中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030410

不規則凸四邊形對切面積的比例關係

學校名稱：臺中市立大里高級中學

作者：	指導老師：
國二 吳印弘	王美惠
國二 曾斐莊	周鐸峰
國二 王才興	

關鍵詞：數與形的關係、等分點面積

摘要

討論凸四邊形被奇數等分點及偶數等分點縱切與橫切後面積與總面積的關係。

壹、研究動機

歷史課時,歷史老師教我們中國周朝時已出現井田制度。在井田中間的那一塊田地是公田,其他皆是私田。每個人不只要耕耘自己的私田,還要耕耘中間的公田,。聽到這樣的事,我們便聯想到:中間的那塊公田是否為九分之一?以等分點對切的方式會不會和面積的比例有規律的關係?於是我們開始討論、研究,展開一場數學探索。

貳、研究目的

一、尋找平面凸四邊形縱切奇數等分點、偶數等分點中所占面積比例關係。

二、尋找平面凸四邊形等分縱切疊上等分橫切中所占面積比例關係。

三、推導其中關係式。

四、推導各塊面積的關聯性

參、研究設備及器材

電腦、Microsoft Word、Microsoft Visio、GeoGebra、紙、筆、橡皮擦

肆、研究過程或方法

一、縱切面積之討論:

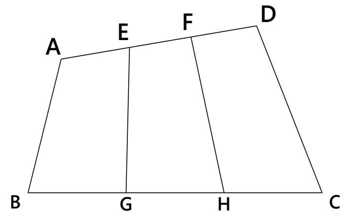
我們想要得知凸四邊形被奇數等分點$2m+1$(m 為自然數)對切後,最中間那塊區域的面積與全部面積的關係。以及凸四邊形被偶數等分點$2n$(n為自然數)對切後,最中間那兩塊區域的面積與全部面積的關係。

(一) 奇數等分點縱切面積之面關係:

我們先以最簡單的三等分及五等分做切割去探討面積之關係,進一步討論$2m+1$等分做切割時之情形,其說明如下。

1. 三等分點的面積:

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{AD}$及$\overline{BC}$分別取三等E、F及G、H。接下來要證明$\square EGHF$的面積與$\square ABCD$面積之關係,參閱圖(1)。



圖(1)

從圖(2)得知：

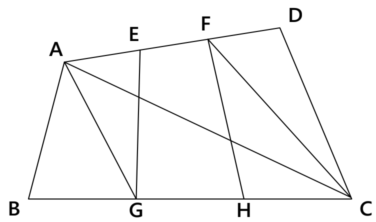
$$\because a\square ABCD = a\triangle ABC + a\triangle ACD$$

$$a\square AFCG = a\triangle AGC + a\triangle AFC$$

$$a\triangle AGC = \frac{2}{3}a\triangle ABC,\quad a\triangle AFC = \frac{2}{3}a\triangle ACD$$

$$\therefore a\square AFCG = \frac{2}{3}a\triangle ABC + \frac{2}{3}a\triangle ACD$$

$$= \frac{2}{3}a\square ABCD$$



圖(2)

又從圖(3)得知

$$\because a\square AFCG = a\triangle AFG + a\triangle GCF$$

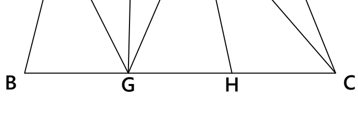
$$a\square EGHF = a\triangle EFG + a\triangle FGH$$

$$a\triangle EFG = \frac{1}{2}a\triangle AFG，a\triangle FGH = \frac{1}{2}a\triangle GCF$$

$$\therefore a\square EGHF = \frac{1}{2}a\triangle AFG + \frac{1}{2}a\triangle GCF$$

$$a\square EGHF = \frac{1}{2}a\square AFCG = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}a\square ABCD$$

$$= \frac{1}{3}a\square ABCD \ldots\ldots\ldots\ldots (式\ 1)$$

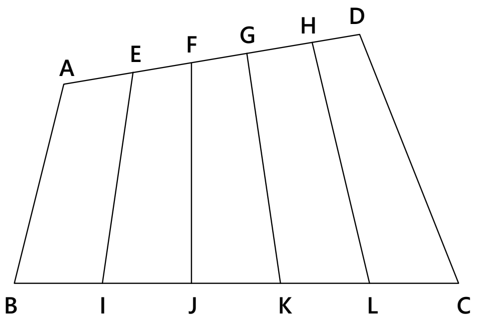


圖(3)

故在三等分點時，最中間$\square EGHF$的面積為全部$\square ABCD$面積的$\frac{1}{3}$。

2. 五等分點的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{AD}$及$\overline{BC}$分別取 5 等分點E、F、G、H及I、J、K、L。接下來要證明$\square FJKG$的面積與$\square ABCD$面積之關係，參閱圖(4)。



圖(4)

由圖(5)可知:

$\because a\square ABCD = a\triangle ABC + a\triangle ACD$

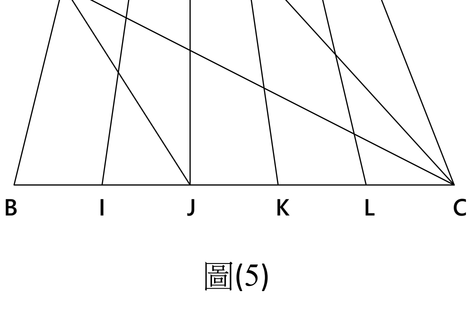
$a\square AGCJ = a\triangle AJC + a\triangle AGC$

$a\triangle AJC = \dfrac{3}{5}a\triangle ABC$

$a\triangle AGC = \dfrac{3}{5}a\triangle ACD$

$\therefore a\square AGCJ = \dfrac{3}{5}a\triangle ABC + \dfrac{3}{5}a\triangle ACD$

$= \dfrac{3}{5}a\square ABCD$



圖(5)

又從圖(6)可知：

$\because a\square AGCJ = a\triangle AGJ + a\triangle GJC$

$a\square FJKG = a\triangle FGJ + a\triangle GJK$

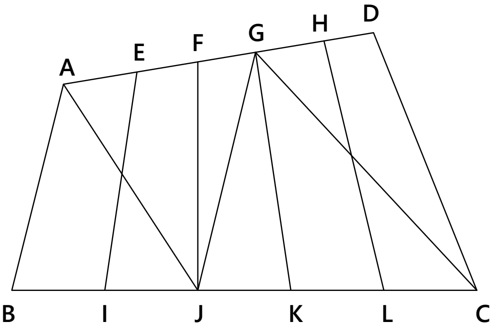
$$a\triangle FGJ=\frac{1}{3}a\triangle AGJ，\quad a\triangle GJK=\frac{1}{3}a\triangle GJC$$

$$\therefore a\square FJKG=\frac{1}{3}a\triangle AGJ+\frac{1}{3}a\triangle GJC$$

$$=\frac{1}{3}a\square AGCJ$$

$$a\square FJKG=\frac{1}{3}a\square AGCJ=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}a\square ABCD$$

$$=\frac{1}{5}a\square ABCD\ldots\ldots\ldots\ldots(式\ 2)$$

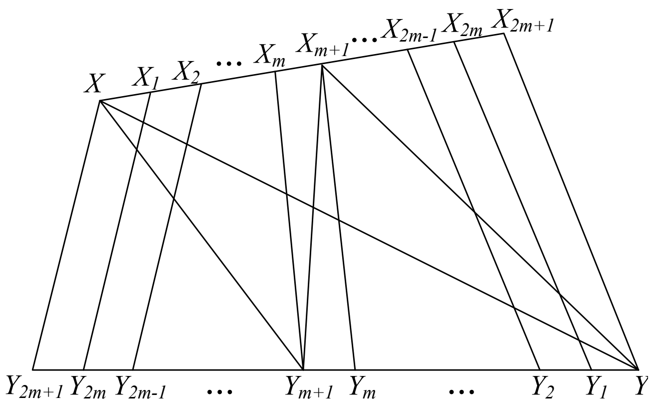


圖(6)

故在五等分點時，最中間$\square FJKG$的面積為全部$\square ABCD$面積的$\frac{1}{5}$。

3. 以奇數$2m+1$等份點縱切面積之關係：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{XX_{2m+1}}$及$\overline{YY_{2m+1}}$分別取$2m+1$個等分點X_1、X_2、．．．．、X_{2m}及Y_1、Y_2、．．．．、Y_{2m}。接下來要證明$\square X_mX_{m+1}Y_mY_{m+1}$的面積與$\square XX_{2m+1}YY_{2m+1}$面積之關係。



圖(7)

由圖(7)可知:

$$a\triangle XYY_{m+1}=\frac{m+1}{2m+1}a\triangle XYY_{2m+1}$$

$$a\triangle XX_{m+1}Y=\frac{m+1}{2m+1}a\triangle XX_{2m+1}\mathrm{Y}$$

$$a\square XX_{m+1}YY_{m+1}=\frac{m+1}{2m+1}a\triangle XYY_{2m+1}+\frac{m+1}{2m+1}a\triangle XX_{2m+1}\mathrm{Y}$$

$$a\square XX_{m+1}YY_{m+1}=\frac{m+1}{2m+1}a\square XX_{2m+1}\mathrm{Y}Y_{2m+1}$$

$$a\triangle X_mX_{m+1}Y_{m+1}=\frac{1}{m+1}a\triangle XX_{m+1}Y_{m+1}$$

$$a\triangle X_{m+1}Y_{m+1}Y_m=\frac{1}{m+1}a\square XX_{m+1}YY_{m+1}$$

$$\begin{aligned}a\square X_mX_{m+1}Y_mY_{m+1}&=\frac{1}{m+1}a\square XX_{m+1}\mathrm{Y}Y_{m+1}\\&=\frac{1}{m+1}\times\frac{m+1}{2m+1}a\square XX_{2m+1}YY_{2m+1}\\&=\frac{1}{2m+1}a\square XX_{2m+1}YY_{2m+1}\end{aligned}$$

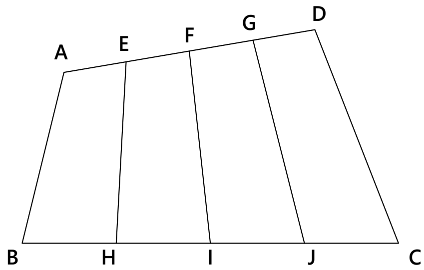
從奇數等分點的面積得知，當以三等分點做切割時，最中間那一塊面積為全部面積的$\frac{1}{3}$。當以五等分點做切割時，最中間那一塊面積為全部面積的$\frac{1}{5}$，以此類推，以奇數等分點 2m+1(m 為自然數) 切割後，最中間那一塊面積必為全部面積的$\frac{1}{2m+1}$。

定理一：以奇數$2m+1$等分點做縱切割時，中間面積為全部面積的$\frac{1}{2m+1}$

(二)偶數等分點面積之關係:

1. 四等分點的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{AD}$及$\overline{BC}$分取四等分點E、F、G及H、I、J。此時四邊形最中間面積$\square EHJG$為$\square EHIF+\square FIJG$，接下來要證明$\square EHJG$的面積與$\square ABCD$面積之關係，參閱圖(8)。



圖(8)

由圖(9)可知：

$\because\ a\square ABCD = a\triangle ABC + a\triangle ACD$

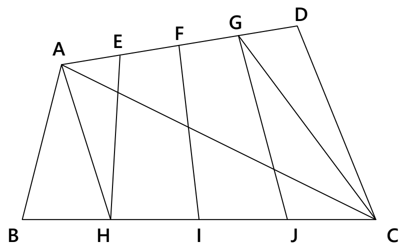
$a\square AHCG = a\triangle ACH + a\triangle ACG$

$$a\triangle ACH = \frac{3}{4}a\triangle ABC$$

$$a\triangle ACG = \frac{3}{4}a\triangle ACD$$

$$a\square AHCG = \frac{3}{4}a\triangle ABC + \frac{3}{4}a\triangle ACD$$

$$= \frac{3}{4}a\square ABCD$$



圖(9)

又從圖(10)可知

$\because a\square AHCG = a\triangle AGH + a\triangle CGH$

$$a\triangle EGH = \frac{2}{3}a\triangle AGH$$

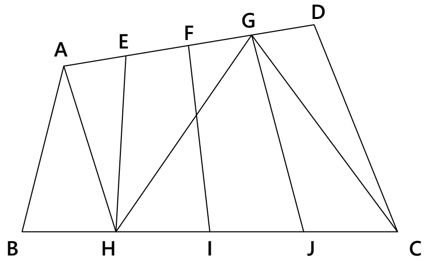
$$a\triangle GHJ = \frac{2}{3}a\triangle HGC$$

$$\therefore a\square EHJG = \frac{2}{3}a\triangle AGH + \frac{2}{3}a\triangle HGC$$

$$= \frac{2}{3}aAHCG$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}a\square ABCD$$

$$= \frac{2}{4}a\square ABCD\ldots\ldots\ldots(\text{式 }4)$$

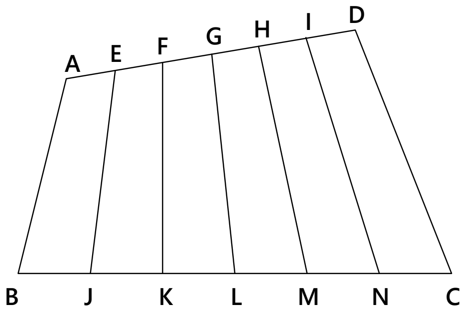


圖(10)

由四等分縱切時取中間▫$EHJG$面積為全部面積的 $\frac{2}{4}$。

2. 六等分點的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{AD}$及$\overline{BC}$分別取六等分點E、F、G、H、I及J、K、L、M、N。而六等分後最中間面積▫$FKMH$為▫$FKLG$ + ▫$GLMH$接下來要證明▫$FKMH$的面積與▫$ABCD$面積之關係，參閱圖(11)。



圖(11)

由圖(12)可知：

$\because\ a\square ABCD = a\triangle ABC + a\triangle ACD$

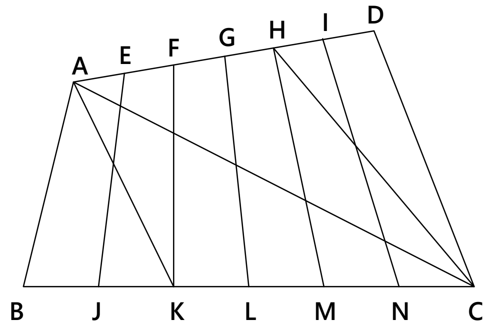
$a\square AKCH = a\triangle ACK + a\triangle ACH$

$a\triangle ACK = \frac{4}{6}a\triangle ABC$

$a\triangle ACH = \frac{4}{6}a\triangle ACD$

$a\square AKCH = \frac{4}{6}a\triangle ABC + \frac{4}{6}a\triangle ACD$

$= \frac{4}{6}a\square ABCD$



圖(12)

又從圖(13)可知：

$\because\ a\square \mathrm{AKCH} = a\triangle \mathrm{AHK} + a\triangle \mathrm{CHK}$

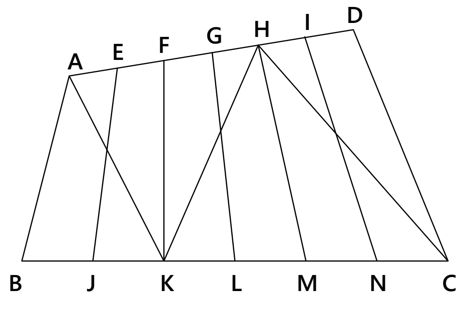
$$a\triangle FHK = \frac{2}{4}a\triangle AHK$$

$$a\triangle HKM = \frac{2}{4}a\triangle CHK$$

$\therefore\ a\square FKMH = \frac{2}{4}a\triangle AHK + \frac{2}{4}a\triangle CHK$

$$= \frac{2}{4}a\square AKCH = \frac{2}{4}\times\frac{4}{6}a\square ABCD$$

$$= \frac{2}{6}aABCD \ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots(\text{式 } 5)$$

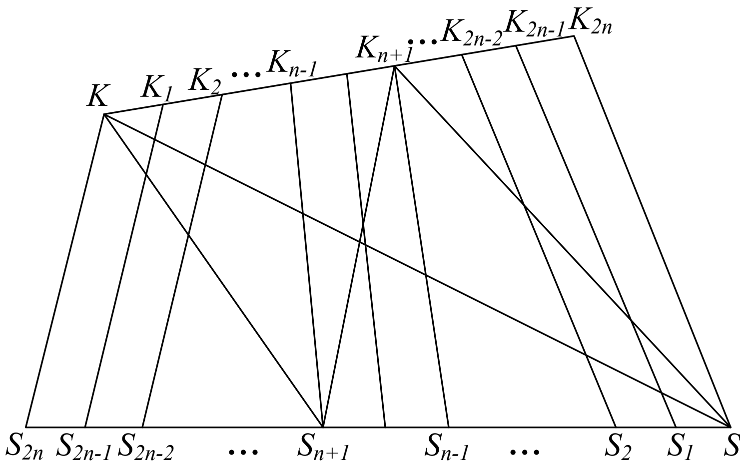


圖(13)

故六等分縱切後中間□$FKMH$ 之面積為全部面積的$\frac{2}{6}$。

3. 以偶數 2n 等分點縱切面對關係積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{KK_{2n}}$及$\overline{S_{2n}S}$取 2n 等分點K_1、K_2、．．．．、K_{2n}及S_{2n}、S_{2n-1}、．．．．、S_1。接下來要證明□$K_{n-1}K_{n+1}S_{n-1}S_{n+1}$的面積與□$KK_{2n}SS_{2n}$面積之關係。



圖(14)

由圖(14)可知：

$$a\triangle KSS_{n+1}=\frac{\mathrm{n}+1}{2\mathrm{n}}a\triangle KSS_{2n}\qquad a\triangle KK_{n+1}\mathrm{S}=\frac{\mathrm{n}+1}{2\mathrm{n}}a\triangle KK_{2n}S$$

$$a\square KK_{n+1}\mathrm{S}S_{n+1}=\frac{\mathrm{n}+1}{2\mathrm{n}}a\triangle KSS_{2n}+\frac{\mathrm{n}+1}{2\mathrm{n}}a\triangle KK_{2n}S$$

$$=\frac{n+1}{2n}a\square KK_{2n}\mathrm{S}S_{2n}$$

$$a\square KK_{n+1}SS_{n+1}=a\triangle KK_{n+1}S_{n+1}+a\triangle K_{n+1}SS_{n+1}$$

$$a\triangle K_{n-1}K_{n+1}S_{n+1}=\frac{2}{n+1}a\triangle KK_{n+1}S_{n+1}$$

$$a\triangle K_{n+1}S_{n-1}S_{n+1}=\frac{2}{n+1}a\triangle K_{n+1}SS_{n+1}$$

$$a\square K_{n-1}K_{n+1}S_{n-1}S_{n+1}=\frac{2}{n+1}a\triangle KK_{n+1}S_{n+1}+\frac{2}{n+1}a\triangle K_{n+1}SS_{n+1}$$

$$=\frac{2}{n+1}a\square KK_{n+1}SS_{n+1}$$

$$=\frac{2}{n+1}\times\frac{n+1}{2n}a\square KK_{2n}\mathrm{S}S_{2n}$$

$$=\frac{2}{2n}a\square \mathrm{K}K_{2n}SS_{2n}$$

$$=\frac{1}{n}a\square \mathrm{K}K_{2n}SS_{2n}$$

從偶數等分點的面積得知，當以四等分點做切割時，最中間那兩塊面積為全部面積的$\frac{2}{4}$。當以六等分點做切割時，最中間那兩塊面積為全部面積的$\frac{2}{6}$，以此類推，以偶數等分點 2n(n 為自然數且 n≥ 2)

切割後，最中間那兩塊面積

必為全部面積的$\dfrac{1}{n}$。

定理二：以偶數$2n$等分點做縱切割時，中間面積為全部面積的$\dfrac{1}{n}$

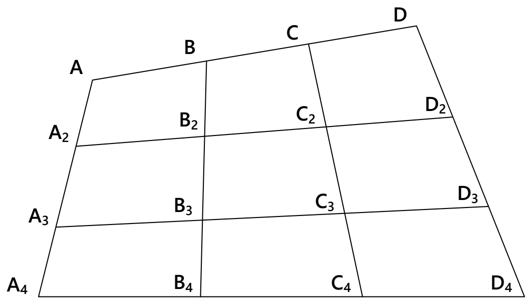
二、縱切加以橫切面積之討論：

我們想要得知凸四邊形被奇數等分點 $2m+1$(m 為自然數)縱切並加以橫切後，最中間那塊區域的面積與全部面積的關係。以及凸四邊形被偶數等分點 $2n$(n 為自然數)縱切並加以橫切後，最中間那塊區域的面積與全部面積的關係。

(一)奇數縱橫切等分點面積之關係:

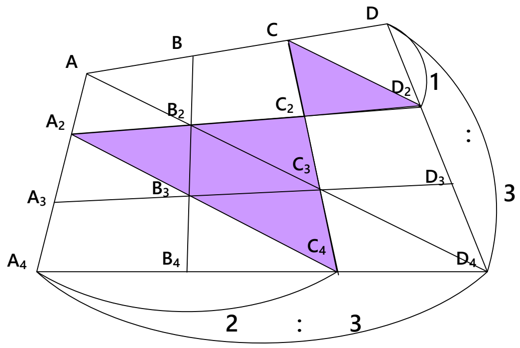
1. 3×3 等分點的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{\mathrm{AD}}$及$\overline{A_4D_4}$分別取 3 等分點 B、C 及 B_4、 C_4。另一雙對邊$\overline{AA_4}$及$\overline{DD_4}$，分別取 3 等分點A_2、A_3及D_2、D_3。接下來要證明▫$B_2B_3C_3C_2$的面積與▫AA_4D_4D面積之關係，參閱圖(15)。



圖(15)

從(式 1)得知，四邊形$B\mathrm{B}_4\mathrm{C}_4C$的面積為全部面積▫$AA_4D_4D$面積的$\frac{1}{3}$



圖(16)

由圖(16)可知:

$\because \overline{CD_2}//\overline{AD_4}$ $\therefore \overline{CD_2}:\overline{AD_4}$=1:3

$\because \overline{A_2C_4}//\overline{AD_4}$ $\therefore \overline{A_2C_4}:\overline{AD_4}$=2:3

故$\overline{CD_2}//\overline{AD_4}//\overline{A_2C_4}$

$\because$a$\Delta A_2C_4C_2$~aΔCD_2C_2(AA 相似)

故$\overline{CC_2}:\overline{C_2C_4}=1:2$ $\overline{CC_2}:\overline{CC_4}=1:3$

$\overline{C_2D_2}:\overline{A_2C_2}=1:2$ $\overline{C_2D_2}:\overline{A_2D_2}=1:3$

同理可知:

$\because a\Delta BA_2B_2$~$a\Delta B_2B_4D_2$(AA 相似)

$\therefore \overline{BB_2}:\overline{B_2B_4}$=1:2 $\overline{BB_2}:\overline{BB_4}$=1:3

$\because a\Delta A_3B_4B_3$~$a\Delta BB_3D_3$($AA$ 相似)

$\therefore \overline{B_3B_4}:\overline{BB_3}$=1:2 $\overline{B_3B_4}:\overline{BB_4}$=1:3

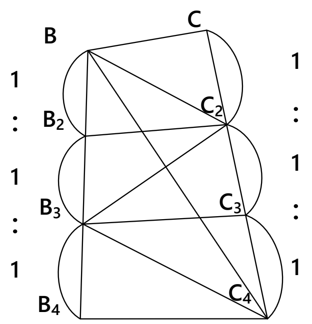
$\therefore a\Delta C_4D_3C_3$~$a\Delta C_3CA_3$($AA$ 相似)

$\therefore \overline{C_3C_4}:\ \overline{CC_3}=1:2$ $\overline{C_3C_4}:\ \overline{CC_4}=1:3$

故$\overline{CC_2}:\overline{C_2C_3}:\overline{C_3C_4}$ = 1:1:1 $\overline{A_3B_3}:\overline{B_3C_3}:\overline{C_3D_3}$ =1:1:1

$\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}:\overline{C_2D_2}$ =1:1:1 $\overline{BB_2}:\overline{B_2B_3}:\overline{B_3B_4}$=1:1:1

參閱圖(17)

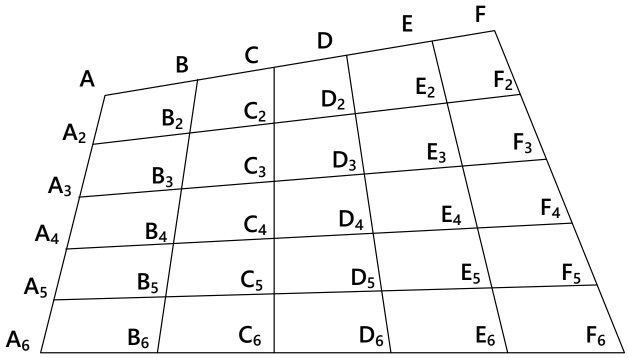


圖(17)

從(式 1)得知,四邊形$B_2B_3C_3C_2$的面積是四邊形BB_4C_4C面積的$\frac{1}{3}$，也就是說四邊形$B_2B_3C_3C_2$ 的面積是四邊形AA_4D_4D面積的 $\frac{1}{9}$ 。故任意四邊形取三等分時，縱切並加以橫切後，我們可以發現四邊形面積為全部的$\frac{1}{9}$

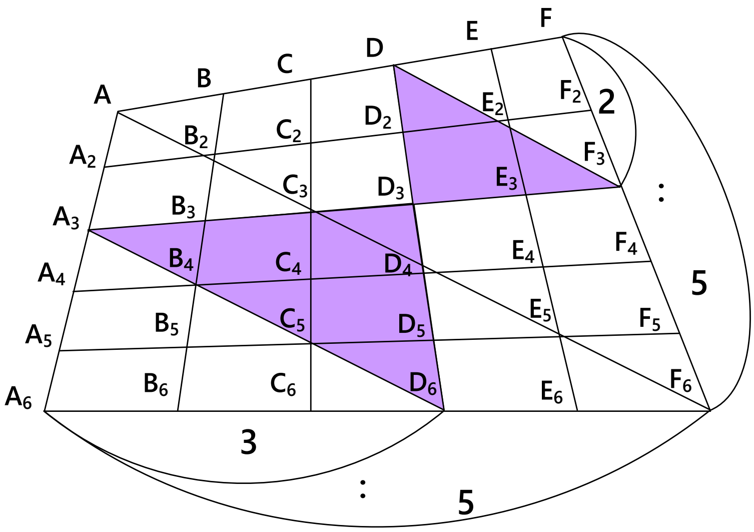
2. 5×5 等分點的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{AF}$及$\overline{A_6F_6}$分別取 5 等分點 B、C、D、E 及B_6、C_6、D_6、E_6。另一雙對邊$\overline{AA_6}$及$\overline{FF_6}$，分別取 5 等分點A_2、A_3、A_4、A_5及F_2、F_3、F_4、F_5。接下來要證明▫$C_3C_4D_4D_3$的面積與▫AA_6F_6F面積之關係，參閱圖(18)。



圖(18)

從(式 2)得知,四邊形CC_6D_6D的面積是四邊形AA_6F_6F面積的$\frac{1}{5}$



圖(19)

由圖(19)可知:

$\because \overline{DF_3}//\overline{AF_6}$ $\therefore \overline{DF_3}:\overline{AF_6}=2:5$

$\because \overline{A_3D_6}//\overline{AF_6}$ $\therefore \overline{A_3D_6}:\overline{AF_6}=3:5$

故$\overline{DF_3}//\overline{AF_6}//\overline{A_3D_6}$

$\because a\triangle DF_3D_3 \sim a\triangle D_3D_6A_3$($AA$ 相似)

故$\overline{DD_3}:\overline{D_3D_6}=2:3$ $\overline{DD_3}:\overline{DD_6}=2:5$

同理可知:

$\because a\triangle D_4D_6F_4 \sim a\triangle D_4DA_4$($AA$ 相似)

$\therefore \overline{D_4D_6}:\overline{DD_4}=2:3$ $\overline{D_4D_6}:\overline{DD_6}=2:5$

$\because a\triangle A_4C_4C_6 \sim a\triangle CC_4F_4$($AA$ 相似)

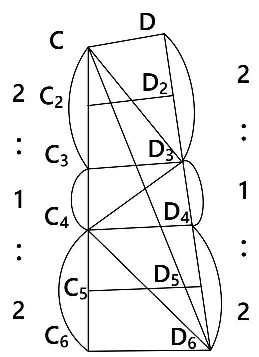
$\therefore \overline{C_4C_6}:\overline{CC_4}=2:3$ $\overline{C_4C_6}:\overline{CC_6}=2:5$

$\because a\triangle CC_3A_3 \sim a\triangle C_3C_6F_3$($AA$ 相似)

$\therefore \overline{CC_3}:\overline{C_3C_6}=2:3$ $\overline{CC_3}:\overline{CC_6}=2:5$

故$\overline{DD_3}:\overline{D_3D_4}:\overline{D_4D_6}=2:1:2$ $\overline{CC_3}:\overline{C_3C_4}:\overline{C_4C_6}=2:1:2$

參閱圖(20)



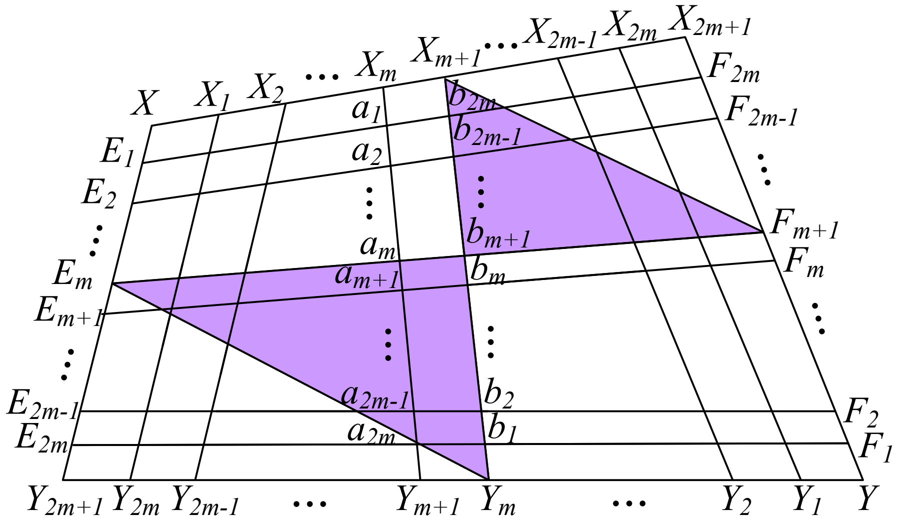
圖(20)

從(式 2)得知,四邊形$C_3C_4D_4D_3$的面積是四邊形CC_6D_6D面積的$\frac{1}{5}$，

也就是說四邊形$C_3C_4D_4D_3$的面積是四邊形AA_6F_6F面積的$\frac{1}{25}$。由此得知任意四邊形每邊取五等分，並以縱切及橫切後，我們可以發現最中間之四邊形面積為全部面積的$\frac{1}{25}$。

3. 以奇數$2m+1$等份點(m 為自然數)縱橫切的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{XX_{2m+1}}$及$\overline{Y_{2m+1}Y}$分別取 2m+1 個等分點X_1、X_2、・・・X_{2m}及Y_{2m}、Y_{2m-1}、・・・Y_1。另一雙對邊$\overline{XY_{2m+1}}$及$\overline{X_{2m+1}Y}$，分別取 2m+1 等分點E_1、E_2、・・・E_{2m}及F_{2m}、F_{2m-1}、・・・F_1。接下來要證明□$a_ma_{m+1}b_mb_{m+1}$的面積與□$XY_{2m+1}YX_{2m+1}$面積之關係。



圖(21)

由圖(21)可知:

$\because \overline{X_{m+1}F_{m+1}} // \overline{\mathrm{XY}}$　　　$\therefore \overline{X_{m+1}F_{m+1}} : \overline{\mathrm{XY}} = m : 2m+1$

$\because \overline{E_mY_m} // \overline{\mathrm{XY}}$　　　$\therefore \overline{E_mY_m} : \overline{\mathrm{XY}} = m+1 : 2m+1$

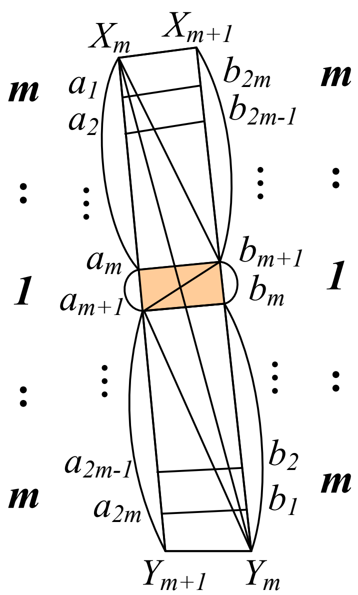
故$\overline{X_{m+1}F_{m+1}} // \overline{XY} // \overline{E_mY_m}$　　　$\therefore a\triangle E_mY_mb_{m+1} \sim\ a\triangle X_{m+1}F_{m+1}b_{m+1}$(AA 相似)

故$\overline{X_{m+1}b_{m+1}} : \overline{b_{m+1}Y_m} = m : m+1$　　　$\overline{X_{m+1}b_{m+1}} : \overline{X_{m+1}Y_m} = m : 2m+1$

同理得證：

故$\overline{X_m a_m} : \overline{a_m a_{m+1}} : \overline{a_{m+1}Y_{m+1}} = m : 1 : m$

$\overline{X_{m+1}b_{m+1}} : \overline{b_{m+1}b_m} : \overline{b_mY_m} = m : 1 : m$　　　參閱圖(22)



圖(22)

$$a\square a_n b_{n+1} b_n a_{n+1} = \frac{1}{2m+1} \times \frac{1}{2m+1} a\square XX_{2n+1} YY_{2n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2 \quad a\square XX_{2n+1} YY_{2n+1}$$

從上述得知，四邊形$a_m a_{m+1} b_m b_{m+1}$的面積是四邊形 $XY_{2m+1}YX_{2m+1}$面積的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$，以此類推，任意四邊形每邊取 $2m+1$ 等分，並以縱切及橫切後，我們可以發現最中間之四邊形面積為全部面積的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$。

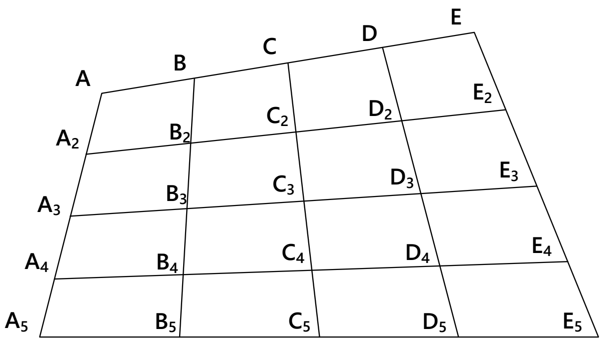
定理三：以奇數$\mathbf{2m+1}$等分點做縱橫切割時，中間面積為全部面積的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$

下一步，我們要繼續找出以偶數等分時，最中間面積與總面積之關係。

(二)偶數縱橫切等分點面積:

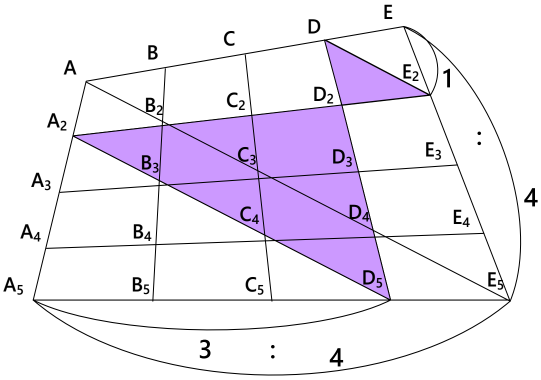
1.4×4 等分點的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{AE}$及$\overline{A_5E_5}$分別取 4 等分點 B、C、D 及 B_5、C_5、D_5。另一雙對邊$\overline{AA_5}$及$\overline{EE_5}$，分別取 4 等分點A_2、A_3、A_4及 E_2、E_3、E_4。此時四邊形最中間的面積為□$B_2B_4D_4D_2$由□$B_2B_3C_2C_3$、□$B_3B_4C_4C_3$、□$C_2C_3D_3D_2$及$C_3C_4D_4D_3$這四塊面績所組成，我們將討論最中間面積□$B_2B_4D_4D_2$面積與□AA_5E_5E之關係，參閱圖(23)。



圖(23)

從(式 4)得知，$a\square BB_5D_5D$是四邊形AA_5E_5E面積的$\frac{2}{4}$。



圖(24)

由圖(24)可知:

$\because \overline{DE_2}//\overline{AE_5}$　　　　所以$\overline{DE_2}$：$\overline{AE_5}$=1:4

$\because \overline{A_2D_5}//\overline{AE_5}$　　　　所以$\overline{A_2D_5}$：$\overline{AE_5}$=3:5　　　故$\overline{DE_2}//\overline{AE_5}//\overline{A_2D_5}$

$\because$a$\Delta A_2D_5D_2 \sim a\Delta DE_2D_2$(AA 相似)

故$\overline{DD_2}$：$\overline{D_2D_5}$ $= 1 : 3$　　　　　$\overline{DD_2}$：$\overline{DD_5}$ $= 1 : 4$

同理可知:　$\because a\Delta D_5E_4D_4 \sim a\Delta D_4DA_4$(AA 相似)

$\therefore \overline{D_4D_5}$：$\overline{DD_4}$ $= 1 : 3$　　　$\overline{D_4D_5}$：$\overline{DD_5}$ $= 1 : 4$

$\because a\Delta A_4B_5B_4 \sim a\Delta BB_4E_4$(AA 相似)

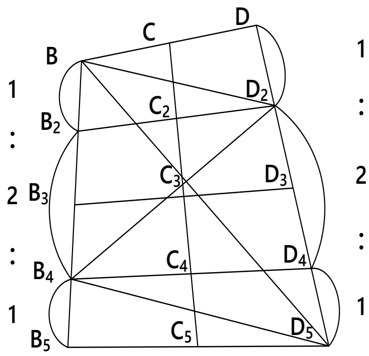
$\therefore \overline{B_4B_5}$：$\overline{BB_4}$ $= 1 : 3$　　　$\overline{B_4B_5}$：$\overline{BB_5}$ $= 1 : 4$

$\because a\Delta BA_2B_2 \sim a\Delta B_2B_5E_2$(AA 相似)

$\therefore \overline{BB_2}$：$\overline{B_2B_5}$ $= 1 : 3$　　　$\overline{BB_2}$：$\overline{BB_5}$ $= 1 : 4$

故$\overline{BB_2}$：$\overline{B_2B_4}$：$\overline{B_4B_5}$=1：2：1　　$\overline{DD_2}$：$\overline{D_2D_4}$：$\overline{D_4D_5}$=1：2：1；

參閱圖(25)。

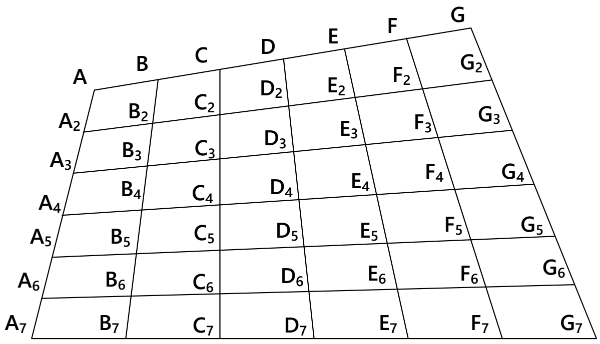


圖(25)

從(式 4)得知,四邊形$B_2B_4D_4D_2$的面積是四邊形BB_5D_5D面積的$\frac{2}{4}$，也就是說四邊形$B_2B_4D_4D_2$的面積是四邊形AA_5E_5E面積的$\frac{1}{4}$。由此得知任意四邊形每邊取四等分，並以縱切及橫切後，而最中間的面積共四塊，我們可以發現其四塊之四邊形面積為總面積的$\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$。

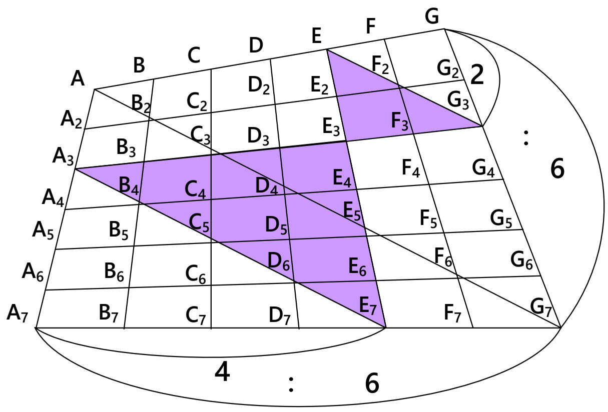
2.6×6 等分點的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{AG}$及$\overline{A_7G_7}$分別取等分點 B、C、D、E、F 及B_7、C_7、D_7、E_7、F_7。另一雙對邊$\overline{AA_7}$及$\overline{GG_7}$，分別取等分點A_2、A_3、A_4、A_5、A_6及G_2、G_3、G_4、G_5、G_6。接下來要證明$\square C_3C_5E_5E_3$的面積與$\square AA_7G_7G$之關係，參閱圖(26)。



圖(26)

從(式 5)得知,$a\square CC_7E_7E$是四邊形AA_7G_7G面積的$\frac{2}{6}$



圖(27)

由圖(27)可知:

$\because \overline{EG_3}//\overline{AG_7}$ $\therefore \overline{EG_3}:\overline{AG_7}=2:6$

$\because \overline{A_3E_7}//\overline{\mathrm{A}G_7}$ $\therefore \overline{A_3E_7}:\overline{\mathrm{A}G_7}$=4:6

故$\overline{\mathrm{E}G_3}//\overline{AG_7}//\overline{A_3E_7}$

$\because$ $\mathrm{a}\Delta A_3E_7E_3 \sim \mathrm{a}\Delta \mathrm{E}G_3E_3$(AA 相似)

故$\overline{\mathrm{E}E_3}:\overline{E_3E_7}=2:4$ $\overline{\mathrm{E}E_3}:\overline{\mathrm{E}E_7}=2:6$

同理可知:

$\because a\Delta \mathrm{E_7G_5E_5} \sim a\Delta \mathrm{E_5EA_5}$(AA 相似)

$\therefore$ $\overline{E_5E_7}:\overline{\mathrm{E}E_5}=2:4$ $\overline{E_5E_7}:\overline{\mathrm{E}E_7}=2:6$

$\because a\Delta A_5C_5C_7 \sim a\Delta CC_5G_5$(AA 相似)

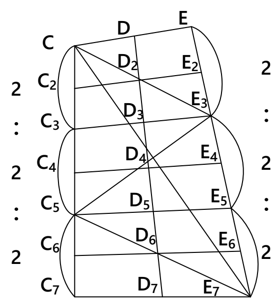
$\therefore \overline{C_5C_7}:\overline{CC_5}=2:4$ $\overline{C_5C_7}:\overline{CC_7}=2:6$

$\because a\Delta CA_3C_3 \sim \underline{a}\Delta C_3C_7G_3$(AA 相似)

$\therefore \overline{CC_3}:\overline{C_3C_7}=2:4$ $\overline{CC_3}:\overline{CC_7}=2:6$

故$\overline{CC_3}:\overline{C_3C_5}:\overline{C_5C_7}$=2:2:2 $\overline{\mathrm{E}E_3}:\overline{E_3E_5}:\overline{E_5E_7}$=2:2:2

參閱圖(28)



圖(28)

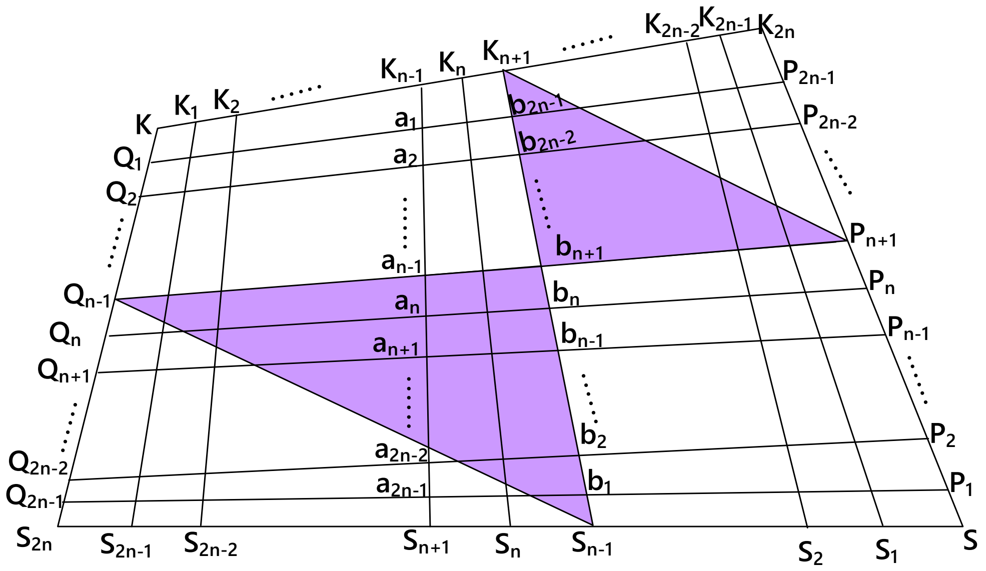
從(式 5)得知,四邊形$C_3C_5E_5E_3$的面積是四邊形CC_7E_7E面積的$\dfrac{2}{6}$，也就是說四邊形$C_3C_5E_5E_3$的面積是四邊形 $\mathrm{AA_7}G_7G$面積的$\dfrac{1}{9}$。在偶數六等分時，此時四邊形共被切成 36 個區塊，而最中間的面積共四塊，而這四塊中間面積和為□$\mathrm{AA_7G_7G}$ 面積的$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}$等於四邊形面積□$\mathrm{AA_7G_7G}$ 的$\dfrac{1}{9}$。

3.以偶數 2n 等分點的面積：

我們在凸四邊形的一雙對邊$\overline{\mathrm{K}K_{2n}}$及$\overline{S_{2n}S}$分別取 2n(n 為自然數且 n≥ 2)個等分點$K_1$、$K_2$、．．．$K_{2n-1}$及$S_{2n+1}$、$S_{2n}$、．．．$S_1$。另一雙對邊$\overline{KS_{2n}}$及

$\overline{K_{2n}S}$分別取 2n 個等分點Q_1、Q_2、・・・Q_{2n-1}及P_{2n-1}、P_{2n-2}、・・・P_1。

接下來要證明□$a_{n-1}b_{n+1}b_{n-1}a_{n+1}$的面積與□$KK_{2n}SS_{2n}$之關係



圖(29)

由圖(29)可知:

$\because \overline{K_{n+1}P_{n+1}}//\overline{KS}$ $\therefore \overline{K_{n+1}P_{n+1}}:\overline{KS}$=n−1 :2n

$\because \overline{Q_{n-1}S_{n-1}}//\overline{\mathrm{KS}}$ $\therefore \overline{Q_{n-1}S_{n-1}}:\overline{KS}$=n+1:2n

故$\overline{K_{n+1}P_{n+1}}//\overline{\mathrm{KS}}//\overline{Q_{n-1}S_{n-1}}$

$\because a\triangle Q_{n-1}S_{n-1}b_{n+1} \sim a\triangle K_{n+1}P_{n+1}b_{n+1}$(AA 相似)

故$\overline{K_{n+1}b_{n+1}}:\overline{b_{n+1}S_{n-1}} = \mathrm{n}-1:\mathrm{n}+1$

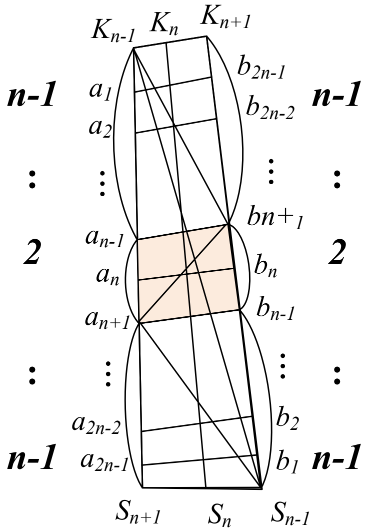
$\overline{K_{n+1}b_{n+1}}:\overline{K_{n+1}S_{n-1}} = n-1:2n$

同理得證:

$\overline{K_{n-1}a_{n-1}}:\overline{a_{n-1}a_{n+1}}:\overline{a_{n+1}S_{n+1}} = \mathrm{n}-1:2:\mathrm{n}-1$

$\overline{K_{n+1}b_{n+1}}:\overline{b_{n+1}b_{n-1}}:\overline{b_{n-1}S_{n+1}} = \mathrm{n}-1:2:\mathrm{n}-1$

參閱圖(30)



圖(30)

$$a\square a_{n-1}b_{n+1}b_{n-1}a_{n+1} = \frac{2}{2n}\times\frac{2}{2n}\,a\square KK_{2n}SS_{2n}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 a\square KK_{2n}SS_{2n}$$

從上述得知，四邊形$a_{n-1}b_{n+1}b_{n-1}a_{n+1}$的面積是四邊形$KK_{2n}SS_{2n}$面積的$\left(\frac{1}{n}\right)^2$，以此類推，任意四邊形每邊取 2n 等分，並以縱切及橫切後，我們可以發現最中間四片面積為全部面積的$\left(\frac{1}{n}\right)^2$。

定理四：以偶數$2n$等分點做縱橫切割時，中間面積為全部面積的$\left(\frac{1}{n}\right)^2$

伍、研究結果

一、在不規則凸四邊形中，隨意兩個對邊被奇數等分點(m≥ 1)縱切後，最中間那一塊區域的面積必為整個凸四邊形面積的$\frac{1}{2m+1}$。

二、在不規則凸四邊形中，隨意兩個對邊被偶數等分點 2n(n 為自然數且 n≥ 2)縱切後，最中間那兩塊區域的面積必為整個凸四邊形面積的$\frac{1}{n}$。

三、在不規則凸四邊形中，當其中一組對邊被奇數等分點(m≥ 1)縱切後，另一組對邊再以奇數等分點 m(m 為自然數)加以橫切，則最中間那一塊區域的面積

必為整個凸四邊形面積的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$。

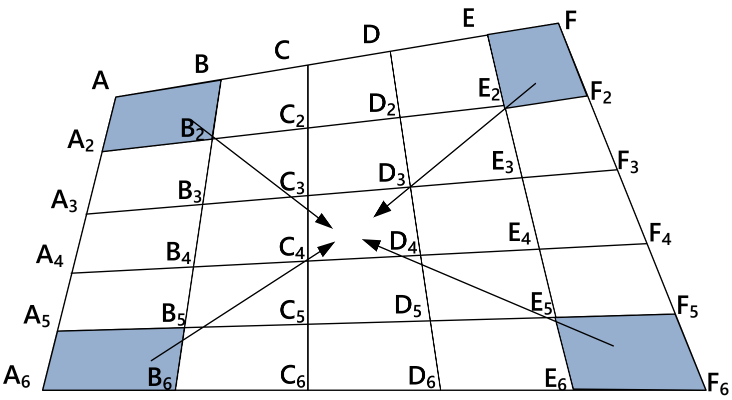
四、在不規則凸四邊形中，當其中一組對邊被偶數等分點 2n(n 為自然數且 n≥ 2)縱切後，另一組對邊再以偶數等分點 2n(n 為自然數且 n≥ 2)加以橫切，則最中間那四塊區域的面積必為整個凸四邊形面積的$\left(\frac{1}{n}\right)^2$。

陸、討論

我們想繼續討論在分割成數塊後，各塊面積之關係。經過各項驗證後，我們發現各塊面積其實彼此不相等，但卻互有關聯，而且最中間面積與會與四個角落的面積會互有關聯。奇數等分點縱切加以橫切時四個角落面積和再除以四會等於中間面積，我們選擇以 5×5 做說明。偶數等分點縱切加以橫切，四個角落面和會與中間四塊面積相等，我們選擇以 6×6 做說明。

一、奇數縱橫切以 5×5：

當凸四邊形被五等分，切成二十五塊後，中間▫$C_3C_4D_4D_3$面積會等於，左上▫AA_2B_2B面積加左下▫$A_5A_6B_6B_5$面積加右上▫EE_2F_2F面積加右下▫$E_5E_6F_6F_5$面積相加再除以 4，面積關係，參閱圖(31)。



圖(31)

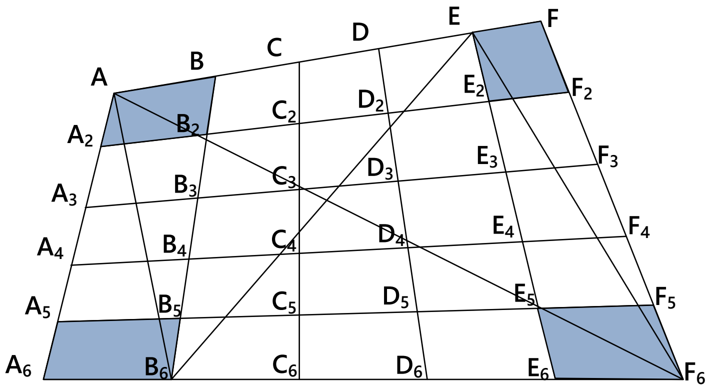
其推導證明如下，請參閱圖(32)

依據之前推導可知：

$$a\square BB_6E_6E=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}a\square \mathrm{A}A_6F_6F$$

$$=\frac{3}{5}a\square \mathrm{A}A_6F_6F$$

由上述可知：中間三行□BB_6E_6E為□AA_6B_6B面積的$\frac{3}{5}$，而左行□ABB$_6F_6$與右行□EE_6F_6F 之面積和為全部面積的$\frac{2}{5}$。



圖(32)

又因為$\overline{EF_2}//\overline{AF_6}//\overline{A_2E_6}$

所以 $a\triangle EE_2F_2$~a$\triangle E_2E_6A_2$(AA 相似)

故$\overline{EE_2}:\overline{E_2E_6}=1:4$ $\overline{EE_2}:\overline{EE_6}=1:5$

同理可知:

∵$a\triangle E_5F_5E_6$~$a\triangle E_5EA_5$(AA 相似)

∴ $\overline{E_5E_6}:\overline{EE_5}=1:4$ $\overline{E_5E_6}:\overline{EE_6}=1:5$

∵$a\triangle A_5B_5B_6$~$a\triangle$BB_5F_5(AA 相似)

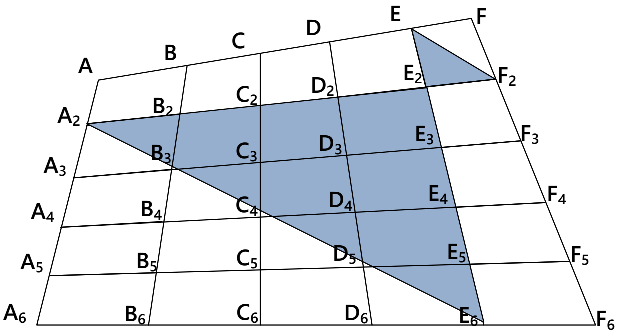
∴ $\overline{B_5B_6}:\overline{BB_5}=1:4$ $\overline{B_5B_6}:\overline{BB_6}=1:5$

∵$a\triangle$BA_2B_2~$a\triangle B_2F_2B_6$(AA 相似)

∴ $\overline{BB_2}:\overline{B_2B_6}=1:4$ $\overline{BB_2}:\overline{BB_6}=1:5$

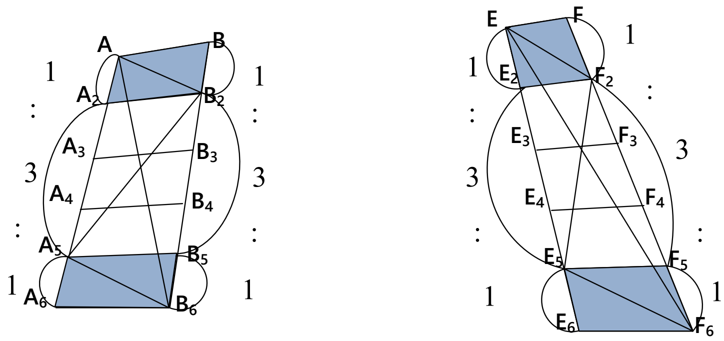
故$\overline{BB_2}:\overline{B_2B_5}:\overline{B_5B_6}$ =1: 3 : 1,$\overline{EE_2}:\overline{E_2E_5}:\overline{E_5E_6}$ =1: 3 : 1

，參閱圖(33)。



圖(33)

因為$\overline{BB_2}:\overline{B_2B_5}:\overline{B_5B_6}=1:3:1$，及$\overline{EE_2}:\overline{E_2E_5}:\overline{E_5E_6}=1:3:1$，且四邊形的四個邊長均以等分切割，請參閱圖(34)，四個角落與全部之面積關係。



圖(34)

同理得證: $a\square A_2B_2B_5A_5=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}a\square \mathrm{AB}B_6A_6$

$$=\frac{3}{5}a\square \mathrm{AB}B_6A_6;$$

$$a\square E_2F_2F_5E_5=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}a\square EFF_6E_6$$

$$=\frac{3}{5}a\square EFF_6E_6$$

$$a\square \mathrm{A_2B_2B_5A_5}+a\square \mathrm{E_2F_2F_5E_5}=\frac{3}{5}a\square \mathrm{ABB_6A_6}+\frac{3}{5}a\square \mathrm{EFF_6E_6}$$

$$=\frac{3}{5}(a\square \mathrm{ABB_6A_6}+a\square \mathrm{EFF_6E_6})$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}a\square \mathrm{AA_6F_6F}$$

$$=\frac{6}{25}a\square \mathrm{AA_6F_6F}$$

故$a\square AA_2B_2B + a\square A_5A_6B_6B_5 + a\square EE_2F_2F + a\square E_5E_6F_6F_5$

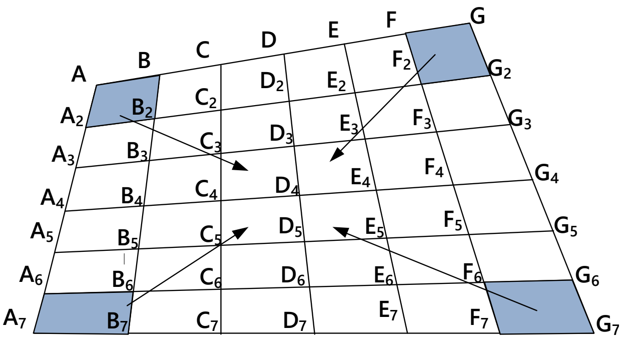
$= a\square AA_6B_6B + a\square EE_6F_6F - (a\square A_2A_5B_5B_2 + a\square E_2E_5F_5F_2)$

$= \frac{2}{5}a\square AA_6F_6F - \frac{6}{25}a\square AA_6F_6F$

$= \frac{4}{25}a\square AA_6F_6F$

故四個角落面積和為$\square AA_6F_6F$面積的$\frac{4}{25}$，又因為$\square C_3C_4D_4D_3$的面積是四邊形 AA_6F_6F面積的$\frac{1}{25}$，故中間$C_3C_4D_4D_3$面積為與四個角落面積和之$\frac{1}{4}$。

二、偶數縱橫切 6×6：當凸四邊形被六等分，切成三十六塊後。而最中間這四塊面積$\square C_3C_5E_5E_3$正好會等於左上$\square AA_2B_2B$加左下$\square A_6A_7B_7B_6$加右下$\square F_6F_7G_7G_6$再加上右上$\square FF_2G_2G$之面積和。面積關係，參閱圖(35)



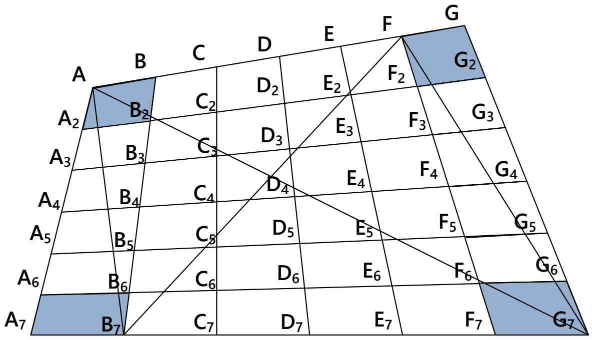
圖(35)

其推導證明如下，請參閱圖(36)。

如前述所推導：$a\square BB_7F_7F = \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} a\square AA_7G_7G$

$= \frac{4}{6}a\square AA_7G_7G$

由上述可知：中間四行$\square BB_7F_7F$的面積為$\square AA_7G_7G$ 的$\frac{4}{6}$，則左行$\square ABB_7A_7$面積與右行$\square FGG_7F_7$之面積和為$\square AA_7G_7G$ 的$\frac{2}{6}$。



圖(36)

又∵ $\overline{\mathrm{FG}_2}//\overline{\mathrm{AG}_7}//\overline{A_2\mathrm{F}_7}$

∴$a\Delta FF_2G_2 \sim a\Delta A_2F_2F_7$(AA 相似)

故$\overline{\mathrm{FF}_2}:\overline{F_2F_7}=1:5$　　　　$\overline{FF_2}:\overline{FF_7}=1:6$

同理可知:

∵$a\Delta F_6G_6F_7 \sim a\Delta F_6FA_6$(AA 相似)

∴ $\overline{F_6F_7}:\overline{FF_6}=1:5$　　　$\overline{F_6F_7}:\overline{FF_7}=1:6$

∵$a\Delta A_6B_6B_7 \sim a\Delta B_6BG_6$(AA 相似)

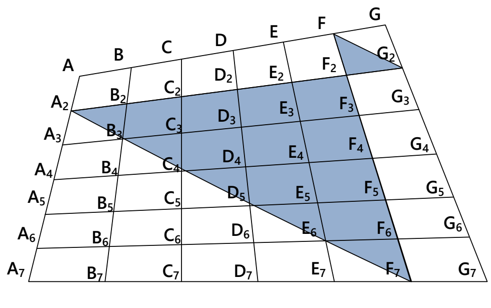
∴ $\overline{B_6B_7}:\overline{BB_6}=1:5$　　　$\overline{B_6B_7}:\overline{BB_7}=1:6$

∵$a\Delta BA_2B_2 \sim a\Delta B_2G_2B_7$(AA 相似)

∴ $\overline{BB_2}:\overline{B_2B_7}=1:5$　　　$\overline{BB_2}:\overline{BB_7}=1:6$

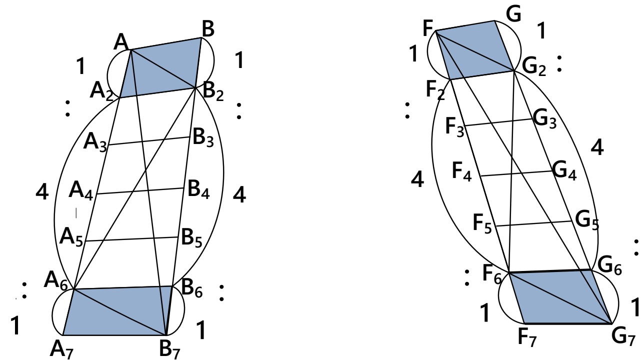
故$\overline{BB_2}:\overline{B_2B_6}:\overline{B_6B_7}$ =1: 4 : 1,$\overline{FF_2}:\overline{F_2F_6}:\overline{F_6F_7}$ =1: 4 : 1

，參閱圖(37)。



圖(37)

因為$\overline{BB_2}:\overline{B_2B_6}:\overline{B_6B_7}$ =1: 4 : 1，及$\overline{FF_2}:\overline{F_2F_6}:\overline{F_6F_7}$ =1: 4 : 1，且四邊形的四個邊長均成等比例，我們要討論四個角落與全部之面積關係，請參閱圖(38)。



圖(38)

同理得證：$a□A_2B_2B_6A_6 = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} a□ABB_7A_7$

$$= \frac{4}{6} a□ABB_7A_7$$

$$a□F_2G_2G_6F_6 = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} a□FGG_7F_7$$

$$= \frac{4}{6} a□FGG_7F_7$$

故$□A_2B_2B_6A_6$加$□F_2G_2G_6F_6$之面積為左行$□ABB_7A_7$與右行$□FGG_7F_7$之面積和的$\frac{4}{6}$，即為凸四邊形AA_7G_7G $\frac{2}{6} \times \frac{4}{6}$。

$$a□A_2B_2B_6A_6 + a□F_2G_2G_6F_6 = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} a□AA_6F_6F$$

$$= \frac{8}{36} a□AA_6G_7G$$

$$a□ABB_2A_2 + a□A_6B_6B_7A_7 + a□FGG_2F_2 + a□F_6G_6G_7F_7$$

$$= a□ABB_7A_7 + a□FGG_7F_7 - (a□A_2B_2B_6A_6 + a□F_2G_2G_6F_6)$$

$$= \frac{2}{6} a□AA_7G_7G - \frac{8}{36} a□AA_7G_7G$$

$$= \frac{4}{36} a□AA_7G_7G。$$

故四個角落面積為$□AA_7G_7G$ 面積的$\frac{4}{36}$。

當四邊形共被切成 36 個區塊，最中間這四片之總面積$□AA_7G_7G$面積的$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6}$，等於四邊形面積$AA_7G_7G$ 的$\frac{1}{9}$，又四個角落面積和為也是$\frac{4}{36} a□AA_7G_7G$。故四個角落之面積和為與中間四塊之面積和相等。

由此可推知，也就是奇數等分點後，斜對角四塊的面積相加後，正好會等於中間面積的四倍，而以偶數等分點對角相加面積和會等於最中間那四塊的面積和。故四個角落的面積均亦與中間有絕對關係。

柒、結論

在之前研究結果中我們發現最中間之面積與全部面積之關係，而之後的討論中我們又進一步發現在角落四塊面積與中間面積之的關聯。這次科展中我們從最簡單面積之切割開始探討，進一步到對切，再進一步找出四個角落塊面積竟與中間面積是彼此之間的關聯性就是以中間面積為出發點。這個發展始自於我們推論時遇到瓶頸，才發展出這個不可預知之結果。這次科展對於我們往後做研究最大幫是在於遇到困難時，能找出問題點所在，並加以突破困境這個歷程正是做這次科展最有趣之處。

捌、參考資料及其他

1、數學傳播季刊第 31 卷第 1 期 P41~P45,《凸四邊形的三等點問題》李彥廷

2、康軒文教：國中數學課本第四冊及第 5 冊第 1 章相似形定及第三章何與證明

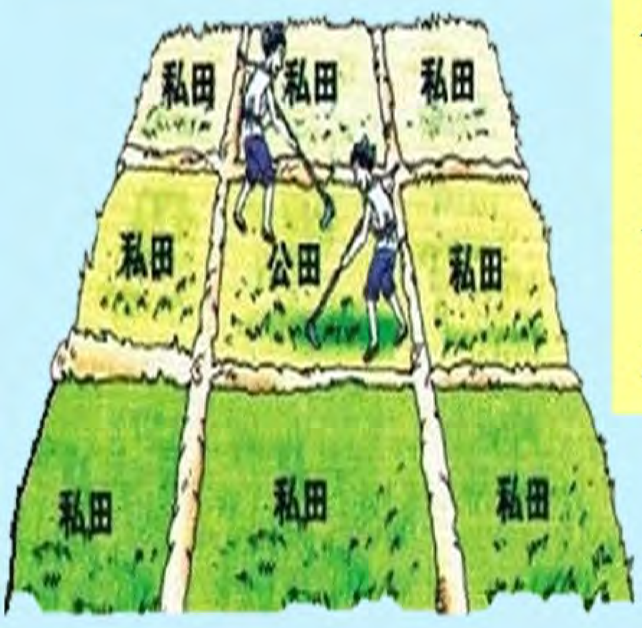
3、第 55 屆科中小學科展作品 ：k 等分凸多邊形面積之實例說明及推論。

【評語】030410

探討連接四邊形兩組對邊的 n 等分點，分割原四邊形為 n^2 個小四邊形，中間區域的面積與原四邊形面積的比值問題。研究輪廓清晰，說理清楚而有條理，值得稱許。但並沒有用到很艱深的數學原理，且內容稍嫌單薄了些。在歷屆全國科展中（高中組）已經有相關的更深入的研究，作者可再查閱。

作品海報

摘要 討論凸四邊形被奇數等分點及偶數等分點縱切與橫切後面積與總面積的關係



研究動機

歷史課時,老師教我們中國周朝時已出現井田制度。在井田中間的那一塊田地是公田,其他皆是私田。每個人不只要耕耘自己的私田,還要耕耘中間的公田,。聽到這樣的事,我們便聯想到：中間的那塊公田是否為九分之一?以等分點對切的方式會不會和面積的比例有規律的關係?

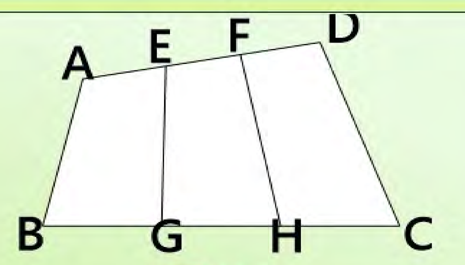
研究目的

一、尋找平面凸四邊形縱切奇數等分 點與偶數數等分點中所占面積比 例關係。
二、尋找平面凸四邊形等分縱切疊上等分橫切中所占面積之比例關係
三、推導其中關係式

研究過程及方法

1、縱切面積之討論：我們想要得知凸四邊形被奇數等分點m(m≥3)對切後，最中間那塊面積與全部面積的關係。以及凸四邊形被偶數等分點n(n≥4)對切後，最中間那兩塊區域的面積與全部面積的關係。

1、三等分點切割，如圖(1)所示, E、F、G、H為三等分點



圖(1)

由圖(2)可知：

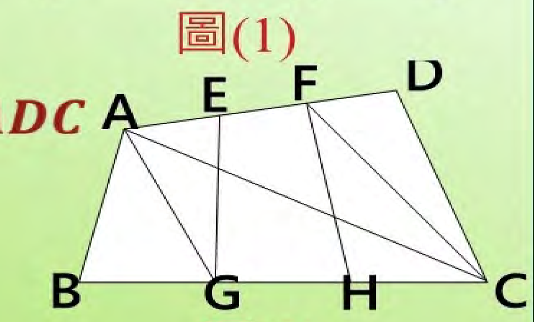
因為$a\square ABCD = a\triangle ABC + a\triangle ACD$

$a\square AFCG = a\triangle AGC + a\triangle AFC$

$a\triangle AGC = \frac{2}{3}a\triangle ABC$, $a\triangle AFC = \frac{2}{3}a\triangle ADC$

所以$a\square AFCG = \frac{2}{3}a\triangle ABC + \frac{2}{3}a\triangle ACD$

$= \frac{2}{3}a\square ABCD$



圖(2)

又由圖(3)可知

因為$a\square AFCG = a\triangle AFG + a\triangle GCF$

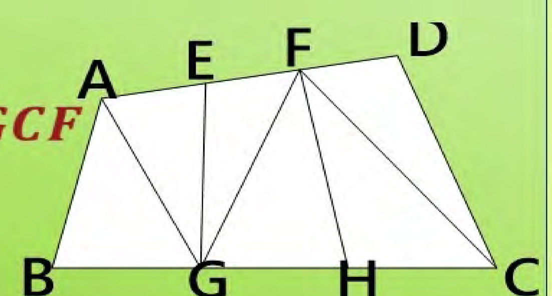
$a\square EGHF = a\triangle EFG + a\triangle FGH$

$a\triangle EFG = \frac{1}{2}a\triangle AFG$, $a\triangle FGH = \frac{1}{2}a\triangle GCF$

所以$a\square EGHF = \frac{1}{2}a\triangle AFG + \frac{1}{2}a\triangle GCF$

$a\square EGHF = \frac{1}{2}a\square AFCG = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}a\square ABCD$

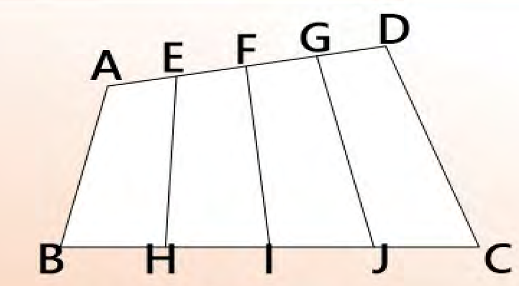
$= \frac{1}{3}a\square ABCD$ ....(式1)



圖(3)

故三等分點縱切中間□EGHF的面積為全部面積的$\frac{1}{3}$。

4、四等分點切割，如圖(7)所示, E、F、G、H、I、J為四等分點



圖(7)

由圖(8)可知:

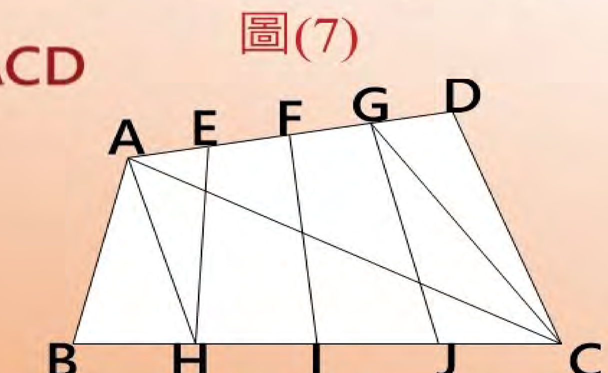
因為$a\square ABCD = a\triangle ABC + a\triangle ACD$

$a\square AGCJ = a\triangle AJC + a\triangle AGC$

$a\triangle AJC = \frac{3}{5}a\triangle ABC$，$a\triangle AGC = \frac{3}{5}a\triangle ACD$

所以$a\square AGCJ = \frac{3}{5}a\triangle ABC + \frac{3}{5}a\triangle ACD$

$= \frac{3}{5}a\square ABCD$



圖(8)

又從圖(9)可知

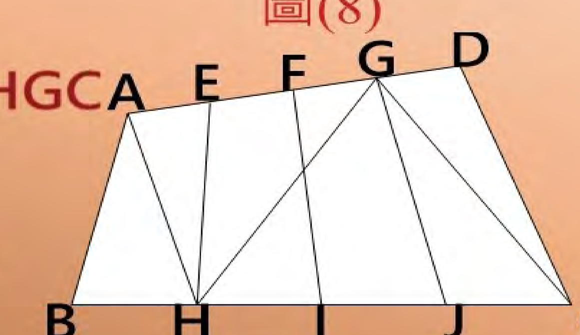
因為$a\square AHCG = a\triangle AGH + a\triangle CGH$

$a\triangle EGH = \frac{2}{3}a\triangle AGH$, $a\triangle GHJ = \frac{2}{3}a\triangle HGC$

所以$a\square EHJG = \frac{2}{3}a\triangle AGH + \frac{2}{3}a\triangle HGC$

$= \frac{2}{3}a\square AHCG = \frac{2}{3}\times a\square ABCD$

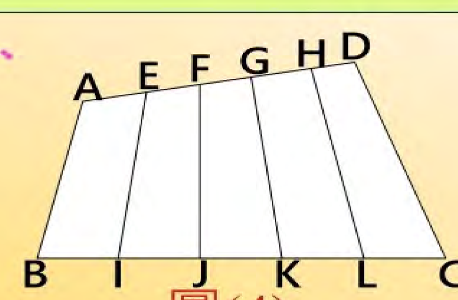
$= \frac{2}{4}a\square ABCD$.............(式4)



圖(9)

由四等分縱切時取中間□EHJG面積為全部面積的$\frac{2}{4}$。

2、五等分點切割，如圖(4)所示，E、F、G、H、I、J、K、L為五等分點。



圖(4)

由圖(5)可知:

因為$a\square ABCD = a\triangle ABC + a\triangle ACD$

$a\square AGCJ = a\triangle AJC + a\triangle AGC$

$a\triangle AJC = \frac{3}{5}a\triangle ABC$，$a\triangle AGC = \frac{3}{5}a\triangle ACD$

所以$a\square AGCJ = \frac{3}{5}a\triangle ABC + \frac{3}{5}a\triangle ACD$

$= \frac{3}{5}a\square ABCD$

圖(5)

又從圖(6)可知：

因為$a\square AGCJ = a\triangle AGJ + a\triangle GJC$

$a\square FJKG = a\triangle FGJ + a\triangle GJK$

$a\triangle FGJ = \frac{1}{3}a\triangle AGJ$，$a\triangle GJK = \frac{1}{3}a\triangle GJC$

所以$a\square FJKG = \frac{1}{3}a\triangle AGJ + \frac{1}{3}a\triangle GJC = \frac{1}{3}a\square AGCJ$

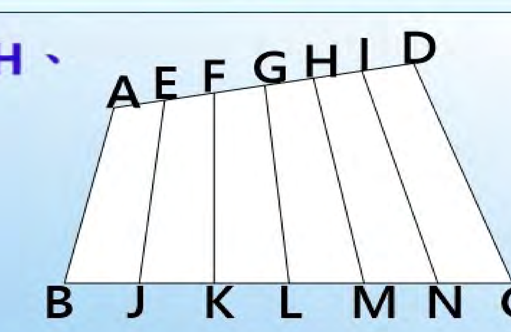
$a\square FJKG = \frac{1}{3}a\square AGCJ = \frac{1}{3}\times\frac{3}{5}a\square ABCD$

$= \frac{1}{5}a\square ABCD$.....................(式2)

圖(6)

故在五等分點縱切中間□FJKG的面積為全部面積的$\frac{1}{5}$。

5、六等分點切割，如圖(10)所示，E、F、G、H、I、J、K、L、M、N為五等分點。



圖(10)

由圖(11)可知：

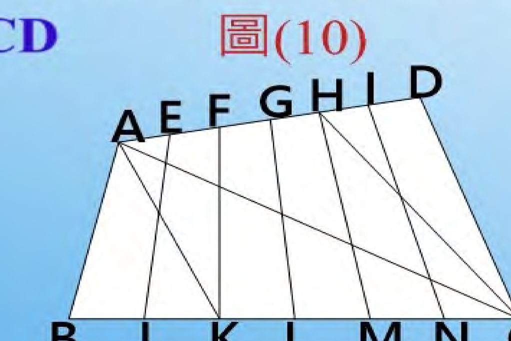
因為$a\square ABCD = a\triangle ABC + a\triangle ACD$

$a\square AKCH = a\triangle ACK + a\triangle ACH$

$a\triangle ACK = \frac{4}{6}a\triangle ABC$，$a\triangle ACH = \frac{4}{6}a\triangle ACD$

所以$a\square AKCH = \frac{4}{6}a\triangle ABC + \frac{4}{6}a\triangle ACD$

$= \frac{4}{6}a\square ABCD$



圖(11)

又從圖(12)可知：

因為$a\square AKCH = a\triangle AHK + a\triangle CHK$

$a\triangle FHK = \frac{2}{4}a\triangle AHK$，$a\triangle HKM = \frac{2}{4}a\triangle CHK$

所以$a\square FKMH = \frac{2}{4}a\triangle AHK + \frac{2}{4}a\triangle CHK$

$= \frac{2}{4}a\square AKCH = \frac{2}{4}\times\frac{4}{6}a\square ABCD$

$= \frac{2}{6}a\square ABCD$ ....(式5)

圖(12)

故六等分縱切後中間□FKMH之面積為全部面積的$\frac{2}{6}$。

3.以奇數等分點2m+1做切割時，如圖(13)所示，X_1、X_2、...、X_{2m}及Y_1、Y_2、...、Y_{2m}為等分點。由圖(13)可知:

因為$a\triangle XYY_{m+1} = \frac{m+1}{2m+1}a\triangle XYY_{2m+1}$

$a\triangle XX_{m+1}Y = \frac{m+1}{2m+1}a\triangle XX_{2m+1}Y$

$a\square XX_{m+1}YY_{m+1} = \frac{m+1}{2m+1}a\square XX_{2m+1}YY_{2m+1}$

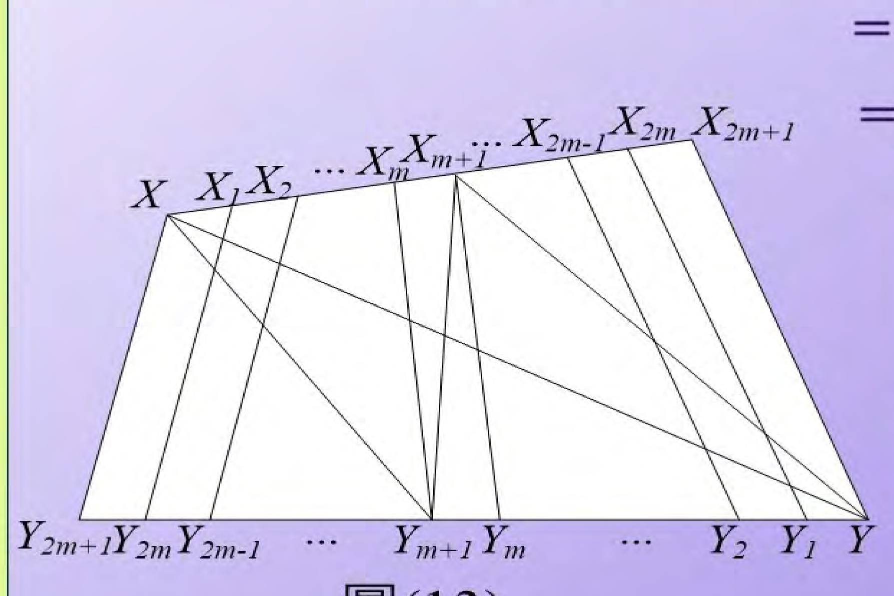
$a\triangle X_mX_{m+1}Y_{m+1} = \frac{1}{m+1}a\triangle XX_{m+1}Y_{m+1}$

$a\triangle X_{m+1}Y_mY_{m+1} = \frac{1}{m+1}a\triangle X_{m+1}YY_{m+1}$

$aX_mX_{m+1}Y_mY_{m+1} = \frac{1}{m+1}a\square XX_{m+1}YY_{m+1}$

$= \frac{1}{m+1}\times\frac{m+1}{2m+1}a\square XX_{2m+1}YY_{2m+1}$

$= \frac{1}{2m+1}a\square XX_{2m+1}YY_{2m+1}$



圖(13)

從2m+1等分點縱切可知中間$a\square X_mX_{m+1}Y_mY_{m+1}$的面積為全部面積的$\frac{1}{2m+1}$.

6.以偶數等分點2n做切割時，如圖(14)所示，K_1、K_2、...、K_{2n-1}及S_1、S_2、...、S_{2n-1}為等分點。由圖(14)可知:

因為$a\triangle KSS_{n+1} = \frac{n+1}{2n}a\triangle KSS_{2n}$； $a\triangle KK_{n+1}S = \frac{n+1}{2n}a\triangle KK_{2n}S$

$a\square KK_{n+1}SS_{n+1} = \frac{n+1}{2n}a\triangle KSS_{2n} + \frac{n+1}{2n}a\triangle KK_{2n}S$

$= \frac{n+1}{2n}a\square KK_{2n}SS_{2n}$

$a\square KK_{n+1}SS_{n+1} = a\triangle KK_{n+1}S_{n+1} + a\triangle K_{n+1}SS_{n+1}$

$a\triangle K_{n-1}K_{n+1}S_{n+1} = \frac{2}{n+1}a\triangle KK_{n+1}S_{n+1}$

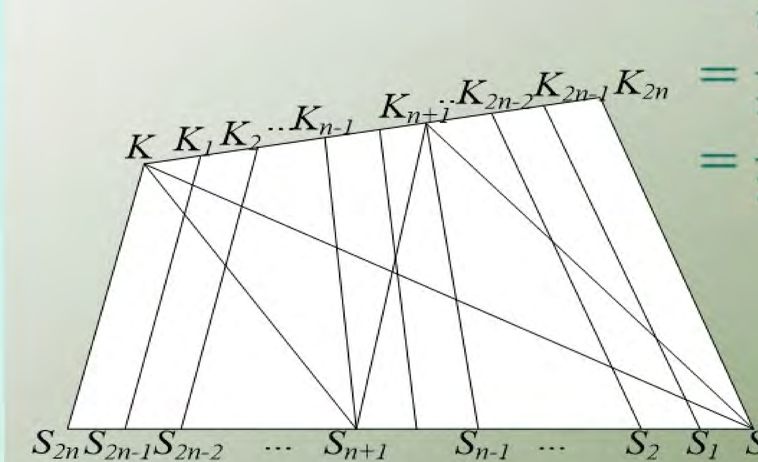
$a\triangle K_{n+1}S_{n-1}S_{n+1} = \frac{2}{n+1}a\triangle K_{n+1}SS_{n+1}$

$a\square K_{n-1}K_{n+1}S_{n+1}S_{n-1} = \frac{2}{n+1}a\triangle KK_{n+1}S_{n+1} + \frac{2}{n+1}a\triangle K_{n+1}SS_{n+1}$

$= \frac{2}{n+1}a\square KK_{n+1}SS_{n+1}$

$= \frac{2}{n+1}\times\frac{n+1}{2n}a\square KK_{2n}SS_{2n}$

$= \frac{2}{2n}a\square KK_{2n}SS_{2n} = \frac{1}{n}a\square KK_{2n}SS_{2n}$



圖(14)

從2n等分點縱切可知中間$a\square K_{n-1}K_{n+1}S_{n+1}S_{n-1}$的面積為全部面積的$\frac{1}{n}$。

從奇數等分點的面積得知，當以三等分點做切割時，最中間那一塊面積為全部面積的$\frac{1}{3}$。當以五等分點做切割時，最中間那一塊面積為全部面積的$\frac{1}{5}$。當以奇數等分點切割時中間面積必為全部面積的$\frac{1}{2m+1}$[定理一]。

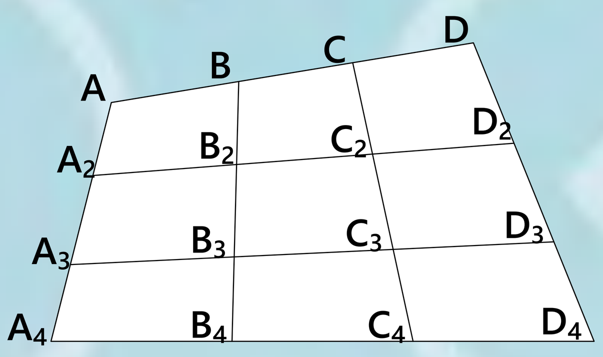
從偶數等分點的面積得知，當以四等分點做切割時，最中間那一塊面積為全部面積的$\frac{2}{4}$。當以六等分點做切割時，最中間那一塊面積為全部面積的$\frac{2}{6}$。當以偶數等分點切割時中間面積必為全部面積的$\frac{1}{n}$[定理二]。

縱切加以橫切的面積

我們想知道凸四邊形被奇數等分點$2m+1$($m \geq 1$且為自然數)縱切並加以橫切後，最中間那塊區域的面積與全部面積的關係。以及凸四邊形被偶數等分點$2n$($n \geq 2$且為自然數)縱切並加以橫切後，最中間那塊區域的面積與全部面積的關係。

三等分點

我們在凸四邊形的一雙對邊AD及A_4D_4和另一雙對邊AA_4及DD_4分別取3等分點，如右圖所示。



從(式1)得知，▫BB_4C_4C的面積是全部面積的$\frac{1}{3}$。

由右圖可知

$\because \overline{CD_2}//\overline{AD_4}$

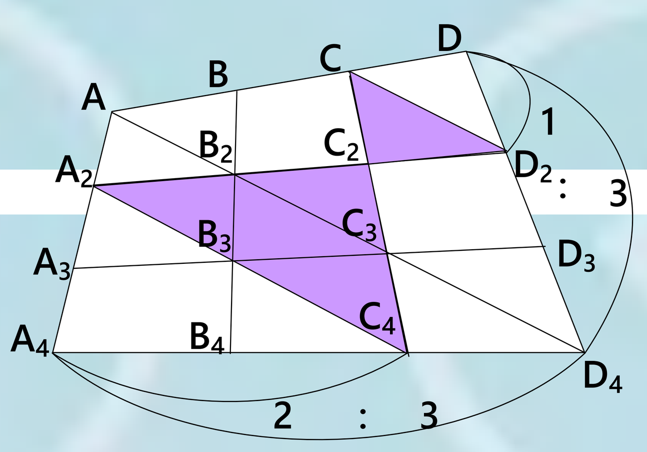
$\therefore \overline{CD_2}:\overline{AD_4}=1:3$

$\because \overline{A_2C_4}//\overline{AD_4}$

$\therefore \overline{A_2C_4}:\overline{AD_4}=2:3$

故 $\overline{CD_2}//\overline{AD_4}//\overline{A_2C_4}$

$\therefore \triangle A_2C_4C_2 \sim \triangle CD_2C_2$($AA$相似)

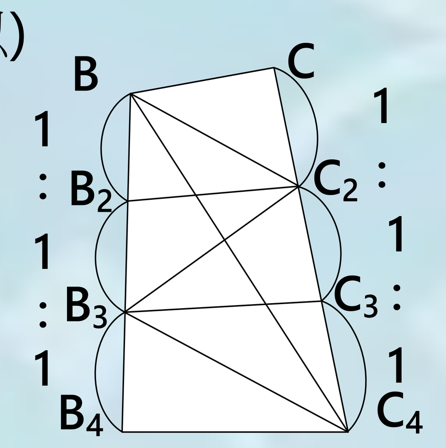


同理可知:

$\overline{CC_2}:\overline{C_2C_3}:\overline{C_3C_4}=1:1:1$

$\overline{BB_2}:\overline{B_2B_3}:\overline{B_3B_4}=1:1:1$

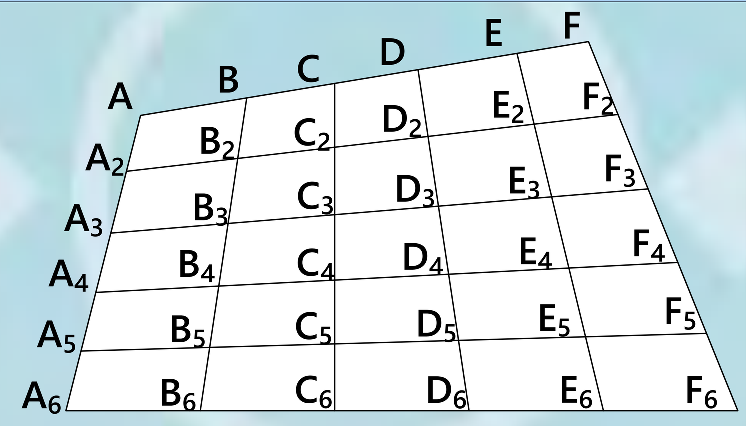
參閱右圖



從(式1)得知，▫$B_2B_3C_3C_2$的面積是▫BB_4C_4C面積的$\frac{1}{3}$，所以▫$B_2B_3C_3C_2$的面積是全部面積的$\frac{1}{9}$。

五等分點

在四邊形的對邊AF及A_6F_6和另一雙對邊AA_6及FF_6，分別取5等分點，如右圖所示。



從(式2)得知，▫CC_6D_6D的面積是全部面積的$\frac{1}{5}$。

由右圖可知:

$\because \overline{DF_3}//\overline{AF_6}$

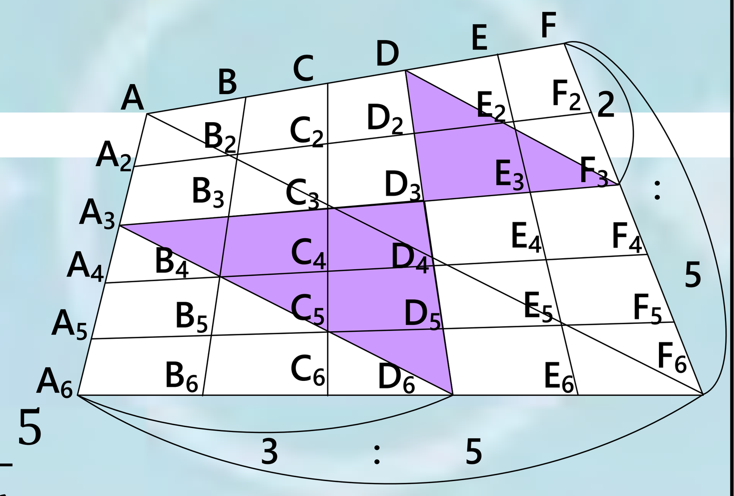
$\therefore \overline{DF_3}:\overline{AF_6}=2:5$

$\because \overline{A_3D_6}//\overline{AF_6}$

$\therefore \overline{A_3D_6}:\overline{AF_6}=3:5$

故$\overline{DF_3}//\overline{AF_6}//\overline{A_3D_6}$

$\therefore \triangle DF_3D_3 \sim \triangle D_3D_6A_3$($AA$相似)

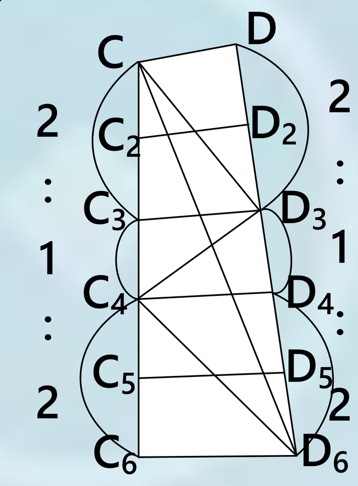


同理可知:

$\overline{DD_3}:\overline{D_3D_4}:\overline{D_4D_6}=2:1:2$

$\overline{CC_3}:\overline{C_3C_4}:\overline{C_4C_6}=2:1:2$

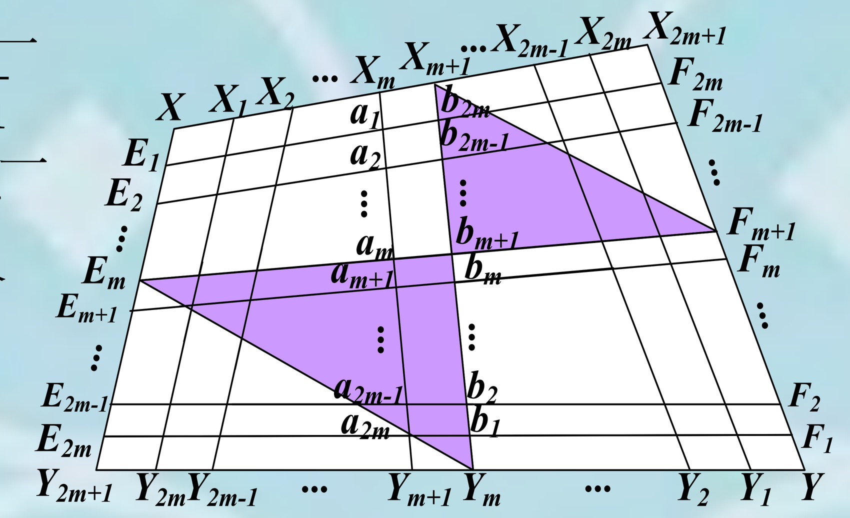
參閱右圖



從(式2)得知，▫$C_3C_4D_4D_3$的面積是▫CC_6D_6D面積的$\frac{1}{5}$，所以▫$C_3C_4D_4D_3$的面積是全部面積的$\frac{1}{25}$。

$2m+1$等分點

在凸四邊形的一雙對邊XX_{2m+1}及$Y_{2m+1}Y$和另一雙對邊XY_{2m+1}及$X_{2m+1}Y$，分別取$2m+1$等分點，如右圖所示。



$\because \overline{X_{m+1}F_{m+1}}//\overline{XY}$

$\therefore \overline{X_{m+1}F_{m+1}}:\overline{XY}=m:2m+1$

$\because \overline{E_mY_m}//\overline{XY}$

$\therefore \overline{E_mY_m}:\overline{XY}=m+1:2m+1$

故$\overline{X_{m+1}F_{m+1}}//\overline{XY}//\overline{E_mY_m}$

$\therefore \triangle E_mY_mb_{m+1} \sim \triangle X_{m+1}F_{m+1}b_{m+1}$($AA$相似)

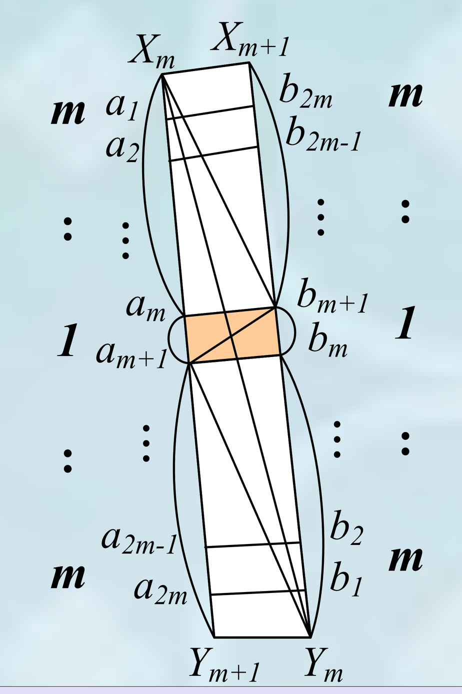
故$\overline{X_{m+1}b_{m+1}}:\overline{b_{m+1}Y_m}=m:m+1$

$\overline{X_{m+1}b_{m+1}}:\overline{X_{m+1}Y_m}=m:2m+1$

同理可知：

$\overline{X_ma_m}:\overline{a_ma_{m+1}}:\overline{a_{m+1}Y_{m+1}}=m:1:m$

$\overline{X_{m+1}b_{m+1}}:\overline{b_{m+1}b_m}:\overline{b_mY_m}=m:1:m$ 參閱下圖

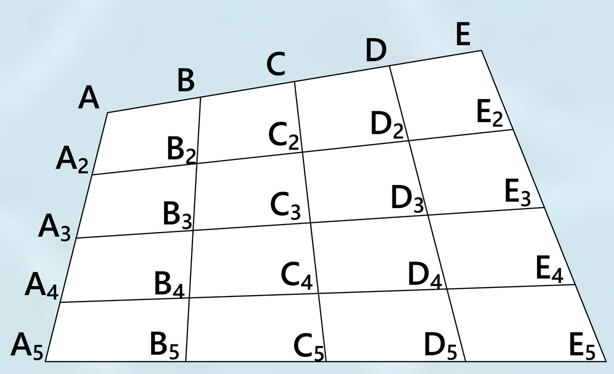


從上述得知，▫$a_ma_{m+1}b_mb_{m+1}$的面積是▫$XY_{2m+1}YX_{2m+1}$面積的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$。

定理三：以奇數$2m+1$等分點做縱橫切割時，中間面積為全部面積的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$

四等分點

在凸四邊形的一雙對邊AE及A_5E_5及另一雙對邊AA_5及EE_5，分別取4等分點。如右圖所示。



從(式4)得知，▫BB_5D_5D的面積是全部面積的$\frac{2}{4}$。

由右圖可知:

$\because \overline{DE_2}//\overline{AE_5}$

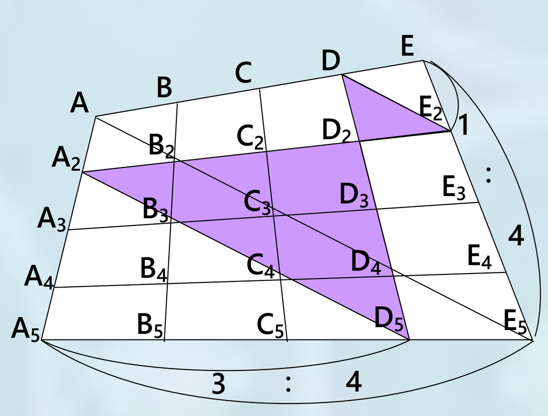
$\therefore \overline{DE_2}:\overline{AE_5}=1:4$

$\because \overline{A_2D_5}//\overline{AE_5}$

$\therefore \overline{A_2D_5}:\overline{AE_5}=3:5$

故$\overline{DE_2}//\overline{AE_5}//\overline{A_2D_5}$

$\therefore a \triangle A_2D_5D_2 \sim a \triangle DE_2D_2$($AA$相似)

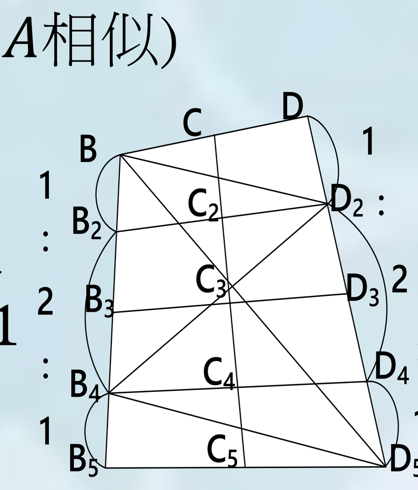


同理可知:

$\overline{BB_2}:\overline{B_2B_4}:\overline{B_4B_5}=1:2:1$

$\overline{DD_2}:\overline{D_2D_4}:\overline{D_4D_5}=1:2:1$

參閱右圖

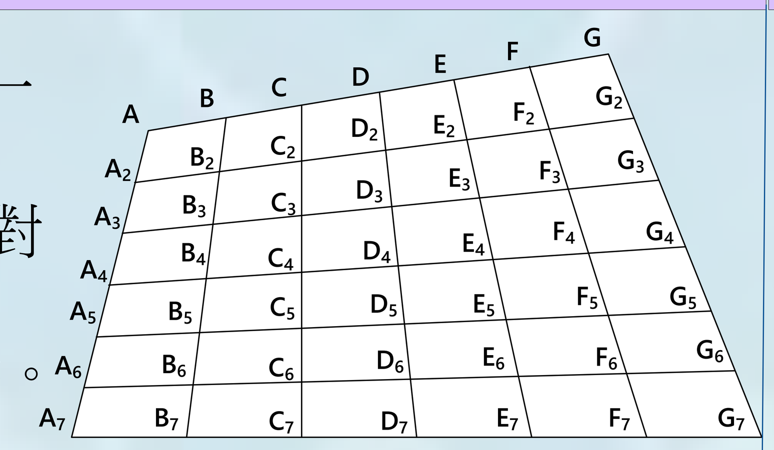


從(式4)得知,

▫ $B_2B_4D_4D_2$的面積是▫ BB_5D_5D面積的$\frac{2}{4}$，所以▫ $B_2B_4D_4D_2$的面積是全部面積的$(\frac{2}{4})^2$。

六等分點

在凸四邊形的一雙對邊AG及A_7G_7及另一雙對邊AA_7及GG_7，分別取6等分點。如右圖所示。



從(式5)得知，▫CC_7E_7E的面積是全部面積的$\frac{2}{6}$。

由右圖可知:

$\because \overline{EG_3}//\overline{AG_7}$

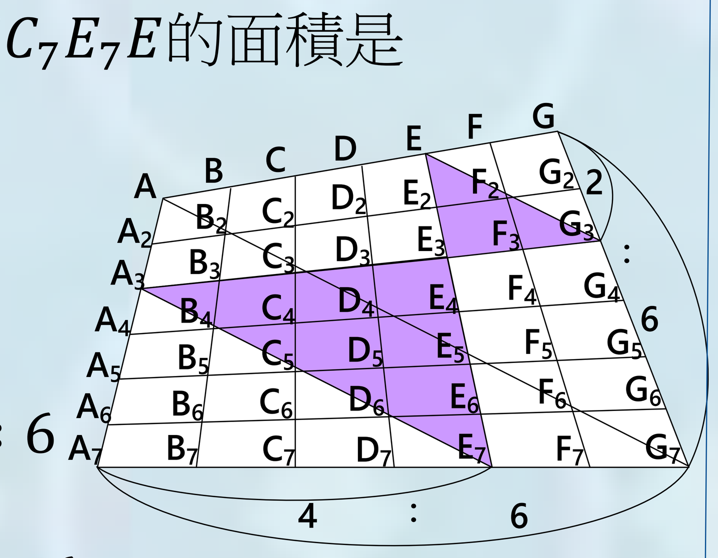
$\therefore \overline{EG_3}:\overline{AG_7}=2:6$

$\because \overline{A_3E_7}//\overline{AG_7}$

$\therefore \overline{A_3E_7}:\overline{AG_7}=4:6$

故$\overline{EG_3}//\overline{AG_7}//\overline{A_3E_7}$

$\therefore a \triangle A_3E_7E_3 \sim a \triangle EG_3E_3$($AA$相似)

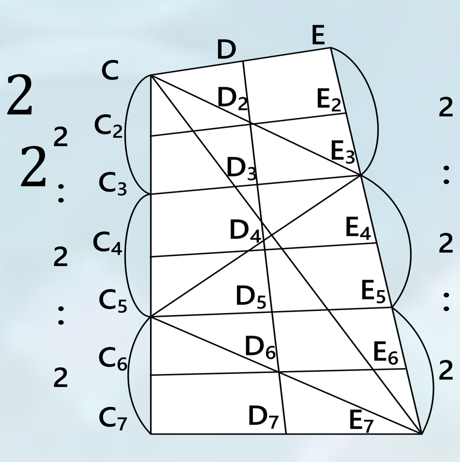


同理可知:

$\overline{CC_3}:\overline{C_3C_5}:\overline{C_5C_7}=2:2:2$

$\overline{EE_3}:\overline{E_3E_5}:\overline{E_5E_7}=2:2:2$

參閱右圖

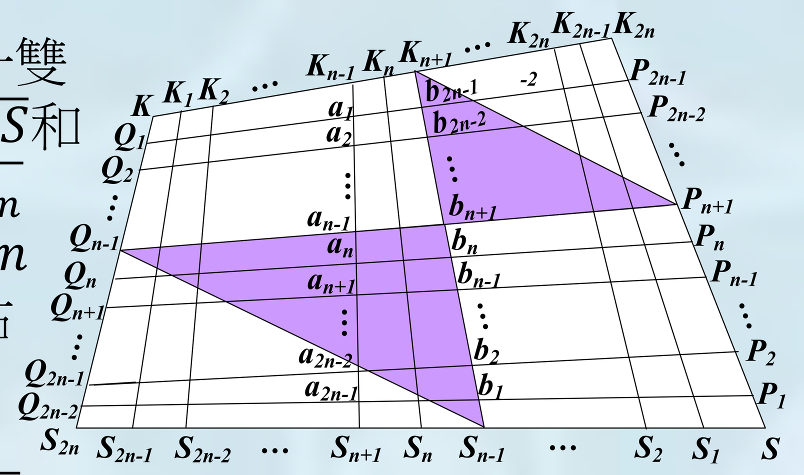


從(式5)得知,

▫ $C_3C_5E_5E_3$的面積是▫ CC_7E_7E面積的$\frac{2}{6}$，所以▫ $C_3C_5E_5E_3$的面積是全部面積的$(\frac{2}{6})^2$。

2n等分點

在凸四邊形的一雙對邊KK_{2n}及$S_{2n}S$和另一雙對邊KS_{2n}及$K_{2n}S$分別取$2n$個等分點，如右圖所示。



$\because \overline{K_{n+1}P_{n+1}}//\overline{KS}$

$\therefore \overline{K_{n+1}P_{n+1}}:\overline{KS}=n-1:2n$

$\because \overline{Q_{n-1}S_{n-1}}//\overline{KS}$

$\therefore \overline{Q_{n-1}S_{n-1}}:\overline{KS}=n+1:2n$

故$\overline{K_{n+1}P_{n+1}}//\overline{KS}//\overline{Q_{n-1}S_{n-1}}$

$\therefore \triangle Q_{n-1}S_{n-1}b_{n+1} \sim \triangle K_{n+1}P_{n+1}b_{n+1}$($AA$相似)

故$\overline{K_{n+1}b_{n+1}}:\overline{b_{n+1}S_{n-1}}=n-1:n+1$

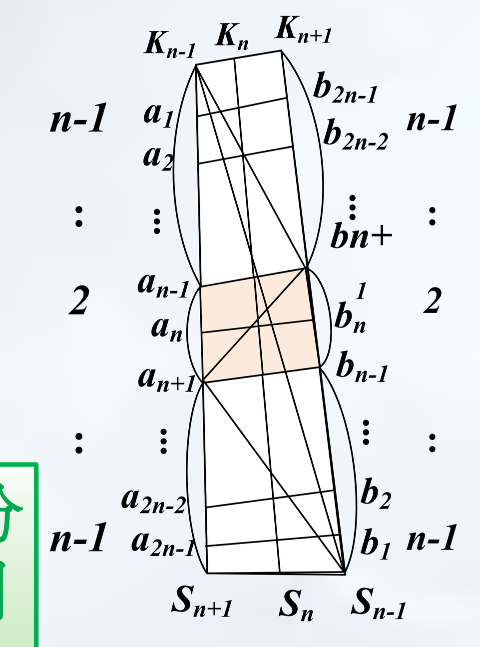
$\overline{K_{n+1}b_{n+1}}:\overline{K_{n+1}S_{n-1}}=n-1:2n$

同理可知:

$\overline{K_{n-1}a_{n-1}}:\overline{a_{n-1}a_{n+1}}:\overline{a_{n+1}S_{n+1}}=n-1:2:n-1$

$\overline{K_{n+1}b_{n+1}}:\overline{b_{n+1}b_{n-1}}:\overline{b_{n-1}S_{n+1}}=n-1:2:n-1$

參閱下圖



從上述得知，▫$a_{n-1}b_{n+1}b_{n-1}a_{n+1}$的面積是▫ $KK_{2n}SS_{2n}$面積的$\left(\frac{1}{n}\right)^2$

定理四：以偶數$2n$等分點做縱橫切割時，中間面積為全部面積的$\left(\frac{1}{n}\right)^2$

奇數縱橫切等分點面積之結論

任意四邊形每邊以相同奇數等分，並加以縱切及橫切後得知，最中間面積與全部面積的關係如下:

1、每邊三等分時，最中間的面積為總面積的$\frac{1}{9}$；

2、每邊五等分時，最中間的面積為總面積的$\frac{1}{25}$；

3、每邊$2m+1$等分點時，最中間的面積為總面積的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$，($m \geq 1$；$m$為自然數)。

偶數縱橫切等分點面積之結論

任意四邊形每邊以相同偶數等分，並加以縱切及橫切後得知，最中間面積與全部面積的關係如下:

1、每邊四等分時，最中間的面積為總面積的$(\frac{2}{4})^2$；

2、每邊六等分時，最中間的面積為總面積的$(\frac{2}{6})^2$；

3、每邊$2n$等分點時，最中間的面積為總面積的$\left(\frac{2}{2n}\right)^2$，($n \geq 2$；n為自然數)。

以此推論，我們可以發現，只要以奇數等分點$2m+1$做切割時，中間面積必為全部的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$。

以此推論，我們可以發現，只要以偶數等分點$2n$做切割時，中間面積必為全部的$\left(\frac{2}{2n}\right)^2$。

研究結果

一、在不規則凸四邊形中，隨意兩個對邊被奇數等分點$2m+1$（m為自然數）縱切後，最中間那一塊區域的面積必為整個凸四邊形面積的$\frac{1}{2m+1}$。

二、在不規則凸四邊形中，隨意兩個對邊被偶數等分點$2n$（n為自然數且$n\geq 2$）縱切後，最中間那兩塊區域的面積必為整個凸四邊形面積的$\frac{2}{2n}$（即$\frac{1}{n}$）。

三、在不規則凸四邊形中，當其中一組對邊被奇數等分點$2m+1$（m為自然數）縱切後，另一組對邊再以奇數等分$2m+1$（m為自然數）加以橫切，則最中間那一塊區域的面積必為整個凸四邊形面積的$\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$。

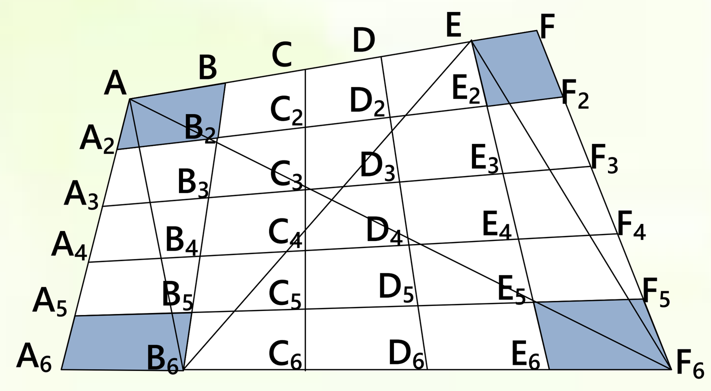
四、在不規則凸四邊形中，當其中一組對邊被偶數等分點$2n$（n為自然數且$n\geq 2$）縱切後，另一組對邊再以偶數等分點$2n$（n為自然數）加以橫切，則最中間那四塊區域的面積必為整個凸四邊形面積的$\left(\frac{2}{2n}\right)^2$（即$\left(\frac{1}{n}\right)^2$）。

討論與應用(一)

在前面我們討論完中間面積與全部面積之關係後，我們想繼續討論在分割成數塊後，各塊面積之關係。經過各項驗證後，我們發現各塊面積其實彼此不相等，但卻互有關聯，而且最中間面積與會與四個角落的面積會互有關聯。奇數等分點縱切加以橫切時四個角落面積和再除以四會等於中間面積，我們選擇以5x5做說明。偶數等分點縱切加以橫切，四個角落面積和會與中間四塊面積相等，我們選擇以6x6做說明。

5×5:

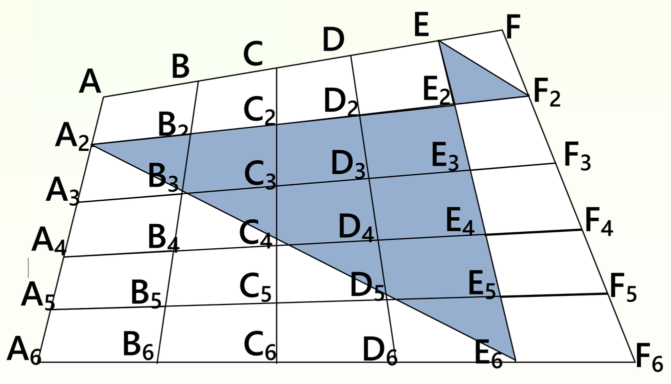
1. 中間三行$\square BB_6E_6E$面積為全部面積的$\frac{3}{5}$，而左右兩行$\square ABB_6A_6$與$\square EE_6F_6F$之面積為全部面積的$\frac{2}{5}$。（參閱圖32）



圖(32)

2. $\overline{BB_2}:\overline{B_2B_5}:\overline{B_5B_6}=1:3:1$，$\overline{EE_2}:\overline{E_2E_5}:\overline{E_5E_6}=1:3:1$。（參閱圖33）

3. 從前述得知$a\square C_3C_4D_4D_3$為全部面積的$\frac{1}{25}$



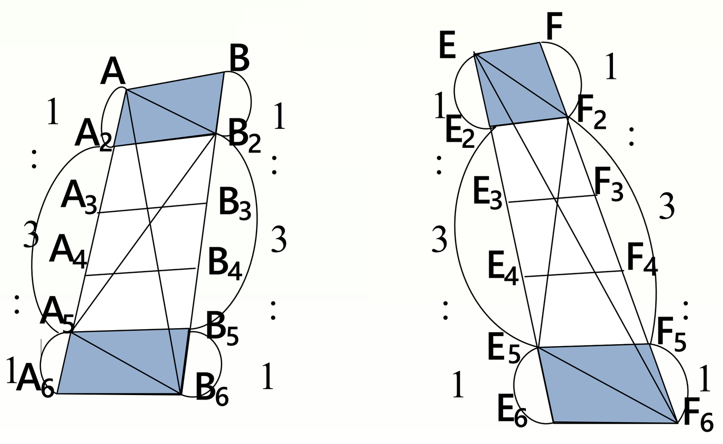
圖(33)

4、引前述第1點、第2點。(參閱圖34)

$$a\square A_2B_2B_5A_5=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}a\square ABB_6A_6=\frac{3}{5}a\square ABB_6A_6$$

$$a\square E_2F_2F_5E_5=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}aEFF_6E_6=\frac{3}{5}a\square EFF_6E_6$$

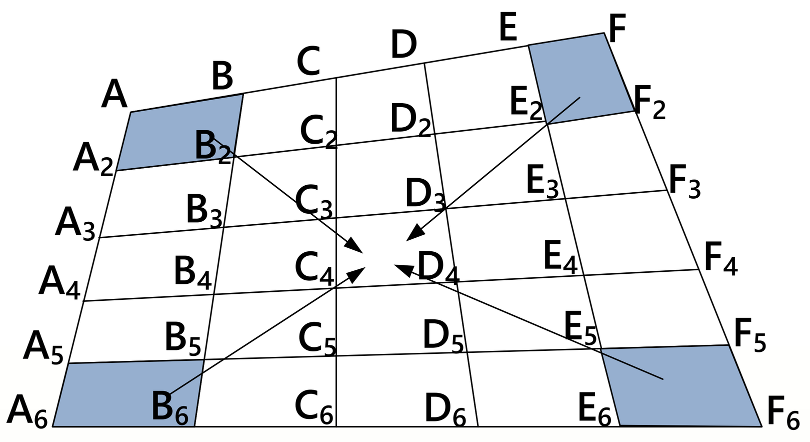
$$\frac{3}{5}a\square ABB_6A_6+\frac{3}{5}a\square EFF_6E_6$$
$$=\frac{3}{5}(a\square ABB_6A_6+a\square EFF_6E_6)$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\,a\square AA_6F_6F=\frac{6}{25}a\square AA_6F_6F$$



圖(34)

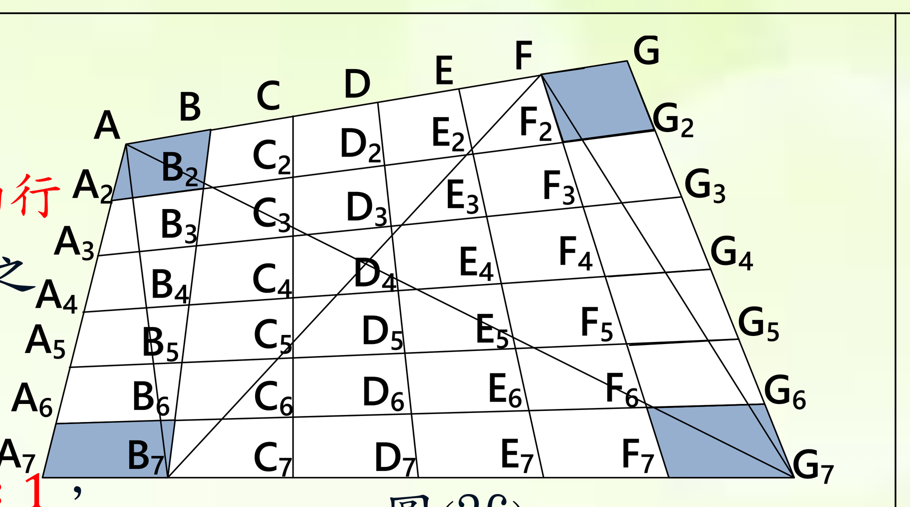
$$a\square ABB_2A_2+a\square A_5B_5B_6A_6+a\square EFF_2E_2+a\square E_5F_5F_6E_6$$
$$=\frac{2}{5}a\square AA_6F_6F-\frac{6}{25}a\square AA_6F_6F=\frac{4}{25}a\square AA_6F_6F$$

四塊藍色角落面積和為全部面積的$\frac{4}{25}$(如右圖)，因為$C_3C_4D_4D_3$的面積是四邊形AA_6F_6F面積的$\frac{1}{25}$，故中間$C_3C_4D_4D_3$面積為與四個角落面積和之$\frac{1}{4}$。



6×6

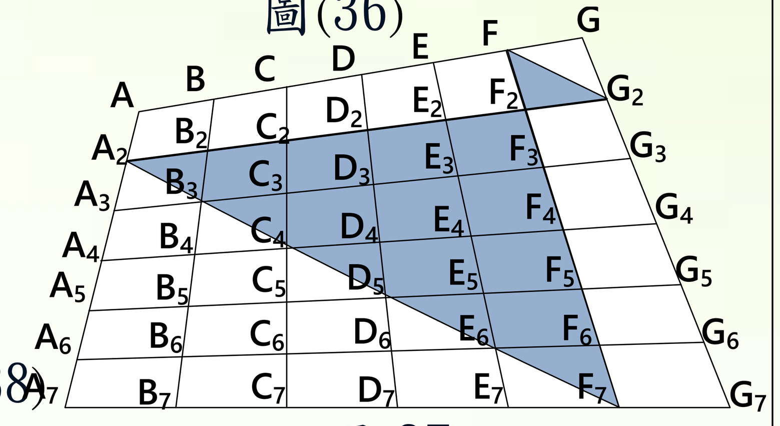
1. 中間四行$\square BB_7F_7F$為全部面積的的$\frac{4}{6}$，而左右兩行$\square ABB_7A_7$與右行$\square FGG_7F_7$之面積和為全部面積的$\frac{2}{6}$。（參閱圖36）



圖(36)

2. $\overline{BB_2}:\overline{B_2B_6}:\overline{B_6B_7}=1:4:1$，$\overline{FF_2}:\overline{F_2F_6}:\overline{F_6F_7}=1:4:1$。（參閱圖37）

3. 從前述得知$a\square C_3C_5E_5E_3$為全部面積的$\frac{1}{36}$



圖(37)

4. 引前述第1點、第2點。參閱圖(38)

$$a\square A_2B_2B_6A_6=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}aABB_7=\frac{4}{6}a\square ABB_7A_7$$

$$a\square F_2G_2G_6F_6=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}a\square FGG_7F_7=\frac{4}{6}a\square FGG_7F_7$$

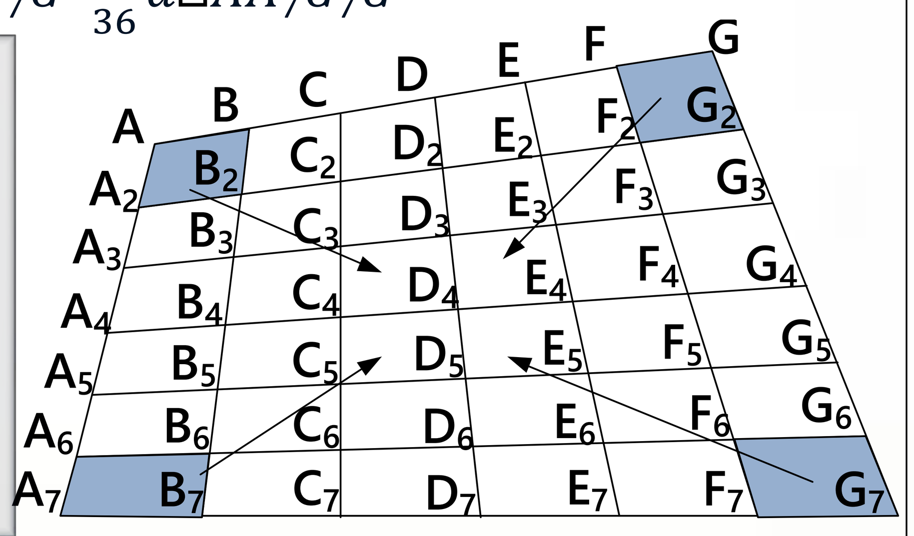
$$\frac{4}{6}a\square ABB_7A_7+\frac{4}{6}a\square FGG_7F_7$$
$$=\frac{4}{6}(a\square ABB_7A_7+a\square FGG_7F_7)$$

圖(38)

$$=\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}a\square AA_6F_6F=\frac{8}{36}a\square AA_7G_7G$$

$$a\square ABB_2A_2+a\square A_6B_6B_7A_7+a\square FGG_2F_2+a\square F_6G_6G_7F_7$$
$$=\frac{2}{6}a\square AA_7G_7G-\frac{8}{36}a\square AA_7G_7G=\frac{4}{36}a\square AA_7G_7G。$$

四塊藍色角落面積為全部面積$\frac{4}{36}$(如右圖)。當四邊形被分割成36個區塊，最中間四塊之面積為全部面積的$\frac{4}{36}$，而四個角落之面積和為與中間四塊之面積和相等。



討論與應用(2)

在前面我們討論完各塊面積與全部面積之關係後，我們想繼續討論將四邊形的對邊分割成固定比例$a:b:c$，中間面積與全部面積的關係。

固定比例縱切:

我們要討論，如果改以固定比例$a:b:c$縱切切割時，中間面積與全部面積的關係，如圖(39)所示。

$a\square EFHG$與全部面積$a\square ABCD$的關係推導如下:

$\because a\square ABCD=a\triangle ABC+a\triangle ACD$

$a\triangle AGC=\frac{a+b}{a+b+c}a\triangle ABC$，$a\triangle AFC=\frac{a+b}{a+b+c}a\triangle ACD$

$\therefore a\square AFCG=\frac{a+b}{a+b+c}a\triangle ABC+\frac{a+b}{a+b+c}a\triangle ACD$

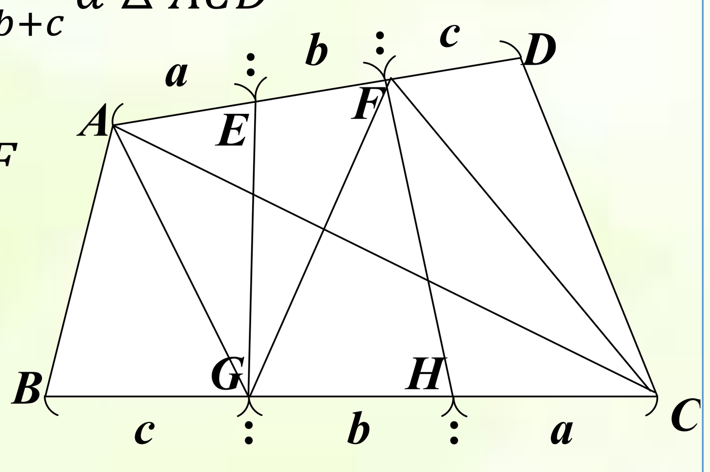
$=\frac{a+b}{a+b+c}a\square ABCD$

$\because a\square AFCG=a\triangle AFG+a\triangle GCF$

$a\square EFHG=a\triangle EFG+a\triangle FGH$

$a\triangle EFG=\frac{b}{a+b}a\triangle AFG$

$a\triangle FGH=\frac{b}{a+b}a\triangle GCF$



圖(39)

$\therefore a\square EFHG=\frac{b}{a+b}a\triangle AFG+\frac{b}{a+b}a\triangle GCF$

$a\square EFHG=\frac{b}{a+b}a\square AFCG=\frac{b}{a+b}\times\frac{a+b}{a+b+c}a\square ABCD$

$=\frac{b}{a+b+c}a\square ABCD$

故中間$\square EFHG$的面積為$\square ABCD$面積的$\frac{b}{a+b+c}$

固定比例縱橫切:

我們要討論，如果改以固定比例$a:b:c$縱橫切切割時，中間面積與全部面積的關係，如圖(40)所示。

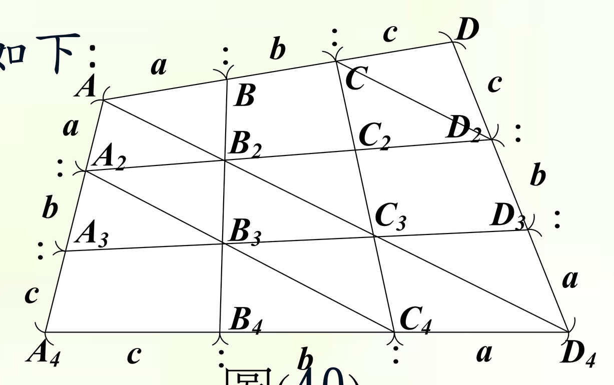
$a\square B_2B_3C_3C_2$與全部面積$a\square ADD_4A_4$的關係推導如下:

$\because \overline{CD_2}//\overline{AD_4}$ $\therefore \overline{CD_2}:\overline{AD_4}=c:a+b+c$

$\because \overline{A_2C_4}//\overline{AD_4}$ $\therefore \overline{A_2C_4}:\overline{AD_4}=b+c:a+b+c$

故$\overline{CD_2}//\overline{AD_4}//\overline{A_2C_4}$

$\because \triangle A_2C_4C_2\sim\triangle CD_2C_2$(AA相似)



圖(40)

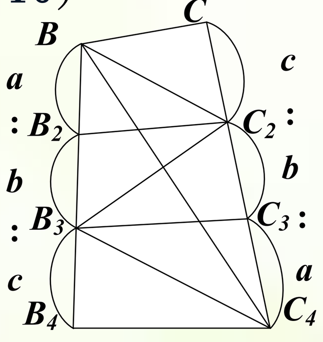
故$\overline{CC_2}:\overline{C_2C_4}=c:a+b$，$\overline{CC_2}:\overline{CC_4}=c:a+b+c$

$\overline{C_2D_2}:\overline{A_2C_2}=c:a+b$，$\overline{C_2D_2}:\overline{A_2D_2}=c:a+b+c$

同理可知:

$\because \triangle BA_2B_2\sim\triangle B_2B_4D_2$(AA相似)、

$\triangle A_3B_4B_3\sim\triangle BB_3D_3$(AA相似)、$\triangle C_4D_3C_3\sim\triangle C_3CA_3$(AA相似)



圖(41)

故$\overline{CC_2}:\overline{C_2C_3}:\overline{C_3C_4}=c:b:a$、$\overline{A_3B_3}:\overline{B_3C_3}:\overline{C_3D_3}=c:b:a$、

$\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}:\overline{C_2D_2}=a:b:c$、$\overline{BB_2}:\overline{B_2B_3}:\overline{B_3B_4}=a:b:c$

$a\square BCC_4B_4=\frac{b}{a+b+c}a\square ADD_4A_4$

由(式5)可知$a\square B_2B_3C_3C_2$為$\frac{b}{a+b+c}a\square BCC_4B_4$，

$\therefore a\square B_2B_3C_3C_2$為$\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2a\square ADD_4A_4$(參閱圖41)

故最中間$\square B_2B_3C_3C_2$面積為$\square ADD_4A_4$面積的$\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2$

結論

我們這次做的研究，主要是對四邊形面積的切割做了一個完整的討論，可以應用在各種耗材的切割上，例如:醫學的用品，或是機械材料的切割，可以減少損料、降低成本，甚至可以應用在土地的切割，讓我們可以跳過那些瑣碎的計算過程，直接用我們的公式切割出我們想要的面積，而我們的公式當然不是憑空出現的:我們先找出縱切後面積的關聯性，接著再用相似三角形和前面縱切後得到的公式來算出縱橫切後面積的關係，之後的討論我們還發現在角落四塊面積與中間面積的關聯及對邊固定比例縱切及縱橫切之後，中間面積與全部面積的關係。

參考資料：（一）數學傳播季刊 第31卷第1期P41~P45 ，《凸四邊形的三等點問題》李彥廷

（二）康軒文教：國中數學課本第四冊及第5冊第1章相似形定及第三章何與證明

（三）第55屆科中小學科展作品：k等分凸多邊形面積之實例說明及推論