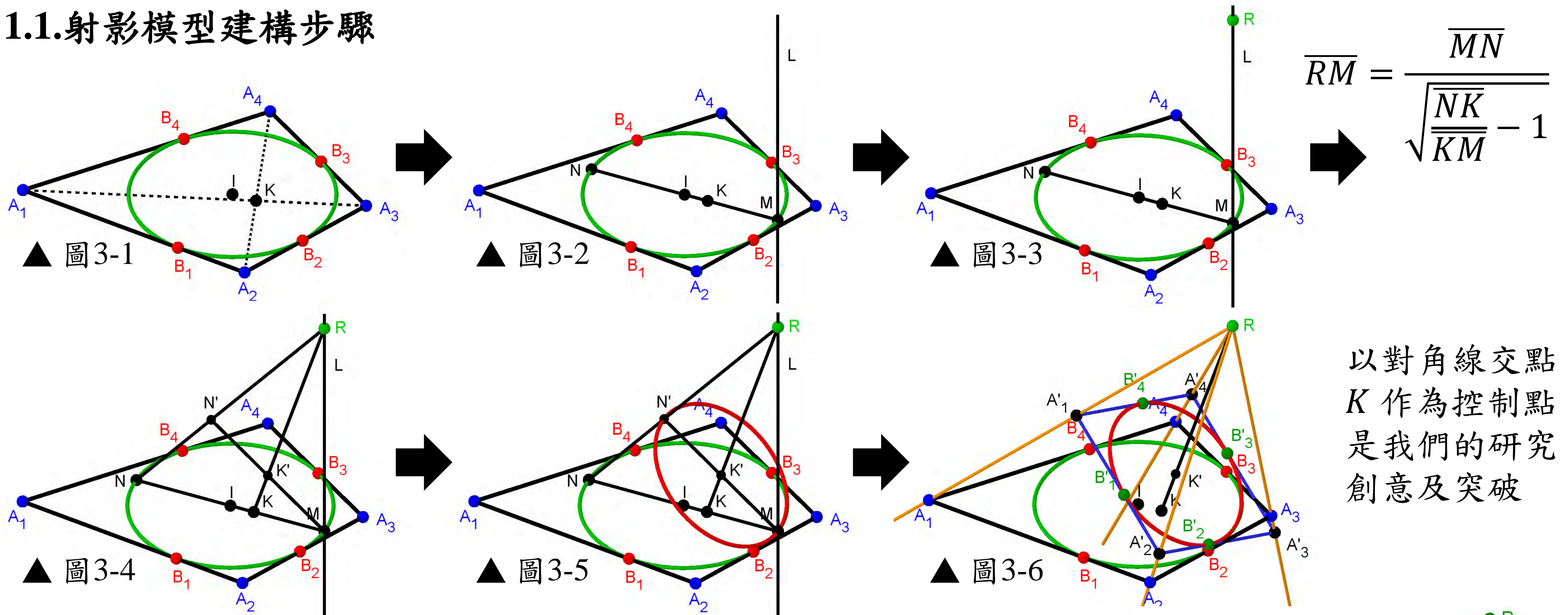
參、研究架構



肆、研究結果

1. 圓外切「任意四邊形」射影到圓外切「菱形」的模型

1.1. 射影模型建構步驟

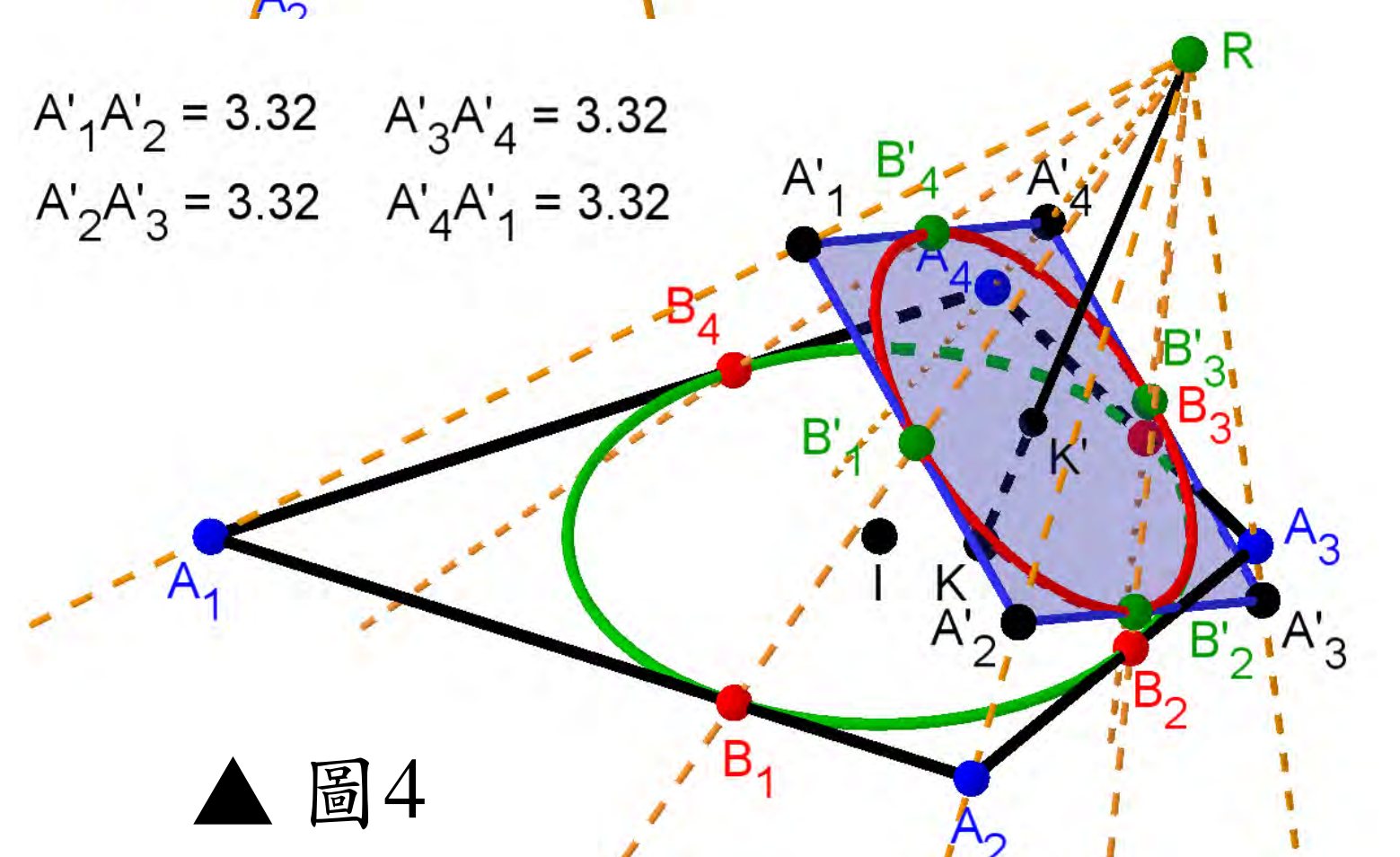


以對角線交點 K 作為控制點是我們的研究創意及突破

1.2. 刻劃「射影四邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 」

引理 1. (牛頓定理) 圓外切四邊形的對角線交點和對邊切點連線四線共點。

性質 1. 射影四邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 必為菱形。

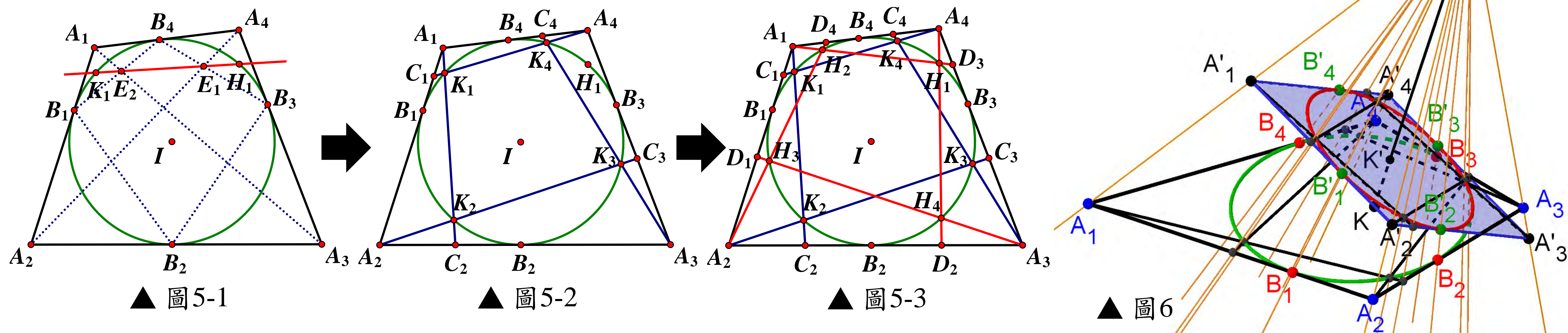


▲ 圖 4

2. 任意四邊形基礎 Sejfriedian 構圖的存在性與唯一性

性質2. (存在唯一性) 利用反演變換證明菱形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ 的基礎 Sejfriedian 構圖的存在唯一性。

推論1. (尺規作圖) 任意四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的基礎 Sejfriedian 構圖。



3. 任意四邊形的 Sejfried 定理探究



▲ 圖7：任意四邊形的基礎 Sejfriedian 構圖變換。

3.1. 任意四邊形的 Sejfried 定理——對邊交比相同

性質3. $(A_1, B_1; C_1, A_2) = (A_3, B_3; C_3, A_4)$ 且 $(A_2, B_2; C_2, A_3) = (A_4, B_4; C_4, A_1)$.

$(A_1, B_1; D_1, A_2) = (A_3, B_3; D_3, A_4)$ 且 $(A_2, B_2; D_2, A_3) = (A_4, B_4; D_4, A_1)$.

推論2. $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) + (A_k, B_k; D_k, A_{k+1})$ 為常數。

3.2. 任意四邊形的 Sejfried 定理的直觀幾何意義

給定任意四邊形 $A_1A_2A_3A_4 \mapsto$ 菱形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$ ，令菱形對角線 $\overline{A'_1A'_3} / \overline{A'_2A'_4} = x$ ，則

性質4. $(A_1, B_1; C_1, A_2) = \frac{-x^2+1-2\sqrt{x^4+x^2+1}}{3(x^2+1)}$ ； $(A_1, B_1; D_1, A_2) = \frac{2x^2+4+2\sqrt{x^4+x^2+1}}{3(x^2+1)}$

$(A_2, B_2; C_2, A_3) = \frac{x^2-1-2\sqrt{x^4+x^2+1}}{3(x^2+1)}$ ； $(A_2, B_2; D_2, A_3) = \frac{4x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}{3(x^2+1)}$

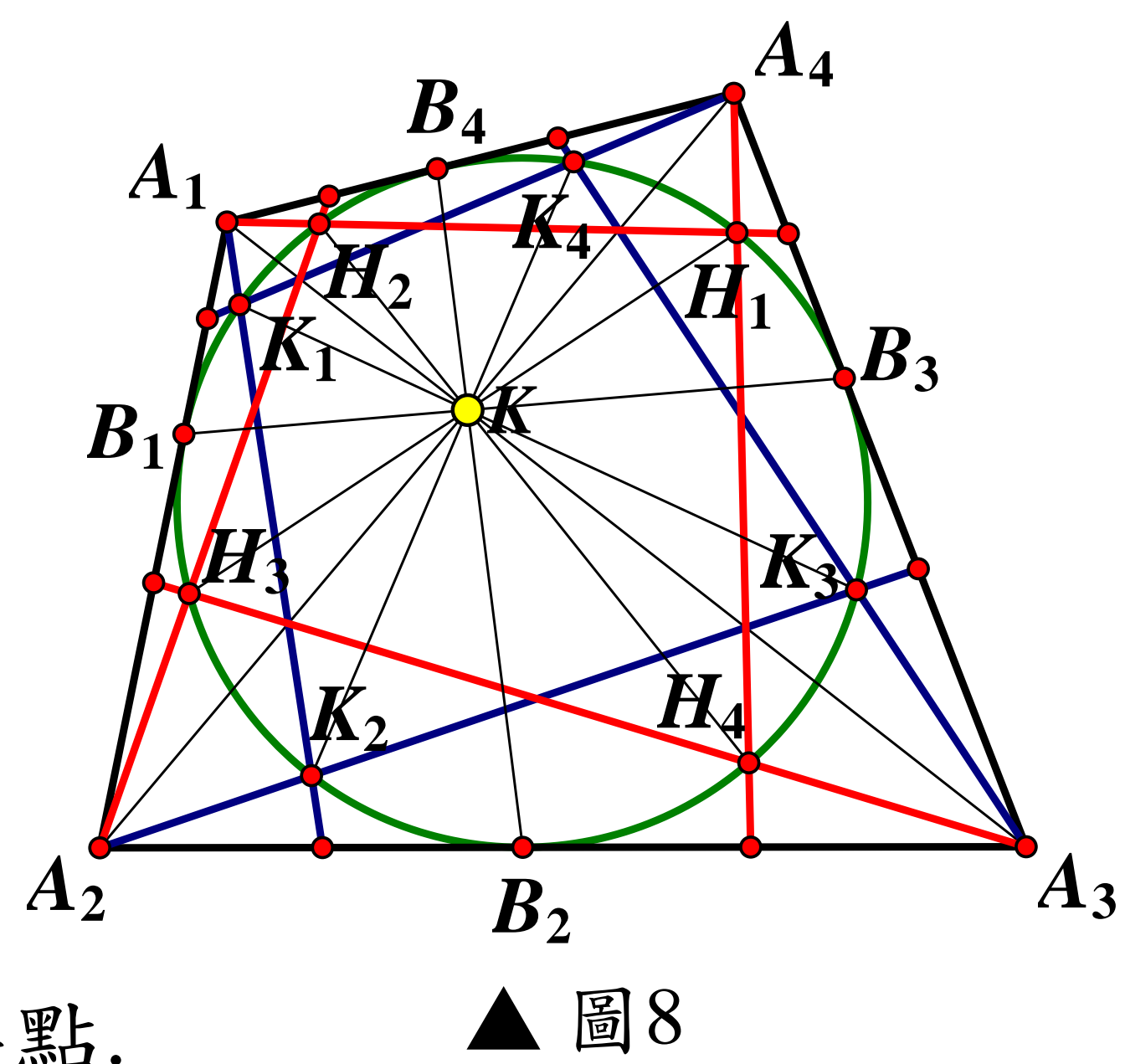
推論3. $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) + (A_k, B_k; D_k, A_{k+1})$ 的下界為 $\frac{1}{3}$ 、上界為 $\frac{5}{3}$

3.3. 共點性 (證明中國東方網路數學論壇的猜想)

性質5. 對角線 $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{K_1K_3}$, $\overline{K_2K_4}$ 四線共點。

考慮一組兩個 Sejfried 多邊形，本研究給出了更強的結論

推論4. 對角線 $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{K_1K_3}$, $\overline{K_2K_4}$, $\overline{H_1H_3}$, $\overline{H_2H_4}$ 與切點連線 $\overline{B_1B_3}$, $\overline{B_2B_4}$ 八線共點。



▲ 圖8

3.4. 特殊化：正方形的 Sejfried 定理 (四邊交比相同)

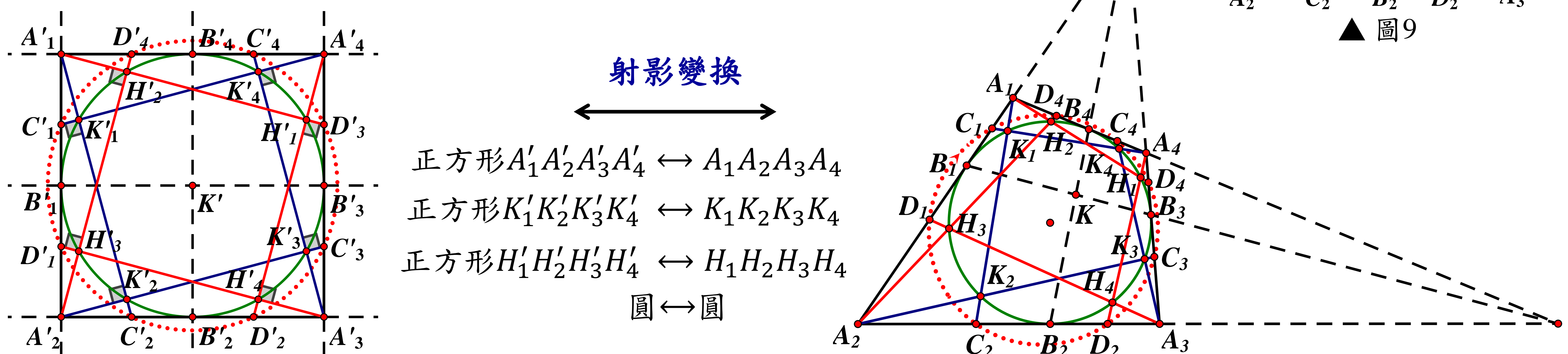
性質6. 正方形的 Sejfried 定理： $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 、 $(A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

3.5. 一般化：刻劃正則四邊形的基礎 Sejfriedian 構圖 (四邊交比相同)

性質7. Sejfriedian 正則四邊形的充要條件為 $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{B_2B_4}$ 三線共點

($\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_4A_1}$, $\overline{B_1B_3}$ 三線共點)。

性質8. Sejfriedian 正則四邊形中， $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) + (A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = 1$ 。



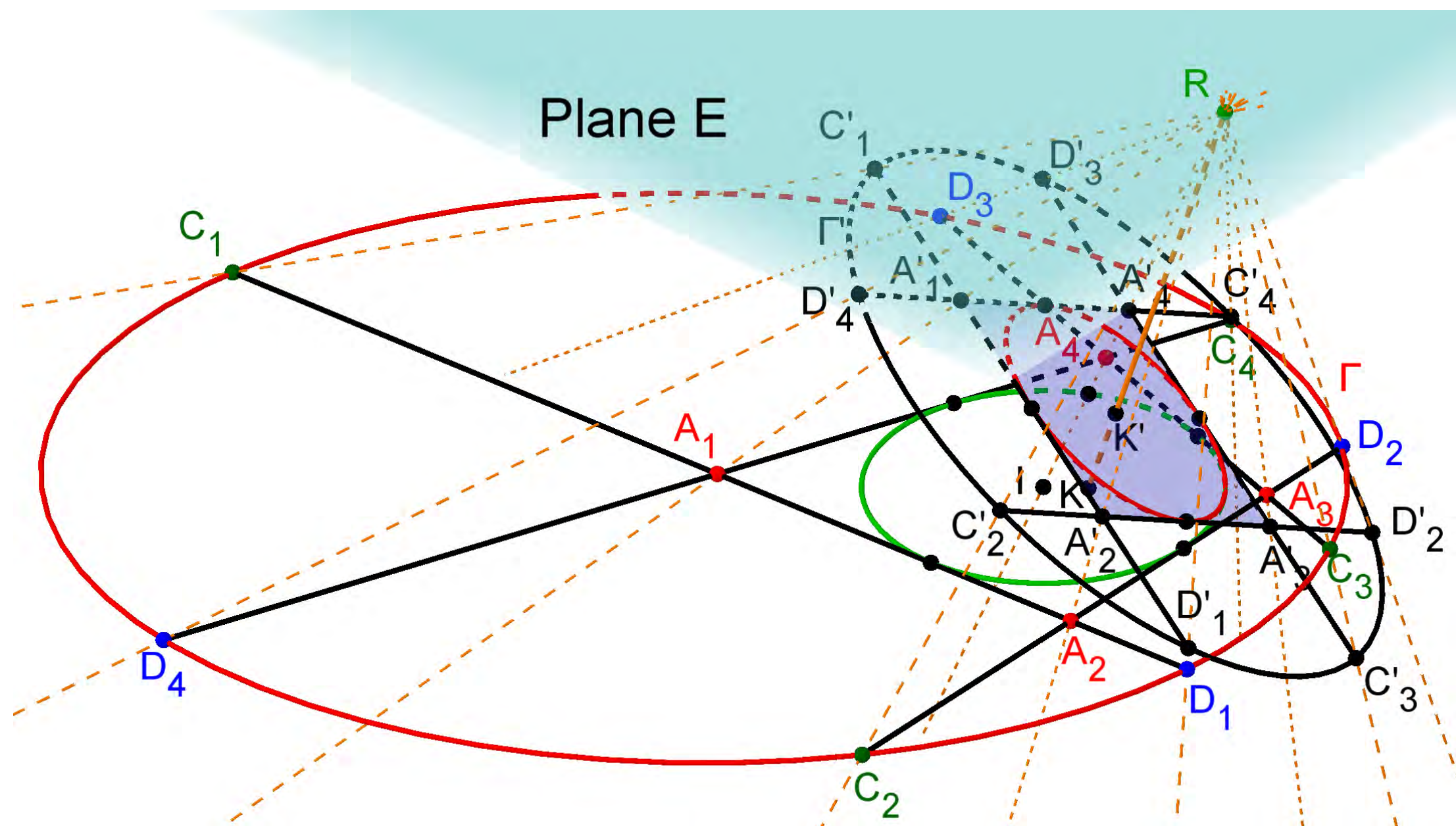
▲ 圖10：刻劃 Sejfriedian 正則四邊形。

4. 正則四邊形的 Sejfried 二次曲線族 Γ 之保調和性質

性質9. 若在正則四邊形的邊上分別取八點 C_1, C_2, C_3, C_4 及 D_1, D_2, D_3, D_4 滿足

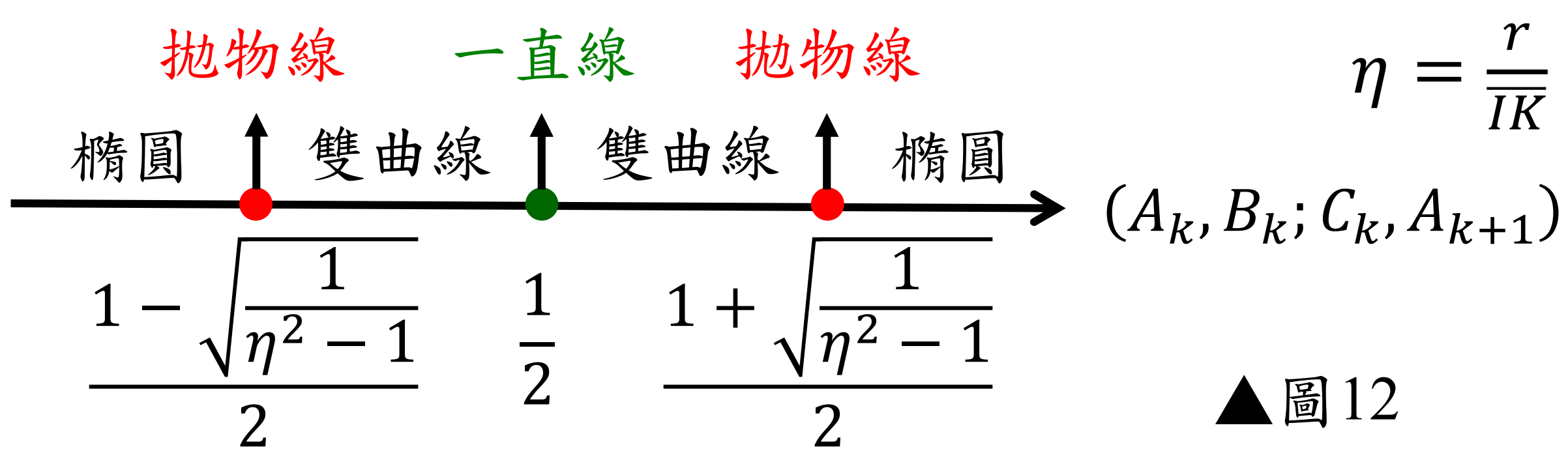
$$(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = \delta \text{ 與 } (A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = 1 - \delta$$

則點 C_k 及 D_k 共二次曲線 Γ .



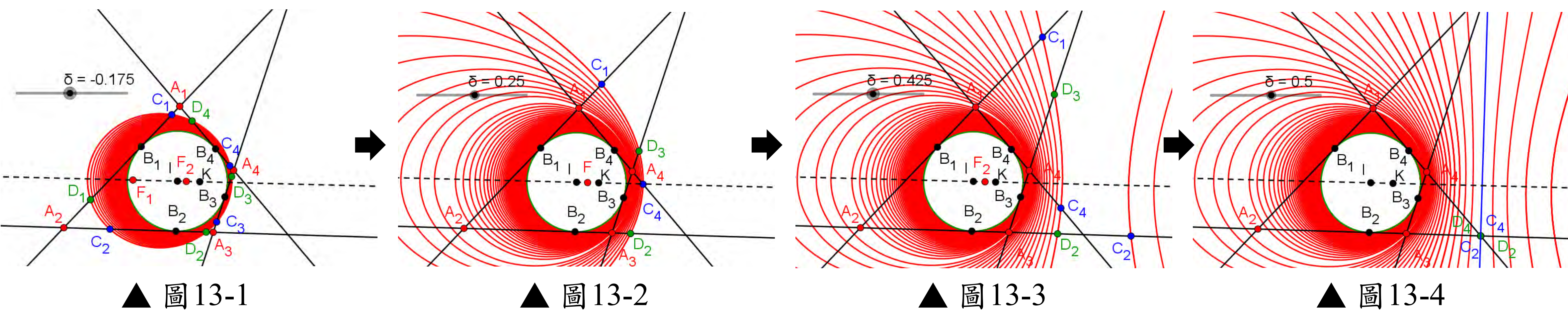
▲ 圖11

性質10. Sejfried 二次曲線 Γ 的型態判別式.



▲ 圖12

性質11. (保調和) $(F_1, F_2; I, K) = -1$.



▲ 圖13-1

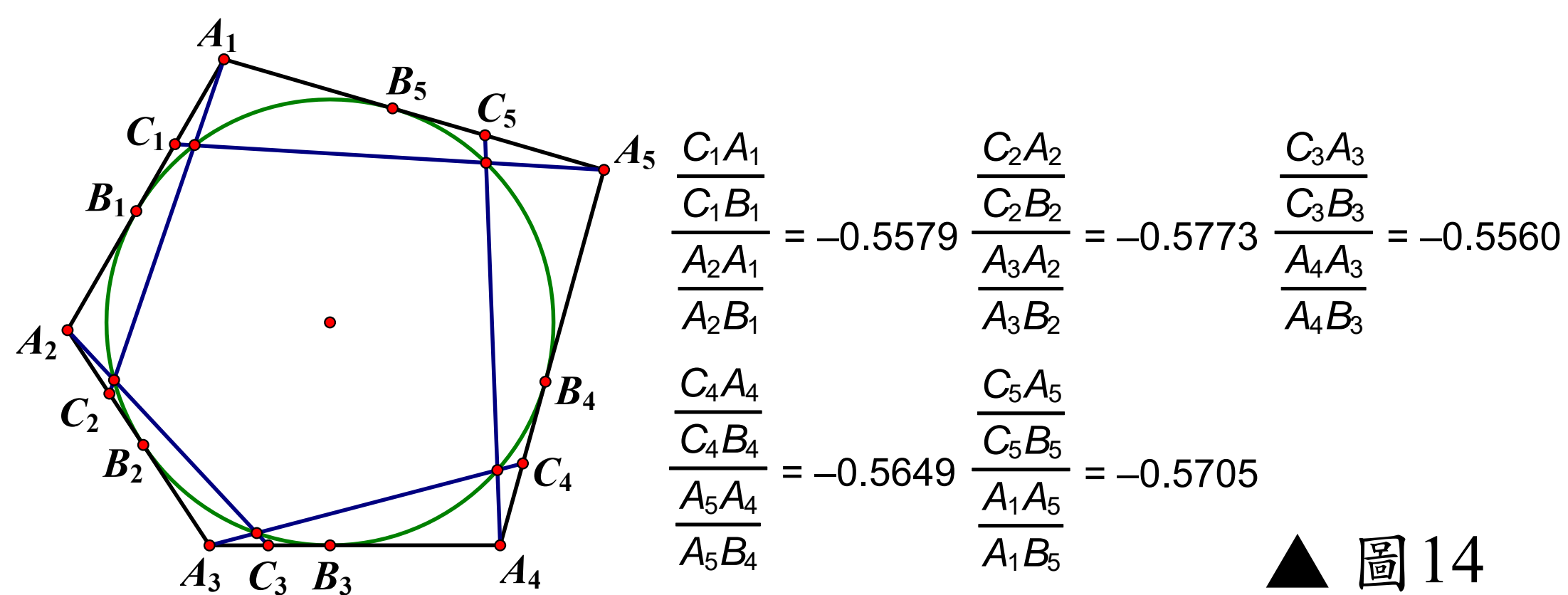
▲ 圖13-2

▲ 圖13-3

▲ 圖13-4

5. 多邊形的 Sejfried 定理

關於五邊形、六邊形等任意多邊形，我們已證明其基礎 Sejfriedian 構圖的存在唯一性，但是仿照三角形與四邊形建構射影模型且平面近似作圖後我們並無發現特殊的幾何性質，顯示此幾何構圖僅在三角形及四邊形有獨特性！



▲ 圖14

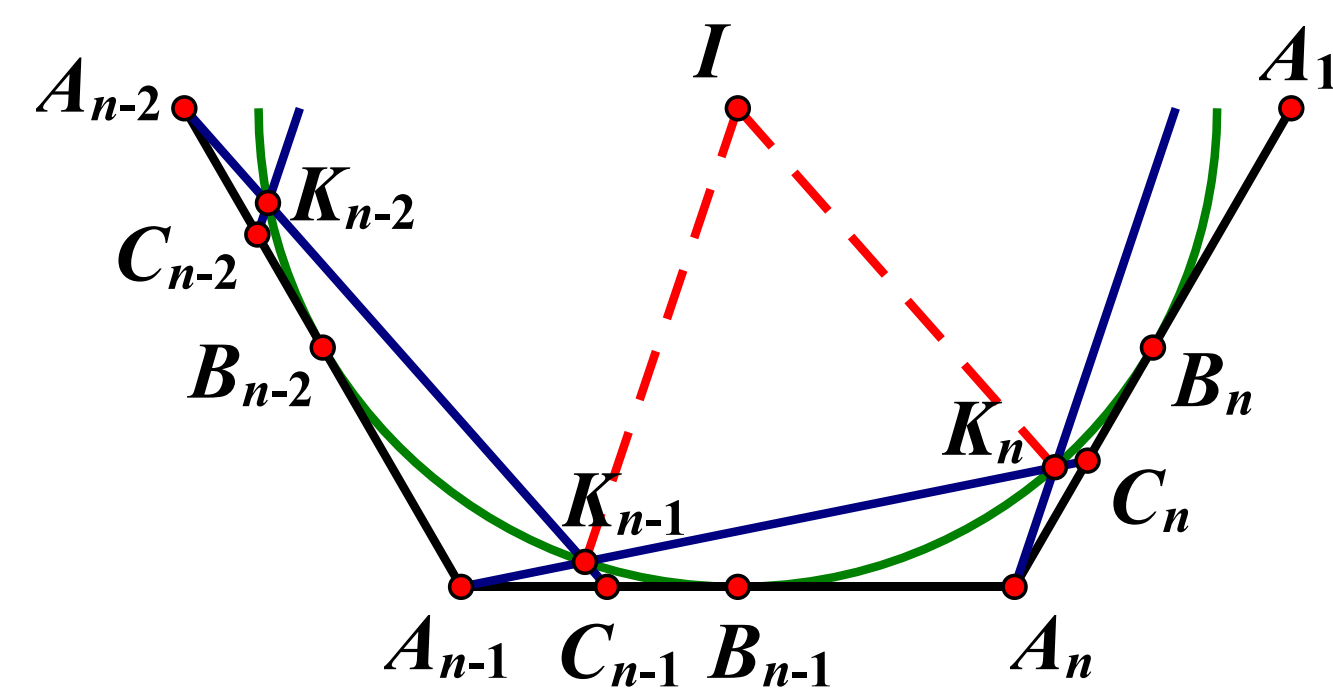
5.1. 正 n 邊形的 Sejfried 定理之交比通式

給定正 n 邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 的基礎 Sejfriedian 構圖中，令 $\overline{A_k A_{k+1}} = 1, \overline{A_k K_k} = \mu, \overline{A_k C_k} = \lambda$

性質12. $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) = \frac{\lambda}{2\lambda - 1}$ ，其中 $\lambda = \frac{\cos \frac{2\pi}{n} \mu^2 + \mu \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n}}}{1 - \mu^2}$ ， $\mu = \frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{n} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 1} \right)$.

證明. 利用餘弦定理先求出 $\overline{A_{n-1} K_{n-1}} = \mu$ ，

再以 $\Delta A_{n-1} K_{n-1} C_{n-1} \sim \Delta A_{n-1} A_n C_n$ 求出 $\overline{A_{n-1} C_{n-1}} = \lambda$.



▲ 圖15

5.2. $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$ 的收斂性

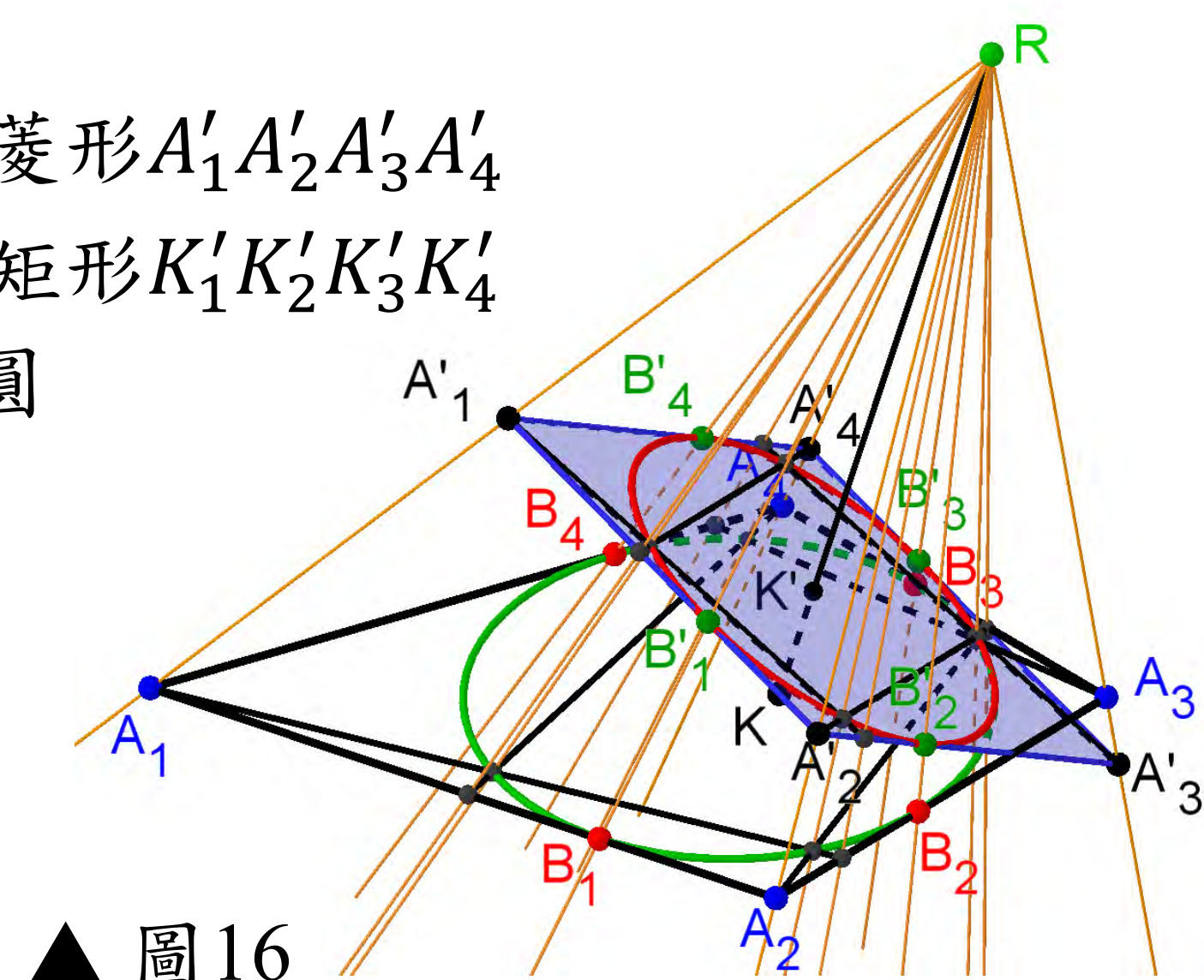
性質13. 當 n 趨近無限大時， $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1})$

會收斂在 $-\frac{2\sqrt{2}+1}{7} \approx -0.546918$.

$A_1 A_2 A_3 A_4 \leftrightarrow$ 菱形 $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$

$K_1 K_2 K_3 K_4 \leftrightarrow$ 矩形 $K'_1 K'_2 K'_3 K'_4$

圓 \leftrightarrow 圓



▲ 圖16

伍、結論

1. 任意四邊形的 Sejfried 定理

- (1) Sejfriedian 構圖的對角線及切點連線「共點性」
- (2) Sejfried 定理「直觀幾何意義」與「上界、下界」
- (3) 任意三角形與四邊形的 Sejfried 定理差異

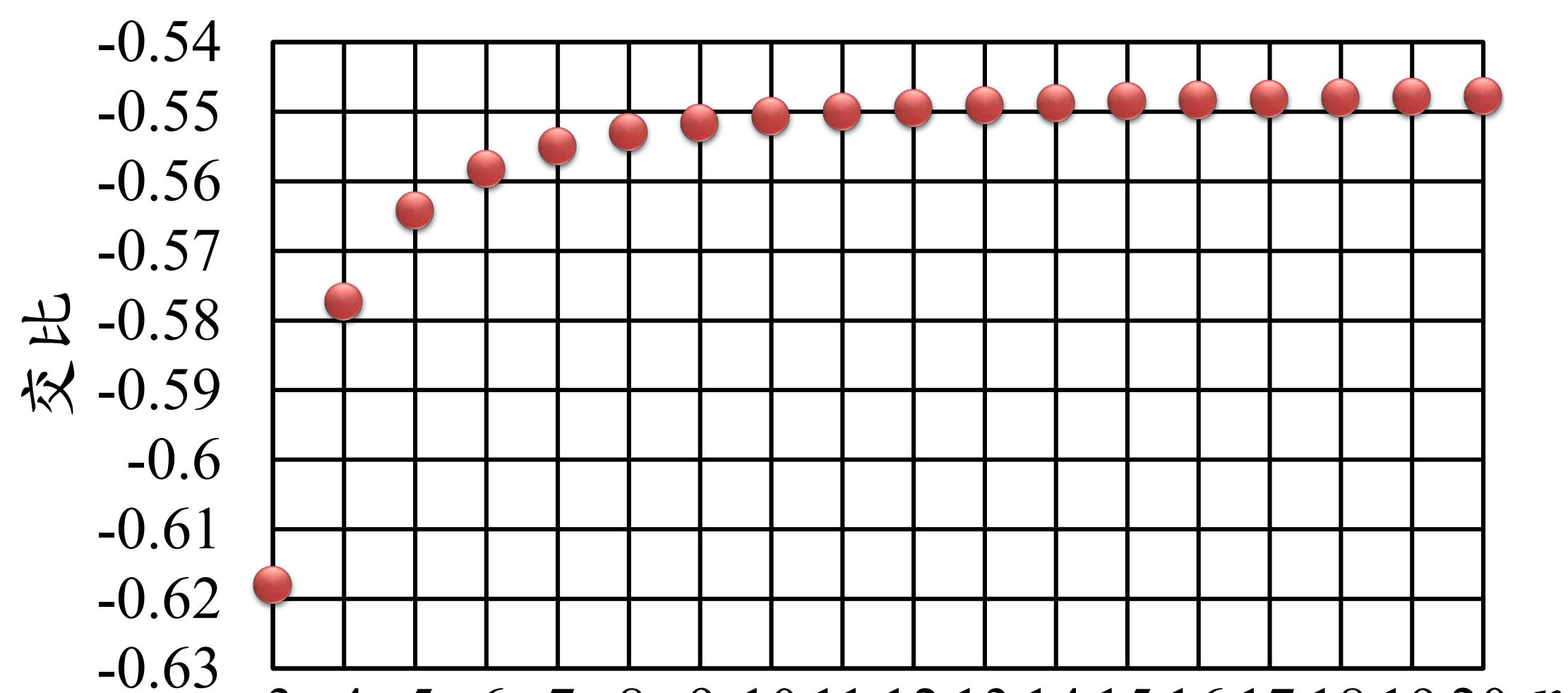
	任意三角形	任意四邊形
Sejfried 定理	各邊交比相同 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) + (A_k, B_k; D_k, A_{k+1}) = 1$	對邊交比相同 $(A_k, B_k; C_k, A_{k+1}) + (A_k, B_k; D_k, A_{k+1})$ 為常數

2. 正則四邊形的 Sejfried 二次曲線 Γ 之性質

3. 正 n 邊形的 Sejfried 定理與收斂性

陸、參考文獻

[1] M. Sejfried, V.Shelomovskii (2012). *Elementary Proof of Sejfriedian Properties*, at the Proceedings of the 17th Asian Technology Conference in Mathematics, pp 342-352.
 [2] V. Shelomovskii (2014). *Sejfriedian: existence, uniqueness, constructing and the proof of properties*, at the Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG 2014), pp 1095-1110.



▲ 圖17：正 n 邊形 Sejfried 交比收斂性