中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030412

接二連三 – continuing number 之探討

學校名稱：臺南市立崇明國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳承晉 國二 羅奕翔 國二 郭鈞翔	洪傳勛

關鍵詞：等差數列、等差級數、連續數字和

摘要

本研究旨在探討一個正整數的連續數字和表示法與該數的因數有關，在研究過程中，我們先針對最基本的問題：給定一個正整數 p ，如何分解成 $d=1$ 及 $d=2$ 的連續等差數字和，利用等差級數公式中奇偶性的關係導出結論，並以代數推導出快速尋找所有分解方法數；接著將其推廣到任意公差 d ，假設 $p=m+(m+d)+(m+2d)+(m+3d)+...+n$ 且 m、n、p $\in N$ 可得：

$2dp=(n+m)\cdot(n-m+d)$ ，令 $\begin{cases} a_1=n+m \\ a_2=n-m+d \end{cases}$ ，則 $2dp=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases} n=\dfrac{a_1+a_2-d}{2}\in N>1 \\ m=\dfrac{a_1-a_2+d}{2}\in N<p \end{cases}$ ，我們發現 $d=1$ 及 $d=2$ 都符合推論，但 $d\geq 3$ 時不一定符合推論，於是進一步改為限制項數 k 範圍作討論，皆獲得不錯的結果。

壹、 研究動機

在國中二年級學到了第四冊等差級數單元，只要知道首項、公差、項數就可以用等差級數公式來求出總和，我們發現了一個與前述相反的問題，如果給定一個正整數 p ，是否能表示成公差為 1 的連續等差數字和，例如：38＝8+9+10+11、48＝15+16+17，這些數可用連續正整數和來表示，但有些數卻無法表示為連續等差數字和，引起我們的好奇，想找出是否有特別的方法來找出這些數的總和，以下便是針對這個問題做研究，並將其推廣到任意公差 d 。

貳、 研究目的

一、給定正整數 p ，找出 $d=1$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

二、給定正整數 p ，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=1$ 的所有分解法。

三、給定正整數 p ，找出 $d=2$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

四、給定正整數 p ，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=2$ 的所有分解法。

五、推廣到任意公差 d ，以代數推導出快速尋找所有分解方法數，並限制項數 x 範圍作討論。

參、 研究設備及器材

計算紙、筆、電腦（excel 檔）、計算機。

肆、 名詞解釋

定義下列名詞在本研究的意義：

一、continuing number($d=1$)：某正整數若可以表示為若干個(至少2個以上)連續正整數的 和，我們稱此正整數為continuing number。並且以f(x)：表示正整數x可以表示為若干個(至少2個以上)連續正整數的和的方法數。如：18 = 5 + 6 + 7、3 + 4 + 5 + 6，f(15) = 2。

二、**奇偶continuing number($d=2$)**：某正整數若可以表示為若干個(至少2個以上)連續正奇數或正偶數的和，我們稱此正整數奇偶continuing number。並且以g(x)：表示正整數x可以表示為若干個(至少2個以上)連續正奇數或正偶數和的方法數。如：24 = 11 + 13 、6 + 8 + 10、3 + 5 + 7 + 9，故g(24) = 3。

伍、 研究過程或方法

一、 給定正整數 p ，找出$d=1$哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

p	是否為 continuing number	$d=1$拆解法	f(x)
1	否		0
2	否		0
3	是	1+2	1
4	否		0
5	是	2+3	1
6	是	1+2+3	1
7	是	3+4	1
8	否		0
9	是	4+5，2+3+4	2
10	是	1+2+3+4	1
11	是	5+6	1
12	是	3+4+5	1
13	是	6+7	1
14	是	2+3+4+5	1

15	是	7+8，4+5+6，1+2+3+4+5	3
16	否		0
17	是	8+9	1
18	是	5+6+7，3+4+5+6	2
19	是	9+10	1
20	是	2+3+4+5+6	1
21	是	10+11，6+7+8，1+2+3+4+5	3
22	是	4+5+6+7	1
23	是	11+12	1
24	是	7+8+9	1
25	是	12+13，3+4+5+6+7	2
26	是	5+6+7+8	1
27	是	13+14，2+3+4+5+6+7，8+9+10	3
28	是	1+2+3+4+5+6+7	1
29	是	14+15	1
30	是	4+5+6+7+8，6+7+8+9，9+10+11	3

研究發現：

由上面可拆解的自然數中，有了以下發現：

1、根據上列數字拆解中，我們可以得知，1和 2^n 無法以連續正整數所分解。

2、若 p 為欲分解的正整數，首項為 a 且 $a \in \mathrm{N}$ ，如果 p 為continuing number(公差為1)，則 $p = a + (a+1) = 2a+1$ ，因此當 p 為大於2的奇數，則此數必為continuing number。

3、從1~30的數字當中我們得知，除了1和 2^n 以外的自然數都可以被分解，但是我們並不知道這些自然數有何關係，而我們從某一些數字中發現，原來數字並不是只有一種拆解法，於是先由所拆解的連續正整數去觀察，再將數字作拆解試著去尋找其中的關係：

3=1+2=1+(1+1)=2×1+1

5=2+3=2+(2+1)=2×2+1

6=1+2+3=(2-1)+2+(2+1)=3×2

7=3+4=3+(3+1)=2×3+1

9=4+5=4+(4+1)=2×4+1；9=(3-1)+3+(3+1)=3×3

10=(2-1)+2+(2+1)+(2+2)=4×2+2

4、由上面可拆解的自然數中，發現到了以下的規律：

定義： p ＝欲分解的正整數； N_m ＝分解為m項的中間項；m＝分解項數

如果能將一個數字拆成兩項：$2N_2+1=(N_2)+(N_2+1)$表示

如果能將一個數字拆成三項：$3N_3 \quad =(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$表示

如果能將一個數字拆成四項：$4N_4+2=(N_4-1)+(N_4)+(N_4+1)+(N_4+2)$表示

所以我們可以得到一個結論：

$$p=2N_2+1=(N_2)+(N_2+1)$$

$$p=3N_3 \quad =(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$$

$$p=4N_4+2=(N_4-1)+(N_4)+(N_4+1)+(N_4+2)$$

5、觀察上式，如果 p 可以被拆解，則：

（1） $p=m\ N_m$ ， m ＝奇數　　（2） $p=m\ N_m+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(2N_m+1)$ ， m ＝偶數

二、　給定正整數 p ，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=1$ 的所有分解法。

（一）利用 N_m 尋找拆解法

根據研究一的結果，一數若可以分解，則可能為以下兩種拆解方式：

（1） $p=m\ N_m$ ， m ＝奇數　　（2） $p=m\ N_m+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(2N_m+1)$ ， m ＝偶數

我們現在得知，針對每一個數可以嚐試的使用到我們發現的式子來檢驗，可是還是無法得知，總共會有幾種拆解的方式，如果一個一個慢慢的檢驗下去，這樣無法給我們一個系統的方式去檢驗如何得知有幾種拆法。所以我們開始拆解1~20之間的每一個數字的標準分解式以及奇因數，希望我們可以觀察到其中的規律以及該如何從一個數字中快速得知有幾種拆解法？

p	標準分解式	大於 1 的奇因數	拆解過程	$d=1$ 拆解法	f(x)
1					0
2	2				0
3	3	3	$2N_2+1=3$ ， $2N_2=2$ ， $N_2=1$	1+2	1
4	2^2				0
5	5	5	$2N_2+1=5$ ， $2N_2=4$ ， $N_2=2$	2+3	1
6	2×3	3	$3N_3=6$ ， $N_3=2$	1+2+3	1

7	7	7	$2N_2$+1=7，$2N_2$=6，N_2=3	3+4	1
8	2^3				0
9	3^2	3、9	$2N_2$+1=9，$2N_2$=8，N_2=4 $3N_3$=9，N_3=3	4+5 2+3+4	2
10	2×5	5	$4N_4+2=10$，$4N_4$=8，N_4=2	1+2+3+4	1
11	11	11	$2N_2$+1=11，$2N_2$=10，N_2=5	5+6	1
12	$2^2\times3$	3	$3N_3$=12，N_3=4	3+4+5	1
13	13	13	$2N_2$+1=13，$2N_2$=12，N_2=6	6+7	1
14	2×14	7	$4N_4+2=14$，$4N_4$=12，N_4=3	2+3+4+5	1
15	3×5	3、5、15	$2N_2$+1=15，$2N_2$=14，N_2=7 $3N_3$=15，N_3=5 $5N_5$=15，N_5=3	7+8 4+5+6 1+2+3+4+5	3
16	2^4				0
17	17	17	$2N_2$+1=17，$2N_2$=16，N_2=8	8+9	1
18	2×3^2	3、9	$3N_3$=18，N_3=6 $4N_4+2=18$，$4N_4$=16，N_4=4	5+6+7 3+4+5+6	2
19	19	19	$2N_2$+1=19，$2N_2$=18，N_2=9	9+10	1
20	$2^2\times5$	5	$5N_5$=20，N_5=4	2+3+4+5+6	1

研究發現：

1、根據我們上面所歸納出來的結果我們發現到了：

（1）一個可被分解的數最多可以被分解為（奇因數個數－1）種。

（2）可被分解的數一定有除了1以外的奇因數。

（3）質數除了2以外，其他的質數只有一種拆解法，並且是拆解為$2N_2+1$。

（4）2^n以外的數都可以被分解為連續的正整數和。

$\because$ 2^n不帶除了1以外的任何奇因數

$\therefore$不可以分解

$\because$ 2^n以外的數必帶除了1以外的奇因數

$\therefore$可以分解

我們也可以說根據我們觀察的結果2^n只有一個奇因數為1

所以它的拆解法為（奇因數個數－1）＝0，所以根本就沒有拆解法。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：p＝欲分解的正整數；d＝公差，m＝首項，n＝末項

1、拆解continuing number（$d=1$）

$$p=m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+\ldots+n \text{ 且m、n、p} \in \text{N}$$

由等差級數公式可得： $p=\dfrac{(n+m)(n-m+1)}{2}$

由於(n+m)、(n－m+1)的奇偶性相異，即a_1、a_2為一奇一偶，所以 p 必有正奇因數

故知道2^n無法表示為公差為1的continuing number

<說明> (1)若m為奇數，n為奇數，則$n+m$為偶數，$n-m+1$為奇數。

(2)若m為奇數，n為偶數，則$n+m$為奇數，$n-m+1$為偶數。

(3)若m為偶數，n為奇數，則$n+m$為奇數，$n-m+1$為偶數。

(4)若m為偶數，n為偶數，則$n+m$為偶數，$n-m+1$為奇數。

故可知(n+m)、(n－m+1)的奇偶性相異，即a_1、a_2為一奇一偶。

2、若p有1以外的正奇因數時，令$\begin{cases} a_1=n+m \\ a_2=n-m+1 \end{cases}$，則$2p=a_1\cdot a_2$且$\begin{cases} n=\dfrac{a_1+a_2-1}{2} \\ m=\dfrac{a_1-a_2+1}{2} \end{cases}$

由於 n>m>0 可得$\begin{cases} \dfrac{a_1+a_2-1}{2}>\dfrac{a_1-a_2+1}{2} \\ \dfrac{a_1-a_2+1}{2}>0 \end{cases}$

化簡後得$\begin{cases} a_2>1 \\ a_1>a_2 \end{cases}$，即$a_1>a_2>1$

p	$2p$的所有因數	符合的(a_1,a_2)	拆解過程	$d=1$拆解法	f(x)
1	1、2				0
2	1、2、4				0
3	1、2、3、6	(3，2)	$\begin{cases} n=\dfrac{3+2-1}{2}=2 \\ m=\dfrac{3-2+1}{2}=1 \end{cases}$	1+2	1
4	1、2、4				0
5	1、2、5、10	(5，2)	$\begin{cases} n=\dfrac{5+2-1}{2}=3 \\ m=\dfrac{5-2+1}{2}=2 \end{cases}$	2+3	1
6	1、2、3、4、6、12	(4，3)	$\begin{cases} n=\dfrac{4+3-1}{2}=3 \\ m=\dfrac{4-3+1}{2}=1 \end{cases}$	1+2+3	1

7	1、2、7、14	(7，2)	$\begin{cases} n=\dfrac{7+2-1}{2}=4 \\ m=\dfrac{7-2+1}{2}=3 \end{cases}$	3+4	1
8	1、2、4、8、16				0
9	1、2、3、6、9、18	(9，2)(6，3)	$\begin{cases} n=\dfrac{9+2-1}{2}=5 \\ m=\dfrac{9-2+1}{2}=4 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\dfrac{6+3-1}{2}=4 \\ m=\dfrac{6-3+1}{2}=2 \end{cases}$	4+5 2+3+4	2
10	1、2、4、5、10、20	(5，4)	$\begin{cases} n=\dfrac{5+4-1}{2}=4 \\ m=\dfrac{5-4+1}{2}=1 \end{cases}$	1+2+3+4	1
11	1、2、11、22	(11，2)	$\begin{cases} n=\dfrac{11+2-1}{2}=6 \\ m=\dfrac{11-2+1}{2}=5 \end{cases}$	5+6	1
12	1、2、3、4、6、8、12、24	(8，3)	$\begin{cases} n=\dfrac{8+3-1}{2}=5 \\ m=\dfrac{8-3+1}{2}=3 \end{cases}$	3+4+5	1
13	1、2、13、26	(13，2)	$\begin{cases} n=\dfrac{13+2-1}{2}=7 \\ m=\dfrac{13-2+1}{2}=6 \end{cases}$	6+7	1
14	1、2、4、7、14、28	(7，4)	$\begin{cases} n=\dfrac{7+4-1}{2}=5 \\ m=\dfrac{7-4+1}{2}=2 \end{cases}$	2+3+4+5	1
15	1、2、3、5、6、10、15、30	(15，2) (10，3) (6，5)	$\begin{cases} n=\dfrac{15+2-1}{2}=8 \\ m=\dfrac{15-2+1}{2}=7 \end{cases}$	7+8	3

			$\begin{cases} n=\dfrac{10+3-1}{2}=6 \\ m=\dfrac{10-3+1}{2}=4 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\dfrac{6+5-1}{2}=5 \\ m=\dfrac{6-5+1}{2}=1 \end{cases}$	4+5+6 1+2+3+4+5	
16	1、2、4、8、16、32				0
17	1、2、17、34	(17，2)	$\begin{cases} n=\dfrac{17+2-1}{2}=9 \\ m=\dfrac{17-2+1}{2}=8 \end{cases}$	8+9	1
18	1、2、3、4、9、12、18、36	(12，3) (9，4)	$\begin{cases} n=\dfrac{12+3-1}{2}=7 \\ m=\dfrac{12-3+1}{2}=5 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\dfrac{9+4-1}{2}=6 \\ m=\dfrac{9-4+1}{2}=3 \end{cases}$	5+6+7 3+4+5+6	2
19	1、2、19、38	(19，2)	$\begin{cases} n=\dfrac{19+2-1}{2}=10 \\ m=\dfrac{19-2+1}{2}=9 \end{cases}$	9+10	1
20	1、2、4、5、8、10、20、40	(8，5)	$\begin{cases} n=\dfrac{8+5-1}{2}=6 \\ m=\dfrac{8-5+1}{2}=2 \end{cases}$	2+3+4+5+6	1

研究發現：給定一組 a_1 、 a_2 ，當 $a_1>a_2$ 且 a_1 及 a_2 奇偶性相異時就有正整數解，因此 p 有 n 個正奇因數(不包含 1)就有 n 種拆法。

三、 給定正整數 p ，找出 $d=2$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

p	是否為奇偶 continuing number	$d=2$ 拆解法	$g(x)$
1	否		0
2	否		0
3	否		0
4	是	1+3	1
5	否		0
6	是	2+4	1
7	否		0
8	是	3+5	1
9	是	1+3+5	1
10	是	4+6	1
11	否		0
12	是	5+7，2+4+6	2
13	否		0
14	是	6+8	1
15	是	3+5+7	1
16	是	1+3+5+7，7+9	2
17	否		0
18	是	4+6+8，8+10	2
19	否		0
20	是	9+11，2+4+6+8	2
21	是	5+7+9	1
22	是	10+12	1
23	否		0
24	是	3+5+7+9，11+13，6+8+10	3
25	是	1+3+5+7+9	1
26	是	12+14	1
27	是	7+9+11	1
28	是	13+15，4+6+8+10	2
29	否		0
30	是	2+4+6+8+10，8+10+12，14+16	3

研究發現：

由上面可拆解的自然數中，有了以下發現：

1、根據上列數字拆解中，我們可以得知，1和質數無法以連續正奇數或正偶數和所分解。

2、若 p 為欲分解的正整數，首項為 a 且 $a \in \mathrm{N}$ ，如果 p 為奇偶continuing number(公差為2)，

則 $p=a+(a+2)=2a+2=2(a+1)$ ，因此當 p 為大於2的偶數，則此數必為奇偶continuing number(公差為2)。

3、從1~30的數字當中我們得知，除了1和質數以外的自然數都可以被分解，但是我們並不知道這些自然數有何關係，而我們從某一些數字中發現，原來數字並不是只有一種拆解法，於是先由所拆解的連續正整數去觀察，再將數字作拆解試著去尋找其中的關係：

4=1+3=(2-1)+(2+1)=2×2

6=2+4=(3-1)+(3+1)=2×3

8=3+5=(4-1)+(4+1)=2×4

9=1+3+5=(3-2)+3+(3+2)=3×3

10=4+6=(5-1)+(5+1)=2×5

12=5+7=(6-1)+(6+1)=2×6；12=2+4+6=(4-2)+4+(4+2)=3×4

4、由上面可拆解的自然數中，發現到了以下的規律：

定義： p ＝欲分解的正整數； N_m ＝分解為m項的中間項；m＝分解項數

如果能將一個數字拆成兩項：$2N_2=(N_2-1)+(N_2+1)$表示

如果能將一個數字拆成三項：$3N_3=(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$表示

如果能將一個數字拆成四項：$4N_4=(N_4-3)+(N_4-1)+(N_4+1)+(N_4+3)$表示

所以我們可以得到一個結論：

$$p=2N_2=(N_2-1)+(N_2+1)$$

$$p=3N_3=(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$$

$$p=4N_4=(N_4-3)+(N_4-1)+(N_4+1)+(N_4+3)$$

5、觀察上式，如果 p 可以被拆解，則：$\boxed{p=m\ N_m\text{，}m\in\mathrm{N}}$，因此當 p 為大於2的合數，則此數必為奇偶continuing number(公差為2)。

四、 給定正整數 p ，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=2$ 的所有分解法。

（一）利用 N_m 尋找拆解法

根據研究三的結果，一數若可以分解，則： $p = m\,N_m$ ， $m \in \mathrm{N}$

我們現在得知，針對每一個數可以嚐試的使用到我們發現的式子來檢驗，可是還是無法得知，總共會有幾種拆解的方式，如果一個一個慢慢的檢驗下去，這樣無法給我們一個系統的方式去檢驗如何得知有幾種拆法。所以我們開始拆解1~20之間的每一個數字的標準分解式以及奇因數，希望我們可以觀察到其中的規律以及該如何從一個數字中快速得知有幾種拆解法？

p	標準分解式	p 的所有因數	拆解過程	$d=2$ 拆解法	g(x)
1		1			0
2	2	1、2			0
3	3	1、3			0
4	2^2	1、2、4	$2N_2=4$ ， $N_2=2$	1+3	1
5	5	1、5			0
6	2×3	1、2、3、6	$2N_2=6$ ， $N_2=3$	2+4	1
7	7	7			0
8	2^3	1、2、4、8	$2N_2=8$ ， $N_2=4$	3+5	1
9	3^2	1、3、9	$3N_3=9$ ， $N_3=3$	1+3+5	1
10	2×5	1、2、5、10	$2N_2=10$ ， $N_2=5$	4+6	1
11	11	1、11			0
12	$2^2\times3$	1、2、3、4、6、12	$2N_2=12$ ， $N_2=6$ $3N_3=12$ ， $N_3=4$	5+7 2+4+6	2
13	13	1、13			0
14	2×7	1、2、7、14	$2N_2=14$ ， $N_2=7$	6+8	1
15	3×5	1、3、5、15	$3N_3=15$ ， $N_3=5$	3+5+7	1
16	2^4	1、2、4、8、16	$2N_2=16$ ， $N_2=8$ $4N_4=16$ ， $N_4=4$	7+9 1+3+5+7	2
17	17	1、17			0
18	2×3^2	1、2、3、6、9、18	$2N_2=18$ ， $N_2=9$ $3N_3=18$ ， $N_3=6$	8+10 4+6+8	2
19	19	1、19			0
20	$2^2\times5$	1、2、4、5、10、20	$2N_2=20$ ， $N_2=10$ $4N_4=20$ ， $N_4=5$	9+11 2+4+6+8	2

研究發現：

1、根據我們上面所歸納出來的結果我們發現到了：

（1）一個可被分解的數最多可以被分解為：

當 p 為平方數，定義 $\phi(p)$ 為 p 之所有正因數，則可分解為（$\dfrac{\phi(p)+1}{2}$ －1）個；

當 p 不為平方數，定義 $\phi(p)$ 為 p 之所有正因數，則可分解為（$\dfrac{\phi(p)}{2}$ －1）個。

（2）可被分解的數一定有除了1和本身以外的因數。

（3）質數以外的數都可以被分解為連續的正奇偶數和。

∵質數除了1以外的不帶有任何因數

∴不可以分解

∵質數以外的合數必帶除了1和本身以外的因數

∴可以分解

我們也可以說根據我們觀察的結果質數只有1和本身以外的2個因數

所以它的拆解法為（$\dfrac{\phi(p)}{2}$ －1）＝0，所以根本就沒有拆解法。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：p ＝欲分解的正整數；d ＝公差，m ＝首項，n ＝末項

1、拆解continuing number（ $d=2$ ）

$p=m+(m+2)+(m+4)+(m+6)+...+n$ 且 m 、 n 、 $p\in \mathrm{N}$

由等差級數公式可得： $p=\dfrac{(n+m)(n\text{-}m+2)}{4}$ ，即 $4p=(n+m)(n\text{-}m+2)$

令 $\begin{cases} a_1=n+m \\ a_2=n-m+2 \end{cases}$ ，則 $4p=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases} n=\dfrac{a_1+a_2-2}{2} \\ m=\dfrac{a_1-a_2+2}{2} \end{cases}$

當 a_1 、 a_2 同奇偶時， m 、 n 有正整數解

但 $4p=a_1\cdot a_2$ ，即 $2|a_1$ 且 $2|a_2$

又 $n>m>0$ ， $\dfrac{a_1+a_2-2}{2}>\dfrac{a_1-a_2+2}{2}$ 且 $\dfrac{a_1-a_2+2}{2}>0$

化簡後得 $\begin{cases} a_2>2 \\ a_1>a_2-2 \end{cases}$ ，即 $a_1\geq a_2>2$

2、若 $2|a_1$ 且 $2|a_2$，可設 $4p=2x\cdot 2y$（$a_1=2x$，$a_2=2y$）$\Rightarrow xy=p$

又因 $a_1\geq a_2>2$ 可得 $x\geq y>1$，$x,y\in\mathrm{N}$

所以當一正整數 p 只能質因數分解為 $p\times 1$ 時（即 p 為質數）無法符合此條件

則 p 之可能拆法為滿足此條件的數對（x，y）

此時：

將 $\begin{cases} a_1=2x \\ a_2=2y \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} n=\dfrac{a_1+a_2-2}{2} \\ m=\dfrac{a_1-a_2+2}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 化簡後得 $\begin{cases} n=x+y-1 \\ m=x-y+1 \end{cases}$ 且 $x\geq y>1$，$x,y\in\mathrm{N}$

p	p 的所有因數	符合的 (x,y)	拆解過程	$d=2$ 拆解法	g(x)
1	1				0
2	1、2				0
3	1、3				0
4	1、2、4	(2，2)	$\begin{cases} m=2+2-1=3 \\ n=2-2+1=1 \end{cases}$	1+3	1
5	1、5				0
6	1、2、3、6	(3，2)	$\begin{cases} m=3+2-1=4 \\ n=3-2+1=2 \end{cases}$	2+4	1
7	7				0
8	1、2、4、8	(4，2)	$\begin{cases} m=4+2-1=5 \\ n=4-2+1=3 \end{cases}$	3+5	1
9	1、3、9	(3，3)	$\begin{cases} m=3+3-1=5 \\ n=3-3+1=1 \end{cases}$	1+3+5	1
10	1、2、5、10	(5，2)	$\begin{cases} m=5+2-1=6 \\ n=5-2+1=4 \end{cases}$	4+6	1
11	1、11				0
12	1、2、3、4、6、12	(6，2)(4，3)	$\begin{cases} m=6+2-1=7 \\ n=6-2+1=5 \end{cases}$ $\begin{cases} m=4+3-1=6 \\ n=4-3+1=2 \end{cases}$	5+7 2+4+6	2
13	1、13				0
14	1、2、7、14	(7，2)	$\begin{cases} m=7+2-1=8 \\ n=7-2+1=6 \end{cases}$	6+8	1
15	1、3、5、15	(5，3)	$\begin{cases} m=5+3-1=7 \\ n=5-3+1=3 \end{cases}$	3+5+7	1

16	1、2、4、8、16	(8，2)(4，4)	$\begin{cases} m=8+2-1=9 \\ n=8-2+1=7 \end{cases}$ $\begin{cases} m=4+4-1=7 \\ n=4-4+1=1 \end{cases}$	7+9 1+3+5+7	2
17	1、17				0
18	1、2、3、6、9、18	(9，2) (6，3)	$\begin{cases} m=9+2-1=10 \\ n=9-2+1=8 \end{cases}$ $\begin{cases} m=6+3-1=8 \\ n=6-3+1=4 \end{cases}$	8+10 4+6+8	2
19	1、19				0
20	1、2、4、5、10、20	(10，2)(5，4)	$\begin{cases} m=10+2-1=11 \\ n=10-2+1=9 \end{cases}$ $\begin{cases} m=5+4-1=8 \\ n=5-4+1=2 \end{cases}$	9+11 2+4+6+8	2

研究發現：給定一組數對（x，y），當 $x \geq y > 1$， $x, y \in \mathrm{N}$ ，因此當 p 為平方數，定義 $\phi(p)$ 為 p 之所有正因數，則可分解為（ $\dfrac{\phi(p)+1}{2}-1$ ）個；當 p 不為平方數，則可分解為（ $\dfrac{\phi(p)}{2}-1$ ）個。

五、 推廣到任意公差 d，以代數推導出快速尋找所有分解方法數，並限制項數 x 範圍作討論。

（一）利用等差級數公式尋找拆解法

$\boxed{\text{定義： } p = \text{欲分解的正整數；} d = \text{公差，} m = \text{首項，} n = \text{末項}}$

1、推廣到任意公差 d

$p=m+(m+d)+(m+2d)+(m+3d)+...+n$ 且m、n、p$\in N$

由等差級數公式可得： $p=\dfrac{(n+m)\cdot(\frac{n-m}{d}+1)}{2}=\dfrac{(n+m)\cdot(n-m+d)}{2d}$

可得 $2dp=(n+m)\cdot(n-m+d)$

令$\begin{cases} a_1 = n+m \\ a_2 = n-m+d \end{cases}$，則$2dp=a_1 \cdot a_2$且$\begin{cases} n = \dfrac{a_1+a_2-d}{2} \\ m = \dfrac{a_1-a_2+d}{2} \end{cases}$

又 $n>m>0 \quad \Rightarrow \dfrac{a_1+a_2-d}{2} > \dfrac{a_1-a_2+d}{2}$ 且m、n、p$\in N$

$\Rightarrow 2a_1 > 2d \quad \Rightarrow a_1 > d$

$\Rightarrow a_1 > a_2 > d$

因$\dfrac{n-m}{d}+1 \in N$，可得知$d \mid n-m$，又$a_2 = n-m+d$

令$n-m=dk \quad \Rightarrow a_2 = dk+d = d(k+1)$ 故$d \mid a_2$

設$a_2 = dx$，$a_1 = \dfrac{2p}{x}$，其中$x \mid 2p$且$x \in N$，$x>1$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{\dfrac{2p}{x}+dx-d}{2} = \dfrac{p}{x}+\dfrac{d(x-1)}{2} \\ m = \dfrac{\dfrac{2p}{x}-dx+d}{2} = \dfrac{p}{x}-\dfrac{d(x-1)}{2} \end{cases}$$

因$a_1 > a_2 - d \quad \Rightarrow \dfrac{2p}{x} > dx-d \quad \Rightarrow x^2-x-\dfrac{2p}{d} < 0$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$$

又由$x>1$

$$\Rightarrow 1 < x < \frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$$

<舉例說明>： $p=12$，$d=3$

$$\Rightarrow 1 < x < \frac{1+\sqrt{1+\frac{96}{3}}}{2} \doteq 3.3$$

$x=2,3$

p	d	$1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$	符合的x	代入$\begin{cases} n=\frac{p}{x}+\frac{d(x-1)}{2} \\ m=\frac{p}{x}-\frac{d(x-1)}{2} \end{cases}$	$d\in\mathbb{R}$拆解法	$t(x)$
60	3	$1<x<6.8$	$x=2$	$\begin{cases} n=\frac{60}{2}+\frac{3(2-1)}{2}=31.5 \\ m=\frac{60}{2}-\frac{3(2-1)}{2}=28.5 \end{cases}$		2
			$x=3$	$\begin{cases} n=\frac{60}{3}+\frac{3(3-1)}{2}=23 \\ m=\frac{60}{3}-\frac{3(3-1)}{2}=17 \end{cases}$	17+20+23	
			$x=4$	$\begin{cases} n=\frac{60}{4}+\frac{3(4-1)}{2}=19.5 \\ m=\frac{60}{4}-\frac{3(4-1)}{2}=10.5 \end{cases}$		
			$x=5$	$\begin{cases} n=\frac{60}{5}+\frac{3(5-1)}{2}=18 \\ m=\frac{60}{5}-\frac{3(5-1)}{2}=6 \end{cases}$	6+9+12+15+18	
			$x=6$	$\begin{cases} n=\frac{60}{6}+\frac{3(6-1)}{2}=17.5 \\ m=\frac{60}{6}-\frac{3(6-1)}{2}=2.5 \end{cases}$		
60	4	$1<x<6$	$x=2$	$\begin{cases} n=\frac{60}{2}+\frac{4(2-1)}{2}=32 \\ m=\frac{60}{2}-\frac{4(2-1)}{2}=28 \end{cases}$	28+32	4
			$x=3$	$\begin{cases} n=\frac{60}{3}+\frac{4(3-1)}{2}=24 \\ m=\frac{60}{3}-\frac{4(3-1)}{2}=16 \end{cases}$	16+20+24	
			$x=4$	$\begin{cases} n=\frac{60}{4}+\frac{4(4-1)}{2}=21 \\ m=\frac{60}{4}-\frac{4(4-1)}{2}=9 \end{cases}$	9+13+17+21	

			$x=5$	$\begin{cases} n=\frac{60}{5}+\frac{4(5-1)}{2}=20 \\ m=\frac{60}{5}-\frac{4(5-1)}{2}=4 \end{cases}$	4+8+12+16+20	
63	3	$1<x<7$	$x=2$ $x=3$ $x=4$ $x=5$ $x=6$	$\begin{cases} n=\frac{63}{2}+\frac{3(2-1)}{2}=33 \\ m=\frac{63}{2}-\frac{3(2-1)}{2}=30 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{63}{3}+\frac{3(3-1)}{2}=24 \\ m=\frac{63}{3}-\frac{3(3-1)}{2}=18 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{63}{4}+\frac{3(4-1)}{2}=20.25 \\ m=\frac{63}{4}-\frac{3(4-1)}{2}=11.25 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{63}{5}+\frac{3(5-1)}{2}=18.6 \\ m=\frac{63}{5}-\frac{3(5-1)}{2}=6.6 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{63}{6}+\frac{3(6-1)}{2}=18 \\ m=\frac{63}{6}-\frac{3(6-1)}{2}=3 \end{cases}$	30+33 18+21+24 3+6+9+12+15+18	3
63	4	$1<x<6.13$	$x=2$ $x=3$ $x=4$	$\begin{cases} n=\frac{63}{2}+\frac{4(2-1)}{2}=33.5 \\ m=\frac{63}{2}-\frac{4(2-1)}{2}=29.5 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{63}{3}+\frac{4(3-1)}{2}=25 \\ m=\frac{63}{3}-\frac{4(3-1)}{2}=17 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{63}{4}+\frac{4(4-1)}{2}=21.75 \\ m=\frac{63}{4}-\frac{4(4-1)}{2}=9.75 \end{cases}$	17+21+25	1

			$x=5$ $x=6$	$\begin{cases} n=\frac{63}{5}+\frac{4(5-1)}{2}=20.6 \\ m=\frac{63}{5}-\frac{4(5-1)}{2}=4.6 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{63}{6}+\frac{4(6-1)}{2}=20.5 \\ m=\frac{63}{6}-\frac{4(6-1)}{2}=0.5 \end{cases}$		
64	3	$1<x<7.05$	$x=2$ $x=3$ $x=4$ $x=5$ $x=6$ $x=7$	$\begin{cases} n=\frac{64}{2}+\frac{3(2-1)}{2}=33.5 \\ m=\frac{64}{2}-\frac{3(2-1)}{2}=30.5 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{64}{3}+\frac{3(3-1)}{2}=24.33 \\ m=\frac{64}{3}-\frac{3(3-1)}{2}=18.33 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{64}{4}+\frac{3(4-1)}{2}=20.5 \\ m=\frac{64}{2}-\frac{3(4-1)}{2}=12.5 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{64}{5}+\frac{3(5-1)}{2}=18.8 \\ m=\frac{64}{5}-\frac{3(5-1)}{2}=6.8 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{64}{6}+\frac{3(6-1)}{2}=18.16 \\ m=\frac{64}{6}-\frac{3(6-1)}{2}=3.16 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{64}{7}+\frac{3(7-1)}{2}=18.14 \\ m=\frac{64}{7}-\frac{3(7-1)}{2}=0.14 \end{cases}$		0
64	4	$1<x<6.17$	$x=2$	$\begin{cases} n=\frac{64}{2}+\frac{4(2-1)}{2}=34 \\ m=\frac{64}{2}-\frac{4(2-1)}{2}=30 \end{cases}$	30+34	2

			$x=3$	$\begin{cases} n=\frac{64}{3}+\frac{4(3-1)}{2}=29.33 \\ m=\frac{64}{3}-\frac{4(3-1)}{2}=17.33 \end{cases}$	10+14+18+22	
			$x=4$	$\begin{cases} n=\frac{64}{4}+\frac{4(4-1)}{2}=22 \\ m=\frac{64}{4}-\frac{4(4-1)}{2}=10 \end{cases}$		
			$x=5$	$\begin{cases} n=\frac{64}{5}+\frac{4(5-1)}{2}=20.8 \\ m=\frac{64}{5}-\frac{4(5-1)}{2}=4.8 \end{cases}$		
			$x=6$	$\begin{cases} n=\frac{64}{6}+\frac{4(6-1)}{2}=20.66 \\ m=\frac{64}{6}-\frac{4(6-1)}{2}=0.66 \end{cases}$		
81	3	$1<x<7.86$	$x=2$	$\begin{cases} n=\frac{81}{2}+\frac{3(2-1)}{2}=42 \\ m=\frac{81}{2}-\frac{3(2-1)}{2}=39 \end{cases}$	39+42	3
			$x=3$	$\begin{cases} n=\frac{81}{3}+\frac{3(3-1)}{2}=30 \\ m=\frac{81}{3}-\frac{3(3-1)}{2}=24 \end{cases}$	24+27+30	
			$x=4$	$\begin{cases} n=\frac{81}{4}+\frac{3(4-1)}{2}=24.75 \\ m=\frac{81}{4}-\frac{3(4-1)}{2}=15.75 \end{cases}$		
			$x=5$	$\begin{cases} n=\frac{81}{5}+\frac{3(5-1)}{2}=22.2 \\ m=\frac{81}{5}-\frac{3(5-1)}{2}=10.2 \end{cases}$		
			$x=6$	$\begin{cases} n=\frac{81}{6}+\frac{3(6-1)}{2}=21 \\ m=\frac{81}{6}-\frac{3(6-1)}{2}=6 \end{cases}$	6+9+12+15+18 +21	

			$x=7$	$\begin{cases} n=\frac{81}{7}+\frac{3(7-1)}{2}=20.57 \\ m=\frac{81}{7}-\frac{3(7-1)}{2}=2.57 \end{cases}$		
81	4	$1<x<6.88$	$x=2$	$\begin{cases} n=\frac{81}{2}+\frac{4(2-1)}{2}=42.5 \\ m=\frac{81}{2}-\frac{4(2-1)}{2}=38.5 \end{cases}$	23+27+31	1
			$x=3$	$\begin{cases} n=\frac{81}{3}+\frac{4(3-1)}{2}=31 \\ m=\frac{81}{3}-\frac{4(3-1)}{2}=23 \end{cases}$		
			$x=4$	$\begin{cases} n=\frac{81}{4}+\frac{4(4-1)}{2}=26.25 \\ m=\frac{81}{4}-\frac{4(4-1)}{2}=14.25 \end{cases}$		
			$x=5$	$\begin{cases} n=\frac{81}{5}+\frac{5(5-1)}{2}=26.2 \\ m=\frac{81}{5}-\frac{5(5-1)}{2}=6.2 \end{cases}$		
			$x=6$	$\begin{cases} n=\frac{81}{6}+\frac{4(6-1)}{2}=23.5 \\ m=\frac{81}{6}-\frac{4(6-1)}{2}=3.5 \end{cases}$		

研究發現：

1、由於 $a_2=dx=n-m+d$ ，所以 $x=\frac{n-m}{d}+1$，可得知所取 $2p$ 因數 x 正是 p 所能分解為公差 d 之連續等差數字和的項數。

2、能表示為公差 d 的連續等差數字和的最小數字為 $1+(1+d)$ ，因此 $p<d+2$

$\Rightarrow p$ 必定無法表示成為公差 d 的連續等差數字和。

3、當 d 為奇數，若在區間 $(1,\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x ($\frac{x-1}{2}\in N \Rightarrow x$ 必為奇數)，則 p 無法表示成為公差 d 為奇數連續等差數字和。符合 $1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 之 $2p$ 因數 x 個數即為拆法數， x 代表公差 d 所能分解的項數。

4、當 d 為偶數，若在區間 $(1,\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x ，則 p 無法表示成為公差 d 為偶數連續等差數字和。符合 $1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 之符合 $2p$ 因數 x 個數即為拆法數， x 代表公差 d 所能分解的項數。

5、 n,m 的通式為 $\begin{cases} n=\frac{p}{x}+\frac{d(x-1)}{2} \\ m=\frac{p}{x}-\frac{d(x-1)}{2} \end{cases}$ ，其中 x 為符合上述條件之 $2p$ 的因數。

陸、 研究結果與討論

一、 給定正整數 p ，找出 $d=1$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

1、根據數字拆解中，我們可以得知，1和 2^n 無法以連續正整數所分解。

2、若 p 為欲分解的正整數，首項為 a 且 $a\in\mathrm{N}$ ，如果 p 為continuing number(公差為1)，則 $p=a+(a+1)=2a+1$ ，因此當 p 為大於2的奇數，則此數必為continuing number。

3、從1~30的數字當中我們得知，除了1和 2^n 以外的自然數都可以被分解。

4、由可拆解的自然數中，發現到了以下的規律：

定義： p ＝欲分解的正整數； N_m ＝分解為m項的中間項；m＝分解項數

如果能將一個數字拆成兩項：$2N_2+1=(N_2)+(N_2+1)$表示

如果能將一個數字拆成三項：$3N_3\quad=(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$表示

如果能將一個數字拆成四項：$4N_4+2=(N_4-1)+(N_4)+(N_4+1)+(N_4+2)$表示

所以我們可以得到一個結論：

$$p=2N_2+1=(N_2)+(N_2+1)$$

$$p=3N_3\quad=(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$$

$$p=4N_4+2=(N_4-1)+(N_4)+(N_4+1)+(N_4+2)$$

5、觀察上式，如果 p 可以被拆解，則：

（1） $p=m\ N_m$ ， m ＝奇數　　（2） $p=m\ N_m+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(2\mathrm{N}_m+1)$ ， m ＝偶數

二、 給定正整數 p ，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=1$ 的所有分解法。

（一）利用 N_m 尋找拆解法

根據研究一的結果，一數若可以分解，則可能為以下兩種拆解方式：

（1） $p=m\ N_m$ ， m ＝奇數　　（2） $p=m\ N_m+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(2N_m+1)$ ， m ＝偶數

根據我們所歸納出來的結果發現到了：

1、一個可被分解的數最多可以被分解為（奇因數個數－1）種。

2、可被分解的數一定有除了1以外的奇因數。

3、質數除了2以外，其他的質數只有一種拆解法，並且是拆解為 $2N_2+1$。

4、 2^n 以外的數都可以被分解為連續的正整數和。

$\because 2^n$ 不帶除了1以外的任何奇因數

$\therefore$不可以分解

$\because$　2^n 以外的數必帶除了1以外的奇因數

$\therefore$可以分解

我們也可以說根據我們觀察的結果 2^n 只有一個奇因數為1

所以它的拆解法為（奇因數個數－1）＝0，所以根本就沒有拆解法。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義： p ＝欲分解的正整數； d ＝公差， m ＝首項， n ＝末項

1、拆解continuing number（ $d=1$ ）

$p=m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+\ldots+n$ 且m、n、$p\in N$

由等差級數公式可得： $p=\dfrac{(n+m)(n-m+1)}{2}$

由於(n+m)、(n－m+1)的奇偶性相異，所以 p 必有正奇因數

故知道 2^n 無法表示為公差為1的continuing number

2、若p有1以外的正奇因數時，令 $\begin{cases} a_1=n+m \\ a_2=n-m+1 \end{cases}$ ，則 $2p=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases} n=\dfrac{a_1+a_2-1}{2} \\ m=\dfrac{a_1-a_2+1}{2} \end{cases}$

由於 n＞m＞0 可得 $\begin{cases} \dfrac{a_1+a_2-1}{2}>\dfrac{a_1-a_2+1}{2} \\ \dfrac{a_1-a_2+1}{2}>0 \end{cases}$ ，化簡後得 $\begin{cases} a_2>1 \\ a_1>a_2 \end{cases}$ ，即 $a_1>a_2>1$

三、 給定正整數 p ，找出 $d=2$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

1、根據數字拆解中，我們可以得知，1和質數無法以連續正奇數或正偶數和所分解。

2、若 p 為欲分解的正整數，首項為 a 且 $a \in \mathrm{N}$ ，如果 p 為奇偶continuing number(公差為2)，則 $p=a+(a+2)=2a+2=2(a+1)$ ，因此當 p 為大於2的偶數，則此數必為奇偶continuing number(公差為2)。

3、從1~30的數字當中我們得知，除了1和質數以外的自然數都可以被分解。

4、由上面可拆解的自然數中，發現到了以下的規律：

定義： p ＝欲分解的正整數； N_m ＝分解為m項的中間項；m＝分解項數

如果能將一個數字拆成兩項：$2N_2=(N_2-1)+(N_2+1)$表示

如果能將一個數字拆成三項：$3N_3=(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$表示

如果能將一個數字拆成四項：$4N_4=(N_4-3)+(N_4-1)+(N_4+1)+(N_4+3)$表示

所以我們可以得到一個結論：

$$p=2N_2=(N_2-1)+(N_2+1)$$

$$p=3N_3=(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$$

$$p=4N_4=(N_4-3)+(N_4-1)+(N_4+1)+(N_4+3)$$

5、觀察上式，如果 p 可以被拆解，則：$\boxed{p=m\,N_m，m\in\mathrm{N}}$，因此當 p 為大於2的合數，則此數必為奇偶continuing number(公差為2)。

四、 給定正整數 p ，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=2$ 的所有分解法。

（一）利用 N_m 尋找拆解法

根據研究三的結果，一數若可以分解，則：$\boxed{p=m\,N_m，m\in\mathrm{N}}$

根據我們所歸納出來的結果發現到了：

（1）一個可被分解的數最多可以被分解為：

當 p 為平方數，定義 $\phi(p)$ 為 p 之所有正因數，則可分解為（$\frac{\phi(p)+1}{2}-1$）個；

當 p 不為平方數，定義 $\phi(p)$ 為 p 之所有正因數，則可分解為（$\frac{\phi(p)}{2}$－1）個。

（2）可被分解的數一定有除了1和本身以外的因數。

（3）質數以外的數都可以被分解為連續的正奇偶數和。

∵質數除了1以外的不帶有任何因數

∴不可以分解

∵質數以外的合數必帶除了1和本身以外的因數

∴可以分解

我們也可以說根據我們觀察的結果質數只有1和本身以外的2個因數

所以它的拆解法為（$\frac{\phi(p)}{2}$－1）＝0，所以根本就沒有拆解法。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：p ＝欲分解的正整數；d ＝公差，m ＝首項，n ＝末項

1、拆解奇偶continuing number（$d=2$）

$p=m+(m+2)+(m+4)+(m+6)+...+n$ 且 m 、n 、$p\in\mathrm{N}$

由等差級數公式可得：$p=\frac{(n+m)(n-m+2)}{4}$，即 $4p=(n+m)(n-m+2)$

令 $\begin{cases} a_1=n+m \\ a_2=n-m+2 \end{cases}$，則 $4p=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases} n=\dfrac{a_1+a_2-2}{2} \\ m=\dfrac{a_1-a_2+2}{2} \end{cases}$

當 a_1 、a_2 同奇偶時，m 、n 有正整數解

但 $4p=a_1\cdot a_2$，即 $2|a_1$ 且 $2|a_2$

又 $n>m>0$，$\frac{a_1+a_2-2}{2}>\frac{a_1-a_2+2}{2}$ 且 $\frac{a_1-a_2+2}{2}>0$

化簡後得 $\begin{cases} a_2>2 \\ a_1>a_2-2 \end{cases}$，即 $a_1\geq a_2>2$

2、若 $2|a_1$ 且 $2|a_2$，可設 $4p=2x\cdot 2y$（$a_1=2x$，$a_2=2y$）$\Rightarrow$ $xy=p$

又因 $a_1\geq a_2>2$ 可得 $x\geq y>1$，$x,y\in\mathrm{N}$

所以當一正整數 p 只能質因數分解為 $p\times 1$時（即 p 為質數）無法符合此條件

則 p 之可能拆法為滿足此條件的數對（x，y）

此時：

將 $\begin{cases} a_1 = 2x \\ a_2 = 2y \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} n = \dfrac{a_1 + a_2 - 2}{2} \\ m = \dfrac{a_1 - a_2 + 2}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 化簡後得 $\begin{cases} n = x + y - 1 \\ m = x - y + 1 \end{cases}$ 且 $x \geq y > 1$，$x, y \in \mathrm{N}$

五、 推廣到任意公差 d，以代數推導出快速尋找所有分解方法數，並限制項數 x 範圍作討論。

1、由於 $a_2 = dx = n - m + d$，所以 $x = \dfrac{n-m}{d} + 1$，可得知所取 $2p$ 因數 x 正是 p 所能分解為公差 d 之連續等差數字和的項數。

2、能表示為公差 d 的連續等差數字和的最小數字為 $1 + (1 + d)$，因此 $p < d + 2$ $\Rightarrow p$ 必定無法表示成為公差 d 的連續等差數字和。

3、當 d 為奇數，若在區間 $(1, \dfrac{1 + \sqrt{1 + \frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x ($\dfrac{x-1}{2} \in N \Rightarrow x$ 必為奇數)，則 p 無法表示成為公差 d 為奇數連續等差數字和。符合 $1 < x < \dfrac{1 + \sqrt{1 + \frac{8p}{d}}}{2}$ 之 $2p$ 因數 x 個數即為拆法數，x 代表公差 d 所能分解的項數。

4、當 d 為偶數，若在區間 $(1, \dfrac{1 + \sqrt{1 + \frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x，則 p 無法表示成為公差 d 為偶數連續等差數字和。符合 $1 < x < \dfrac{1 + \sqrt{1 + \frac{8p}{d}}}{2}$ 之符合 $2p$ 因數 x 個數即為拆法數，x 代表公差 d 所能分解的項數。

5、n, m 的通式為 $\begin{cases} n = \dfrac{p}{x} + \dfrac{d(x-1)}{2} \\ m = \dfrac{p}{x} - \dfrac{d(x-1)}{2} \end{cases}$，其中 x 為符合上述條件之 $2p$ 的因數。

柒、結論

一、 給定正整數 p ，找出 $d=1$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

1、根據數字拆解中，我們可以得知，1和 2^n 無法以連續正整數所分解。

2、若 p 為欲分解的正整數，首項為 a 且 $a\in \mathrm{N}$ ，如果 p 為continuing number(公差為1)，

則 $p=a+(a+1)=2a+1$，因此當 p 為大於2的奇數，則此數必為continuing number(公差為1)。

3、從1~30的數字當中我們得知，除了1和 2^n 以外的自然數都可以被分解。

4、若 p 為欲分解的正整數，如果 p 可以被拆解，則：

（1） $p=m\,N_m$ ， m ＝奇數　　（2） $p=m\,N_m+\dfrac{m}{2}=\dfrac{m}{2}(2\mathrm{N}_m+1)$ ， m ＝偶數

二、 給定正整數 p ，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=1$ 的所有分解法。

（一）利用 N_m 尋找拆解法

1、根據研究一的結果，一數若可以分解，則可能為以下兩種拆解方式：

（1） $p=m\,N_m$ ， m ＝奇數　　（2） $p=m\,N_m+\dfrac{m}{2}=\dfrac{m}{2}(2\mathrm{N}_m+1)$ ， m ＝偶數

2、一個可被分解的數最多可以被分解為（奇因數個數－1）種。

3、可被分解的數一定有除了1以外的奇因數。

4、質數除了2以外，其他的質數只有一種拆解法，並且是拆解為 $2N_2+1$。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義： p ＝欲分解的正整數； d ＝公差， m ＝首項， n ＝末項

1、拆解continuing number（ $d=1$ ）

$p=m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+...+n$ 且m、n、p∈N

由等差級數公式可得： $p=\dfrac{(n+m)(n-m+1)}{2}$

由於(n+m)、(n－m+1)的奇偶性相異，所以 p 必有正奇因數

故知道 2^n 無法表示為公差為1的continuing number

2、若p有1以外的正奇因數時，令$\begin{cases} a_1 = n+m \\ a_2 = n-m+1 \end{cases}$，則$2p=a_1 \cdot a_2$且$\begin{cases} n = \dfrac{a_1+a_2-1}{2} \\ m = \dfrac{a_1-a_2+1}{2} \end{cases}$

由於 n＞m＞0 可得$\begin{cases} \dfrac{a_1+a_2-1}{2} > \dfrac{a_1-a_2+1}{2} \\ \dfrac{a_1-a_2+1}{2} > 0 \end{cases}$

化簡後得$\begin{cases} a_2 > 1 \\ a_1 > a_2 \end{cases}$，即$a_1 > a_2 > 1$

三、 給定正整數 p ，找出$d=2$哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

1、根據數字拆解中，我們可以得知，1和質數無法以連續正奇偶數和所分解。

2、若 p 為欲分解的正整數，首項為a且$a \in \mathrm{N}$ ，如果 p 為奇偶continuing number(公差為2)，則 $p = a+(a+2) = 2a+2 = 2(a+1)$ ，因此當 p 為大於2的偶數，則此數必為奇偶continuing number(公差為2)。

3、從1~30的數字當中我們得知，除了1和質數以外的自然數都可以被分解。

4、若 p 為欲分解的正整數，如果 p 可以被拆解，則：$\boxed{p = m\ N_m \text{，} m \in \mathrm{N}}$，因此當 p 為大於2的合數，則此數必為奇偶continuing number(公差為2)。

四、 給定正整數 p ，研究如何有系統快速的尋找一數字$d=2$的所有分解法。

（一）利用N_m尋找拆解法

1、根據研究三的結果，一數若可以分解，則：$\boxed{p = m\ N_m \text{，} m \in \mathrm{N}}$

2、一個可被分解的數最多可以被分解為：

當 p 為平方數，定義$\phi(p)$為 p 之所有正因數，則可分解為（$\dfrac{\phi(p)+1}{2}$－1）個；

當 p 不為平方數，定義$\phi(p)$為 p 之所有正因數，則可分解為（$\dfrac{\phi(p)}{2}$－1）個。

3、可被分解的數一定有除了1和本身以外的因數。

4、質數以外的數都可以被分解為連續的正奇數或正偶數和。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：p ＝欲分解的正整數；d ＝公差，m ＝首項，n ＝末項

1、拆解奇偶continuing number（$d=2$）

$p=m+(m+2)+(m+4)+(m+6)+...+n$ 且 m 、n 、$p\in\mathrm{N}$

由等差級數公式可得：$p=\dfrac{(n+m)(n-m+2)}{4}$，即 $4p=(n+m)(n-m+2)$

令 $\begin{cases} a_1=n+m \\ a_2=n-m+2 \end{cases}$，則 $4p=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases} n=\dfrac{a_1+a_2-2}{2} \\ m=\dfrac{a_1-a_2+2}{2} \end{cases}$

當 a_1 、a_2 同奇偶時，m 、n 有正整數解

但 $4p=a_1\cdot a_2$，即 $2|a_1$ 且 $2|a_2$

又 $n>m>0$，$\dfrac{a_1+a_2-2}{2}>\dfrac{a_1-a_2+2}{2}$ 且 $\dfrac{a_1-a_2+2}{2}>0$

化簡後得 $\begin{cases} a_2>2 \\ a_1>a_2-2 \end{cases}$，即 $a_1\geq a_2>2$

2、若 $2|a_1$ 且 $2|a_2$，可設 $4p=2x\cdot 2y$（$a_1=2x$，$a_2=2y$）$\Rightarrow$ $xy=p$

又因 $a_1\geq a_2>2$ 可得 $x\geq y>1$，$x,y\in\mathrm{N}$

所以當一正整數 p 只能質因數分解為 $p\times 1$ 時（即 p 為質數）無法符合此條件

則 p 之可能拆法為滿足此條件的數對（x，y）

此時：

將 $\begin{cases} a_1=2x \\ a_2=2y \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} n=\dfrac{a_1+a_2-2}{2} \\ m=\dfrac{a_1-a_2+2}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 化簡後得 $\begin{cases} n=x+y-1 \\ m=x-y+1 \end{cases}$ 且 $x\geq y>1$，$x,y\in\mathrm{N}$

五、 推廣到任意公差d，以代數推導出快速尋找所有分解方法數，並限制項數x範圍作討論。

1、由於 $a_2 = dx = n - m + d$ ，所以 $x = \dfrac{n-m}{d} + 1$ ，可得知所取 $2p$ 因數 x 正是 p 所能分解為公差 d 之連續等差數字和的項數。

2、能表示為公差d的連續等差數字和的最小數字為 $1+(1+d)$ ，因此 $p < d+2$
$\Rightarrow p$ 必定無法表示成為公差d的連續等差數字和。

3、當d為奇數，若在區間 $(1, \dfrac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x ($\dfrac{x-1}{2} \in N \Rightarrow x$ 必為奇數)，則 p 無法表示成為公差d為奇數連續等差數字和。符合 $1 < x < \dfrac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 之 $2p$ 因數 x 個數即為拆法數， x 代表公差 d 所能分解的項數。

4、當d為偶數，若在區間 $(1, \dfrac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x ，則 p 無法表示成為公差d為偶數連續等差數字和。符合 $1 < x < \dfrac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 之符合 $2p$ 因數 x 個數即為拆法數， x 代表公差 d 所能分解的項數。

5、 n, m 的通式為 $\begin{cases} n = \dfrac{p}{x} + \dfrac{d(x-1)}{2} \\ m = \dfrac{p}{x} - \dfrac{d(x-1)}{2} \end{cases}$ ，其中 x 為符合上述條件之 $2p$ 的因數。

捌、 參考資料

一、康軒版國中數學一上1-4 指數律
二、康軒版國中數學一上2-1 因數與倍數
三、康軒版國中數學一下5-1 一元一次不等式
四、康軒版國中數學一下5-2 解一元一次不等式
五、康軒版國中數學四下1-1 等差數列
六、康軒版國中數學四下1-2 等差級數
七、連續數字和。2011年2月18日取自：http://nas.fg.tp.edu.tw/research/15/數學科/29.pdf
八、關於連續整數的數學問題。2010年12月27日取自：
http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1607110809671

【評語】030412

作者探討將給定的自然數表示為連續正整數和的可行性問題。針對這個問題給出了完整的答案。對於更進一步的，將一個給定的自然數表示為等差級數和的可行性問題，也作了一些分析。能藉由簡單的等差級數和的結果來說明在觀察小數字時所得出的規律，展現的數學分析能力與數學研究精神值得嘉許。但部分結論太簡略，而有些又太長了。在公差為 d 時其實是一個熟知的問題，已有許多的文獻可參考，作者可以再多查閱。此外侷限在給定公差的前提下，這似乎不是絕對的必要。放寬這個條件，作一些分析，應該會更有趣。

作品海報

摘要

本研究旨在探討一個正整數的連續數字和表示法與該數的因數有關，在研究過程中，我們先針對最基本的問題：給定一個正整數 p，將其分解成 $d=1$ 及 $d=2$ 的連續等差數字和，利用等差級數公式中奇偶性的關係導出結論，設法以有系統且快速的分解成公差爲1或2的連續數字和；進而推導至任意公差，只要給定一個正整數 p 和公差 d，代入公式後，可得知項數 x 的範圍，再經過驗證後，就可以得到首項 m 及末項 n。

壹、研究動機

在國中二年級學到了第四冊等差級數單元，只要知道首項、公差、項數就可以用等差級數公式來求出總和，我們發現了一個與前述相反的問題，如果給定一個正整數 p，是否能表示成公差爲 1 的連續等差數字和，例如：38＝8+9+10+11、48＝15+16+17，這些數可用連續正整數和來表示，但有些數卻無法表示爲連續等差數字和，引起我們的好奇，想找出是否有特別的方法來找出這些數的總和，以下便是針對這個問題做研究，並將其推廣到任意公差。

貳、研究目的

一、給定正整數 p，找出 $d=1$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

二、給定正整數 p，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=1$ 的所有分解法。

三、給定正整數 p，找出 $d=2$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和。

四、給定正整數 p，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=2$ 的所有分解法。

五、推廣到任意公差 d，以代數推導出快速尋找所有分解方法數，並限制項數 x 範圍作討論。

參、研究設備及器材

計算紙、筆、電腦（excel 檔）、計算機。

肆、研究過程或方法

一、給定正整數 p，找出 $d=1$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和

數字	是否爲 continuing number	$d=1$ 拆解法	$f(x)$
1	否		0
2	否		0
3	是	1+2	1
4	否		0
5	是	2+3	1
6	是	1+2+3	1
7	是	3+4	1
8	否		0
9	是	4+5，2+3+4	2
10	是	1+2+3+4	1

研究發現：

由上面可拆解的自然數中，有了以下發現：

1、根據上列數字拆解中，我們可以得知，1和 2^n 無法以連續正整數所分解。

2、若 p 爲欲分解的正整數，首項爲 a 且 $a\in N$，如果 p 爲continuing number(公差爲1)，則 $p=a+(a+1)=2a+1$，因此當 p 爲大於2的奇數，則此數必爲continuing number。

3、由上面可拆解的自然數中，發現到了以下的規律：

定義：p＝欲分解的正整數；N_m＝分解爲m項的中間項；m＝分解項數

如果能將一個數字拆成兩項：$2N_2+1=(N_2)+(N_2+1)$ 表示

如果能將一個數字拆成三項：$3N_3 \quad =(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$ 表示

如果能將一個數字拆成四項：$4N_4+2=(N_4-1)+(N_4)+(N_4+1)+(N_4+2)$ 表示

所以我們可以得到一個結論：$p=2N_2+1=(N_2)+(N_2+1)$

$p=3N_3 \quad =(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$

$p=4N_4+2=(N_4-1)+(N_4)+(N_4+1)+(N_4+2)$

4、觀察上式，如果 p 可以被拆解，則：

（1）$p=m\,N_m$，m＝奇數　（2）$p=m\,N_m+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(2N_m+1)$，$m$＝偶數

二、給定正整數 p，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=1$ 的所有分解法

（一）利用 N_m 尋找拆解法：根據研究一的結果，一數若可以分解，則可爲以下兩種拆解方式：

（1）$p=m\,N_m$，m＝奇數　（2）$p=m\,N_m+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(2N_m+1)$，$m$＝偶數

p	標準分解式	大於 1 的奇因數	拆解過程	$d=1$ 拆解法	f(x)
28	$2^2\times 7$	7	$7N_7=28$，$N_7=4$	1+2+3+4+5+6+7	1

研究發現：

（1）一個可被分解的數最多可以被分解爲（奇因數個數－1）種。

（2）可被分解的數一定有除了1以外的奇因數。

（3）質數除了2以外，其他的質數只有一種拆解法，並且是拆解爲 $2N_2+1$。

（4）2^n 以外的數都可以被分解爲連續的正整數和。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：p＝欲分解的正整數；d＝公差，m＝首項，n＝末項

1、拆解continuing number（$d=1$）

$p=m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+\cdots+n$ 且 m、n、$p\in N$

由等差級數公式可得：$p=\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$，由於(n+m)、(n－m+1)的奇偶性相異，即 a_1、a_2 爲一奇一偶，所以 p 必有正奇因數，故 2^n 無法表示爲公差爲 1 的 continuing number

2、若p有1以外的正奇因數時，令 $\begin{cases}a_1=n+m\\a_2=n-m+1\end{cases}$，則 $2p=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases}n=\frac{a_1+a_2-1}{2}\\m=\frac{a_1-a_2+1}{2}\end{cases}$

由於 n＞m＞0 可得 $\begin{cases}\frac{a_1+a_2-1}{2}>\frac{a_1-a_2+1}{2}\\\frac{a_1-a_2+1}{2}>0\end{cases}$ 化簡後得 $\begin{cases}a_2>1\\a_1>a_2\end{cases}$，即 $a_1>a_2>1$

數字	2p 的所有因數	符合的 (a_1,a_2)	拆解過程	$d=1$ 拆解法	f(x)
28	1、2、4、7、8、14、28、56	(8，7)	$\begin{cases}n=\frac{8+7-1}{2}=7\\m=\frac{8-7+1}{2}=1\end{cases}$	1+2+3+4+5+6+7	1

研究發現：給定一組 a_1、a_2，當 $a_1>a_2$ 且 a_1 及 a_2 奇偶性相異時就有正整數解，因此 p 有 n 個正奇因數(不包含 1)就有 n 種拆法。

三、給定正整數 p，找出 $d=2$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和

數字	是否爲奇偶 continuing number	$d=2$ 拆解法	$g(x)$
1	否		0
2	否		0
3	否		0
4	是	1+3	1
5	否		0
6	是	2+4	1
7	否		0
8	是	3+5	1
9	是	1+3+5	1
10	是	4+6	1

研究發現：

由上面可拆解的自然數中，有了以下發現：

1、根據上列數字拆解中，我們可以得知，1和質數無法以連續正奇數或正偶數和所分解。

2、若 p 爲欲分解的正整數，首項爲 a 且 $a\in N$，如果 p 爲公差爲2的continuing number，則 $p=a+(a+2)=2a+2=2(a+1)$，因此當 p 爲大於2的偶數，則此數必爲公差爲2的 continuing number。

3、由上面可拆解的自然數中，發現到了以下的規律：

定義：p＝欲分解的正整數；N_m＝分解爲m項的中間項；m＝分解項數

如果能將一個數字拆成兩項：$2N_2=(N_2-1)+(N_2+1)$ 表示

如果能將一個數字拆成三項：$3N_3=(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$ 表示

如果能將一個數字拆成四項：$4N_4=(N_4-3)+(N_4-1)+(N_4+1)+(N_4+3)$ 表示

所以我們可以得到一個結論：

$p=2N_2=(N_2-1)+(N_2+1)$

$p=3N_3=(N_3-1)+(N_3)+(N_3+1)$

$p=4N_4=(N_4-3)+(N_4-1)+(N_4+1)+(N_4+3)$

4、觀察上式，如果 p 可以被拆解，則：$\boxed{p=m\,N_m,\ m\in N}$，因此當 p 爲大於2的合數，則此數必爲公差爲2的continuing number。

四、 給定正整數 p，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=2$ 的所有分解法

（一）利用 N_m 尋找拆解法：根據研究三的結果，一數若可以分解，則：$p=m\,N_m$，$m\in N$

p	標準分解式	p 的所有因數	拆解過程	$d=2$ 拆解法	g(x)
49	7^2	1、7、25	$7N_7=49$，$N_7=7$	1+3+5+7+9+11+13	1
50	2×5^2	1、2、5、10、25、50	$2N_2=50$，$N_2=25$ $5N_5=50$，$N_5=10$	24+26 6+8+10+12+14	2

研究發現：

（1）一個可被分解的數最多可以被分解爲：

當 p 爲平方數，定義 $\phi(p)$ 爲 p 之所有正因數，則可分解爲（$\frac{\phi(p)+1}{2}-1$）個；

當 p 不爲平方數，定義 $\phi(p)$ 爲 p 之所有正因數，則可分解爲（$\frac{\phi(p)}{2}-1$）個。

（2）可被分解的數一定有除了1和本身以外的因數。

（3）質數以外的數都可以被分解爲連續的正奇偶數和。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：p＝欲分解的正整數；d＝公差，m＝首項，n＝末項

1、拆解continuing number（$d=2$）

$p=m+(m+2)+(m+4)+(m+6)+...+n$ 且 m、n、$p\in N$

由等差級數公式可得：$p=\frac{(n+m)(n-m+2)}{4}$，即 $4p=(n+m)(n-m+2)$

令 $\begin{cases}a_1=n+m\\a_2=n-m+2\end{cases}$，則 $4p=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases}n=\frac{a_1+a_2-2}{2}\\m=\frac{a_1-a_2+2}{2}\end{cases}$

當 a_1、a_2 同奇偶時，m、n 有正整數解，但 $4p=a_1\cdot a_2$，即 $2|a_1$ 且 $2|a_2$ 又 $n>m>0$，

$\frac{a_1+a_2-2}{2}>\frac{a_1-a_2+2}{2}$ 且 $\frac{a_1-a_2+2}{2}>0$ 化簡後得 $\begin{cases}a_2>2\\a_1>a_2-2\end{cases}$，即 $a_1\ge a_2>2$

2、若 $2|a_1$ 且 $2|a_2$，可設 $4p=2x\cdot2y$（$a_1=2x$，$a_2=2y$）$\Rightarrow xy=p$

又因 $a_1\ge a_2>2$ 可得 $x\ge y>1$，$x,y\in N$

所以當一正整數 p 只能質因數分解爲 $p\times1$ 時（即 p 爲質數）無法符合此條件

則 p 之可能拆法爲滿足此條件的數對（x，y）

將 $\begin{cases}a_1=2x\\a_2=2y\end{cases}$ 代入 $\begin{cases}n=\frac{a_1+a_2-2}{2}\\m=\frac{a_1-a_2+2}{2}\end{cases}\Rightarrow$ 化簡後得 $\begin{cases}n=x+y-1\\m=x-y+1\end{cases}$ 且 $x\ge y>1$，$x,y\in N$

數字	p 的所有因數	符合的 (x,y)	拆解過程	$d=2$ 拆解法	g(x)
49	1、7、49	(7，7)	$\begin{cases}m=7+7-1=13\\n=7-7+1=1\end{cases}$	1+3+5+7+9+11+13	1
50	1、2、5、10、25、50	(10，5) (25，2)	$\begin{cases}m=10+5-1=14\\n=10-5+1=6\end{cases}$ $\begin{cases}m=25+2-1=26\\n=25-2+1=24\end{cases}$	6+8+10+12+14 24+26	2

研究發現：給定一組數對（x，y），當 $x\ge y>1$，$x,y\in N$，因此當 p 爲平方數，定義 $\phi(p)$ 爲 p 之所有正因數，則可分解爲（$\frac{\phi(p)+1}{2}-1$）個；當 p 不爲平方數，則可分解爲（$\frac{\phi(p)}{2}-1$）個。

五、 推廣到任意公差 d，以代數推導出快速尋找所有分解方法數，並限制項數 x 範圍作討論

（一）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：p＝欲分解的正整數；d＝公差，m＝首項，n＝末項

1、推廣到任意公差 d

$p=m+(m+d)+(m+2d)+(m+3d)+.$ 且m、n、p$\in N$

由等差級數公式可得：$p=\frac{(n+m)\cdot(\frac{n-m}{d}+1)}{2}=\frac{(n+m)\cdot(n-m+d)}{2d}$

可得 $2dp=(n+m)\cdot(n-m+d)$ 令 $\begin{cases}a_1=n+m\\a_2=n-m+d\end{cases}$，

則 $2dp=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases}n=\frac{a_1+a_2-d}{2}\\m=\frac{a_1-a_2+d}{2}\end{cases}$

又 $n>m>0\Rightarrow\frac{a_1+a_2-d}{2}>\frac{a_1-a_2+d}{2}$ 且m、n、p$\in N$

$\Rightarrow2a_2>2d\Rightarrow a_2>d$

因 $\frac{n-m}{d}+1\in N$，可得知 $d|n-m$，又 $a_2=n-m+d$

令 $n-m=dk\Rightarrow a_2=dk+d=d(k+1)$ 故 $d|a_2$

設 $a_2=dx$，$a_1=\frac{2p}{x}$，其中 $x|2p$ 且 $x\in N$，$x>1$

$\Rightarrow\begin{cases}n=\frac{\frac{2p}{x}+dx-d}{2}=\frac{p}{x}+\frac{d(x-1)}{2}\\m=\frac{\frac{2p}{x}-dx+d}{2}=\frac{p}{x}-\frac{d(x-1)}{2}\end{cases}$ 因 $a_1>a_2-d\Rightarrow\frac{2p}{x}>dx-d\Rightarrow x^2-x-\frac{2p}{d}<0$

$\Rightarrow\frac{1-\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 又由 $x>1\Rightarrow1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$

<舉例說明>：$p=60$，$d=3$

$\Rightarrow1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{480}{3}}}{2}$ □ 6.8

$\Rightarrow x=2$、3、4、5、6

p	d	$1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$	符合的 x	代入 $\begin{cases}n=\frac{p}{x}+\frac{d(x-1)}{2}\\m=\frac{p}{x}-\frac{d(x-1)}{2}\end{cases}$	$d\ge3$ 拆解法	$t(x)$
60	3	$1<x<6.8$	$x=2$	$\begin{cases}n=\frac{60}{2}+\frac{3(2-1)}{2}=31.5\\m=\frac{60}{2}-\frac{3(2-1)}{2}=28.5\end{cases}$		2
			$x=3$	$\begin{cases}n=\frac{60}{3}+\frac{3(3-1)}{2}=23\\m=\frac{60}{3}-\frac{3(3-1)}{2}=17\end{cases}$	17+20+23	
			$x=4$	$\begin{cases}n=\frac{60}{4}+\frac{3(4-1)}{2}=19.5\\m=\frac{60}{4}-\frac{3(4-1)}{2}=10.5\end{cases}$		
			$x=5$	$\begin{cases}n=\frac{60}{5}+\frac{3(5-1)}{2}=18\\m=\frac{60}{5}-\frac{3(5-1)}{2}=6\end{cases}$	6+9+12+15+18	
			$x=6$	$\begin{cases}n=\frac{60}{6}+\frac{3(6-1)}{2}=17.5\\m=\frac{60}{6}-\frac{3(6-1)}{2}=2.5\end{cases}$		

研究發現：

1、由於 $a_2=dx=n-m+d$，所以 $x=\frac{n-m}{d}+1$，可得知所取 $2p$ 因數 x 正是 p 所能分解爲公差 d 之連續等差數字和的項數。

2、能表示爲公差 d 的連續等差數字和的最小數字爲 $1+(1+d)$，因此 $p<d+2$

$\Rightarrow p$ 必定無法表示成爲公差 d 的連續等差數字和。

3、當 d 爲奇數，若在區間 $(1,\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x（$\frac{x-1}{2}\in N\Rightarrow x$ 必爲奇數)，則 p 無法表示成爲公差 d 爲奇數連續等差數字和。符合 $1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 之 $2p$ 因數 x 個數即爲拆法數，x 代表公差 d 所能分解的項數。

4、當 d 爲偶數，若在區間 $(1,\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x，則 p 無法表示成爲公差 d 爲偶數連續等差數字和。符合 $1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 之 $2p$ 因數 x 個數即爲拆法數，x 代表公差 d 所能分解的項數。

5、n,m 的通式爲 $\begin{cases}n=\frac{p}{x}+\frac{d(x-1)}{2}\\m=\frac{p}{x}-\frac{d(x-1)}{2}\end{cases}$，其中 x 爲符合上述條件之 $2p$ 的因數。

伍、結論

一、 給定正整數 p，找出 $d=1$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和

1、根據數字拆解中，我們可以得知，1和 2^n 無法以連續正整數所分解。

2、若 p 爲欲分解的正整數，首項爲 a 且 $a\in\mathrm{N}$，如果 p 爲continuing number(公差爲1)，

則 $p=a+(a+1)=2a+1$，因此當 p 爲大於2的奇數，則此數必爲continuing number(公差爲1)。

3、從1~30的數字當中我們得知，除了1和 2^n 以外的自然數都可以被分解。

4、若 p 爲欲分解的正整數，如果 p 可以被拆解，則：

（1）$p=m\,N_m$，$m=$奇數　（2）$p=m\,N_m+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(2N_m+1)$，$m=$偶數

二、 給定正整數 p，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=1$ 的所有分解法

（一）利用 N_m 尋找拆解法：根據研究一的結果，一數若可以分解，則可爲以下兩種拆解方式：

1、（1）$p=m\,N_m$，$m=$奇數　（2）$p=m\,N_m+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(2N_m+1)$，$m=$偶數

2、一個可被分解的數最多可以被分解爲（奇因數個數－1）種。

3、可被分解的數一定有除了1以外的奇因數。

4、質數除了2以外，其他的質數只有一種拆解法，並且是拆解爲 $2N_2+1$。

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：$p=$欲分解的正整數；$d=$公差，$m=$首項，$n=$末項

1、拆解continuing number（$d=1$）$p=m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+...+n$ 且 m、n、p$\in$N

由等差級數公式可得：$p=\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$，由於(n+m)、(n－m+1)的奇偶性相異，所以

p 必有正奇因數，故知道 2^n 無法表示爲公差爲 1 的 continuing number

2、若p有1以外的正奇因數時，令 $\begin{cases}a_1=n+m\\a_2=n-m+1\end{cases}$，則 $2p=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases}n=\frac{a_1+a_2-1}{2}\\m=\frac{a_1-a_2+1}{2}\end{cases}$

由於 n>m>0 可得 $\begin{cases}\frac{a_1+a_2-1}{2}>\frac{a_1-a_2+1}{2}\\\frac{a_1-a_2+1}{2}>0\end{cases}$ 化簡後得 $\begin{cases}a_2>1\\a_1>a_2\end{cases}$，即 $a_1>a_2>1$

三、 給定正整數 p，找出 $d=2$ 哪一類的數字無法表示成連續等差數字和

1、根據數字拆解中，我們可以得知，1和質數無法以連續正奇偶數和所分解。

2、若 p 爲欲分解的正整數，首項爲 a 且 $a\in\mathrm{N}$，如果 p 爲公差爲2的continuing number，

則 $p=a+(a+2)=2a+2=2(a+1)$，因此當 p 爲大於2的偶數，則此數必爲公差爲2的

continuing number。

3、從1~30的數字當中我們得知，除了1和質數以外的自然數都可以被分解。

4、若 p 爲欲分解的正整數，如果 p 可以被拆解，則：$\boxed{p=m\,N_m，m\in\mathrm{N}}$，因此當 p 爲大於2

的合數，則此數必爲公差爲2的continuing number。

四、 給定正整數 p，研究如何有系統快速的尋找一數字 $d=2$ 的所有分解法

（一）利用 N_m 尋找拆解法

1、根據研究三的結果，一數若可以分解，則：$\boxed{p=m\,N_m，m\in\mathrm{N}}$

2、一個可被分解的數最多可以被分解爲：

當 p 爲平方數，定義 $\phi(p)$ 爲 p 之所有正因數，則可分解爲（$\frac{\phi(p)+1}{2}-1$）個；

當 p 不爲平方數，定義 $\phi(p)$ 爲 p 之所有正因數，則可分解爲（$\frac{\phi(p)}{2}-1$）個。

3、可被分解的數一定有除了1和本身以外的因數。

4、質數以外的數都可以被分解爲連續的正奇數或正偶數和

（二）利用等差級數公式尋找拆解法

定義：$p=$欲分解的正整數；$d=$公差，$m=$首項，$n=$末項

1、拆解公差爲2的continuing number

$p=m+(m+2)+(m+4)+(m+6)+...+n$ 且 m、n、$p\in\mathrm{N}$

由等差級數公式可得：$p=\frac{(n+m)(n-m+2)}{4}$，即 $4p=(n+m)(n-m+2)$

令 $\begin{cases}a_1=n+m\\a_2=n-m+2\end{cases}$，則 $4p=a_1\cdot a_2$ 且 $\begin{cases}n=\frac{a_1+a_2-2}{2}\\m=\frac{a_1-a_2+2}{2}\end{cases}$

當 a_1、a_2 同奇偶時，m、n 有正整數解

但 $4p=a_1\cdot a_2$，即 $2|a_1$ 且 $2|a_2$ 又 $n>m>0$，$\frac{a_1+a_2-2}{2}>\frac{a_1-a_2+2}{2}$ 且 $\frac{a_1-a_2+2}{2}>0$

$\Rightarrow$ 化簡後得 $\begin{cases}a_2>2\\a_1>a_2-2\end{cases}$，即 $a_1\geq a_2>2$

2、若 $2|a_1$ 且 $2|a_2$，可設 $4p=2x\cdot 2y$（$a_1=2x$，$a_2=2y$）$\Rightarrow xy=p$

又因 $a_1\geq a_2>2$ 可得 $x\geq y>1$，$x,y\in\mathrm{N}$

所以當一正整數 P 只能質因數分解爲 $P\times 1$ 時（即 P 爲質數）無法符合此條件

則 P 之可能拆法爲滿足此條件的數對（x，y）

此時：將 $\begin{cases}a_1=2x\\a_2=2y\end{cases}$ 代入 $\begin{cases}n=\frac{a_1+a_2-2}{2}\\m=\frac{a_1-a_2+2}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow$ 化簡後得 $\begin{cases}n=x+y-1\\m=x-y+1\end{cases}$ 且 $x\geq y>1$，$x,y\in\mathrm{N}$

五、 推廣到任意公差 d，以代數推導出快速尋找所有分解方法數，並限制項數 x 範圍作討論

1、由於 $a_2=dx=n-m+d$，所以 $x=\frac{n-m}{d}+1$，可得知所取 $2p$ 因數 x 正是 p 所能

分解爲公差 d 之連續等差數字和的項數。

2、能表示爲公差 d 的連續等差數字和的最小數字爲 $1+(1+d)$，因此 $p<d+2$

$\Rightarrow p$ 必定無法表示成爲公差 d 的連續等差數字和。

3、當 d 爲奇數，若在區間 $(1,\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x（$\frac{x-1}{2}\in N\Rightarrow x$ 必爲奇數），

則 p 無法表示成爲公差 d 爲奇數連續等差數字和。符合 $1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 之 $2p$

因數 x 個數即爲拆法數，x 代表公差 d 所能分解的項數。

4、當 d 爲偶數，若在區間 $(1,\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2})$ 中無 $2p$ 因數 x，則 p 無法表示成爲

公差 d 爲偶數連續等差數字和。符合 $1<x<\frac{1+\sqrt{1+\frac{8p}{d}}}{2}$ 之符合 $2p$ 因數 x 個數

即爲拆法數，x 代表公差 d 所能分解的項數。

5、n,m 的通式爲 $\begin{cases}n=\frac{p}{x}+\frac{d(x-1)}{2}\\m=\frac{p}{x}-\frac{d(x-1)}{2}\end{cases}$，其中 x 爲符合上述條件之 $2p$ 的因數。

<程式碼設計> 給定正整數 p 和公差 d，代入公式後，可得知項數 x 的範圍，再經過驗證後，就可以得到首項 m 及末項 n

$m,m+d,m+2d,m+3d,\cdots\cdots m+(k+1)d$

$p=k\times m+d\left[1+2+3+\cdots\cdots+(k-1)\right]$

$p=k\times m+d\times\frac{(1+k-1)\times(k-1)}{2}$

$p=k\times m+d\times\frac{k\times(k-1)}{2}$ -------------------------- ①

$m=\left[Input-d\times\frac{k\times(k-1)}{2}\right]\Big/k$ ---------------- ②

$floor(m)$ -- ③

$floor\Rightarrow$ 不大於該數的最大整數

假設: $Input=100,d=3,k=2$

代入②

$m=\left[100-3\times\frac{2\times(2-1)}{2}\right]\Big/3$

$=\frac{100-3}{3}=\frac{97}{3}\approx 32.33$

代入③

$floor(m)=floor(32.33)=32$

代入①

$p=2\times 32+3\times\frac{2\times(2-1)}{2}$

$=64+3$

$=67\neq 100$(不成立)

$Input=100,d=3,k=5$

代入②

$m=\left[100-3\times\frac{5\times(5-1)}{2}\right]\Big/5$

$=\left(100-\frac{3\times5\times4}{2}\right)\Big/5$

$={}^{70}\!/_{5}=14$

代入③

$floor(m)=floor(14)=14$

代入①

$p=5\times 14+3\times\frac{5\times(5-1)}{2}$

$=70+30$

$=100$

$\Rightarrow$ p=100=Input(成立)