中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030409

冪次方和均相等的線段完美分割

學校名稱：桃園市立同德國民中學

作者：	指導老師：
國一 游堋騰	李美杏

關鍵詞：等冪和、集合、分割

摘　要

等冪和是個古老、留有許多未解的迷人問題，過去多數使用多項式對稱、組合公式、複雜的代數方法、或以電腦輔助搜尋，求取較高冪次的理想解。本研究採用初級的數學理論、方法和公式，應用基本的集合性質、二項式公式、數學歸納法，成功獲取一系列等冪和的理想解，並證明其解的存在。研究從基本的二元集開始，探討等冪和理想解存在時的特性，然後導入**定理 3.1** 的方法建構、或運用**推論 5.1** 的方法倍數擴增，必可找到高一冪次或倍數冪次方和的解或理想解，並延伸到實數的等冪和問題求解。本研究也成功找到一系列奇數和偶數次、或無理數的等冪和理想解。研究結果預期可被應用至軟體的加密技術和相關應用，並且值得進一步探討質數的高冪次等冪和問題。

壹、研究動機

在「乘法公式與多項式」單元，練習到一題數學題：「兩不相交的非空子集$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$，使得$\sum_{x\in A} x = \sum_{x\in B} x$且$\sum_{x\in A} x^3 = \sum_{x\in B} x^3$」。在嘗試解答後發現，此問題的解有很多奇妙的特性和美麗的數學關係。

初步搜尋網路的探討資料後得知，此問題二元集滿足其中三冪次和相等的最小正整數，正是 18 世紀初著名的計程車號碼 1729，又稱為哈迪–拉馬努吉數 (Hardy–Ramanujan number)，是以兩種不同方式表示為兩個立方體之和的數字，亦即$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$。在維基百科中說明的資料顯示，此問題出現自 18 世紀中 Christian Goldbach 和 Leonhard Euler 的信件、經過 19 世紀中 Eugène Prouhet 的研究、和 20 世紀初 Gaston Tarry 和 Escott 等人的研究，已被普遍化成為著名的 Prouhet-Tarry-Escott (PTE)問題。

PTE 問題的理想解，在於尋找兩不相交的$\mathbf{n}$元非空集合$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$，對$\mathbf{k} = 0, 1, 2, \ldots, \mathbf{m}$、$\mathbf{m} < \mathbf{n}$、$\mathbf{k} \in \mathbb{N}$，滿足$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$。此問題，又被稱為等冪和問題，雖然很古老，但仍然留下許多尚待解決的問題，直至近年仍有許多人在持續地研究其整數解，有些人稱之為丟番圖方程(Diophantine Equation)問題(Ajai Choudhry [3])；資料中，有些等冪和的通解是利用多項式設多個參數代入並解方程式，過程計算煩雜(Ajai Choudhry [1])，並且尚有許多未解出的部份。

在電腦科技發達以後，不少研究者借助電腦程式的幫助(陳漱文[2])，使用電腦搜索求解，但許多都僅公布數值的正整數解，且未公布詳細的研究方法；而使用複雜代數的運算方式探討者，則主要關注在整數解的探討。綜合言之，過去多數使用多項式對稱、組合公式、複雜的代數方法、或以電腦輔助搜尋，求取較高冪次的理想解，且僅侷限於有限數量的參數或數值的理想解求解方案。

因此，相對於前人的探討，本研究擬採用初級的數學理論、方法和公式，應用基本的集合性質、二項式公式、數學歸納法，探討等冪和理想解的求解問題與解存在的證明；並且，擬進一步延伸到探討求取一系列有理數或無理數等冪和問題理想解的方法，從而擴展到實數的等冪和問題研究。

研究展開時，首先針對以下問題探討：對於給定長度相等的兩條線段(這裡，限制線段的長度是正實數)，是否能輕易地找到一個方法，將其各分割為$\mathbf{n}\ (\mathbf{n} \in \mathbf{N})$，且$\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$條子線段，滿足

1. $\mathbf{2n}$條子線段的長度均互不相等。
2. 第一條和第二條線段的$\mathbf{n}$條子線段長度的冪次方$\mathbf{k}$、$\mathbf{k} \in \mathbf{N}$的和均相等。

在這裡，滿足條件 1 和條件 2 的線段分割方式，稱為：$\mathbf{k}$冪次方和相等的線段完美分割。

數學建模

設$\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_n}\ (\mathbf{a_i} \in \mathbf{R^+})$和$\mathbf{b_1, b_2, \dots, b_n}\ (\mathbf{b_i} \in \mathbf{R^+})$分別代表第一條和第二條線段的$\mathbf{n}\ (\mathbf{n} \geq \mathbf{2},\ \mathbf{n} \in \mathbf{N})$條子線段長度，並以$\mathbf{n}$元正實數集合$\mathbf{A_n} = \{\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_n}\}$和$\mathbf{B_n} = \{\mathbf{b_1, b_2, \dots, b_n}\}$表示，滿足

1. $\mathbf{a_i} \neq \mathbf{a_j}, \mathbf{b_i} \neq \mathbf{b_j}$，當$\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$，且$\mathbf{A_n} \cap \mathbf{B_n} = \emptyset$。
2. $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}^{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b_i}^{\mathbf{k}}$、$\mathbf{k} \in \mathbf{N}$。

類似對哈迪–拉馬努吉數的拆解，本研究擬從二元正整數集合$\mathbf{A_2} = \{\mathbf{a_1, a_2}\}$、$\mathbf{B_2} = \{\mathbf{b_1, b_2}\}$、$\sum_{i=1}^{2} \mathbf{a_i}^{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{b_i}^{\mathbf{k}}$、$\mathbf{k} = \mathbf{2}$或$\mathbf{3}$的平方和(面積)和立方和(體積)相等的測試實驗中開始，並經過分析與歸納後，發現它們存在一些有趣的現象以及關係，因此擬定了以下的研究目的。

貳、研究目的

本研究探尋建構一個簡易的方式，求解前述對於兩$\mathbf{n}$元正實數非空集合$\mathbf{A_n}$和$\mathbf{B_n}$、$\mathbf{A_n} \cap$

$\mathbf{B_n} = \emptyset$之冪次方和均相等的線段完美分割問題，並依序探討以下問題：

1. 於滿足條件$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}^3 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b_i}^3$時，$\mathbf{A_n}$和$\mathbf{B_n}$有何特殊關係存在?
2. 於滿足條件$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b_i}^2$時，$\mathbf{A_n}$和$\mathbf{B_n}$有何特殊關係存在?
3. 於滿足條件對$\mathbf{k = 0, 1, \cdots, m}$，$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}^k = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b_i}^k$成立，$\mathbf{A_n}$和$\mathbf{B_n}$有何特殊關係存在?
4. 於滿足條件對$\mathbf{k = 0, 1, \cdots, m}$，$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}^k = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b_i}^k$成立，$\mathbf{A_n}$和$\mathbf{B_n}$是否存在其他更為簡便的建構求解方式? 建構方式是否適用有理數及無理數?
5. 於滿足條件對$\mathbf{k = 1, 3, \cdots, 2t+1}$或對$\mathbf{k = 2, 4, \cdots, 2t}$，$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}^k = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b_i}^k$成立，$\mathbf{A_n}$和$\mathbf{B_n}$是否存在其他更為簡便的建構求解方式?

參、研究設備及器材

紙、筆、工程用計算機、筆記型電腦。

肆、 研究過程或方法

一、名詞及符號定義：

(一) $\mathbf{N}$：自然數。

(二) $\mathbf{R}$：實數；$\mathbf{R^+}$：正實數。

(三) $\mathbf{A_n}$：$\mathbf{n}$元正實數集合$\mathbf{A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}}$，且$\mathbf{i = 1, 2, \dots, n}$、$\mathbf{a_i \in R^+}$；或為$\mathbf{n}$元實數集合$\mathbf{A_n}$、$\mathbf{a_i \in R}$；或為$\mathbf{n}$元正整數集合$\mathbf{A_n}$、$\mathbf{a_i \in N}$。

(四) $\mathbf{B_n}$：$\mathbf{n}$元正實數集合$\mathbf{B_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}}$，且$\mathbf{i = 1, 2, \dots, n}$、$\mathbf{b_i \in R^+}$；或為$\mathbf{n}$元實數集合$\mathbf{B_n}$、$\mathbf{b_i \in R}$；或為$\mathbf{n}$元正整數集合$\mathbf{B_n}$、$\mathbf{b_i \in N}$。

(五) $\mathbf{rA_n}$：$\mathbf{rA_n = \{ra_1, ra_2, \dots, ra_n\}}$、$\mathbf{r \neq 0 \in R}$；同理，$\mathbf{rB_n = \{rb_1, rb_2, \dots, rb_n\}}$。

(六) $\mathbf{A_n + r}$：$\mathbf{A_n + r = \{a_1 + r, a_2 + r, \dots, a_n + r\}}$、$\mathbf{r \in R}$；同理，$\mathbf{B_n + r = \{b_1 + r, b_2 + r, \dots, b_n + r\}}$。

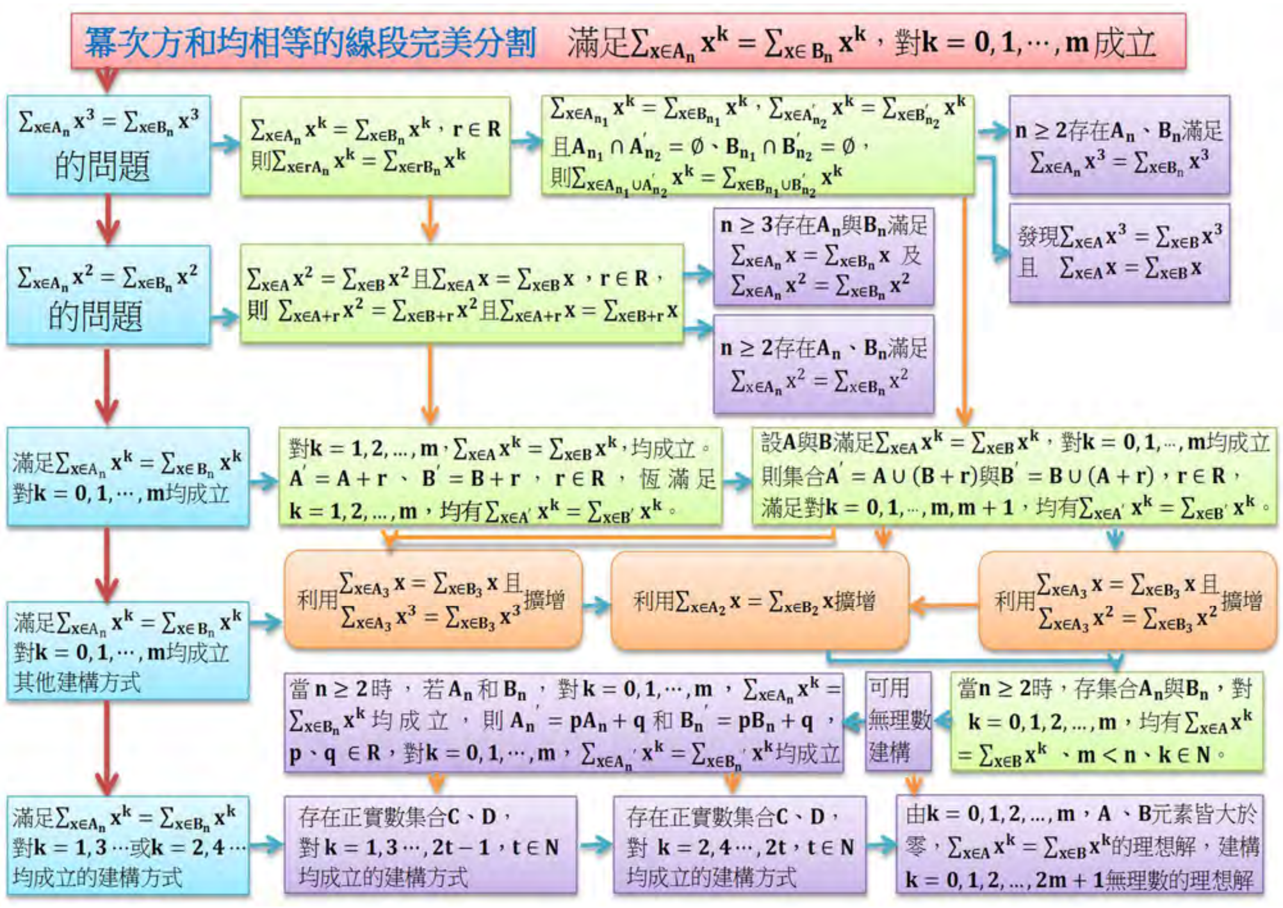
二、研究過程：

本研究的研究過程摘要說明如下：

1. 研究一：(1)發想自哈迪–拉馬努吉數從三次方；(2)窮舉找到兩組正整數集合$\mathbf{A_2}$和$\mathbf{B_2}$；(3)集合同乘一倍數時亦成立；(4)兩組滿足條件的集合聯集後仍會滿足條件；(5)代入消去法

找到A_3和B_3滿足條件，發現一次方和亦相等；(6)用前面的三個條件建構任意的A_n和B_n。

2. 研究二：(1)從二次方下手；(2)窮舉找到兩組正整數集合A_2和B_2；(3)代入消去法找A_3和B_3滿足條件，發現一次方和亦相等；(4)發現一、二次方和相等時，兩集合同減、同加一數時冪次方和亦相等。
3. 研究三：(1)建構 1 至m次方和均相等，因集合聯集平移操作後冪次方和相等，進一步發現兩集合平移操作後，聯集原來另一個集合，會使更高一冪次方和也相等；並用二項式定理公式證明；(2)用根與係數的關係，證明 1 至m次方和時，n的最小值；(3)用一次和二次方相等的結果進行集合元素的個數擴增。
4. 研究四：(1)建構 1 至m次方和均相等，用一次和三次方相等的結果進行集合的元素擴增；(2)發現只要一次方和相等的結果即可用於集合元素的個數擴增；(3)用有理數及無理數進行擴增；(4)因同乘倍數或同加/減一數平移操作，冪次方和相等的條件成立，故給出系列解通式。
5. 研究五：(1)平移操作至集合元素總和為 0，發現解特徵、奇次和偶次和的解；(2)適用無理數，利用解特徵倍數擴增找到理想解；(3)由系列解通式給出完美分割的通解。



研究一	於滿足條件$\sum_{i=1}^{n} a_i{}^3 = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^3$時，$A_n$和$B_n$有何特殊關係存在?

首先，類似哈迪–拉馬努吉數對 1729 的分解，對於兩個二元正整數集合A_2和B_2，窮舉列出$1^3, 2^3, 3^3, \ldots, 20^3$，很輕易地就可以找到兩組(僅為舉例，實際上可能還有其他的解答)<u>不相交</u>的二元正整數集合A_2和B_2、$A_2 \cap B_2 = \emptyset$：

$A_2 = \{2, 16\}, B_2 = \{9, 15\}$，$2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$ .... (1.1)

$A_2 = \{1, 12\}, B_2 = \{9, 10\}$，$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ .... (1.2)

此時，$a_1 + a_2 \neq b_1 + b_2$。令任意不為零的實數r，由$(2r)^3 + (16r)^3 = r^3(2^3 + 16^3) = (9r)^3 + (15r)^3 = r^3(9^3 + 15^3)$、$(1r)^3 + (12r)^3 = (9r)^3 + (10r)^3$，可得知$\sum_{i=1}^{2}(ra_i)^3 = \sum_{i=1}^{2}(rb_i)^3$的關係仍然滿足。

引理 1.1：設兩不相交的n元實數集合A_n和B_n、$A_n \cap B_n = \emptyset$，且滿足條件$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$，則對任意非零實數$r$，$rA_n$和$rB_n$也滿足條件$\sum_{i=1}^{n}(ra_i)^k = \sum_{i=1}^{n}(rb_i)^k$。

證明：顯然，因$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$，由$\sum_{i=1}^{n}(ra_i)^k = r^k\sum_{i=1}^{n} a_i^k = r^k\sum_{i=1}^{n} b_i^k = \sum_{i=1}^{n}(rb_i)^k$得證。

接著，利用$n = 2$二元正整數集合的實驗結果，推廣到$n = 3$的三元正整數集合求解的建構方式。將式(1.1)和式(1.2)中的9^3代入消去，合併成

$A_3 = \{2, 10, 16\}, B_3 = \{1, 12, 15\}$，$2^3 + 10^3 + 16^3 = 1^3 + 12^3 + 15^3$ .... (1.3)

另外，可以觀察到

$A_3 = \{3, 15, 19\}, B_3 = \{4, 13, 20\}$，$3^3 + 15^3 + 19^3 = 4^3 + 13^3 + 20^3$ .... (1.4)

檢查前述建構的A_2和B_2、A_3和B_3，發現它們可以滿足$A_n \cap B_n = \emptyset$和$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \sum_{i=1}^{n} b_i^3$的條件。進一步測試和觀察，可以發現若集合$A_{n_1}$和$B_{n_1}$、$A'_{n_2}$和$B'_{n_2}$分別滿足前述條件時，且$A_{n_1} \cap A'_{n_2} = \emptyset$、$B_{n_1} \cap B'_{n_2} = \emptyset$，則集合$A = A_{n_1} \cup A'_{n_2}$、$B = B_{n_1} \cup B'_{n_2}$亦滿足前述條件。

值得注意：式(1.3)和式(1.4)建構的A_3和B_3，可以滿足$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{3} b_i$的條件。

引理 1.2：(A.W. Goodman[4]) 設A_{n_1}和B_{n_1}為兩個不相交的n_1元實數集合，滿足條件$\sum_{x\in A_{n_1}} x^k = \sum_{x\in B_{n_1}} x^k$、$A'_{n_2}$和$B'_{n_2}$為兩個不相交的$n_2$元實數集合，滿足條件$\sum_{x\in A'_{n_2}} x^k = \sum_{x\in B'_{n_2}} x^k$，且$A_{n_1} \cap A'_{n_2} = \emptyset$、$B_{n_1} \cap B'_{n_2} = \emptyset$則$A = A_{n_1} \cup A'_{n_2}$、$B = B_{n_1} \cup B'_{n_2}$，亦滿足條件$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$。

證明：由$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n_1} \cup \mathbf{A}'_{n_2}$，知$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in A_{n_1}} x^k + \sum_{x\in A'_{n_2}} x^k$、$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n_1} \cup \mathbf{B}'_{n_2}$，知$\sum_{x\in B} x^k = \sum_{x\in B_{n_1}} x^k + \sum_{x\in B'_{n_2}} x^k$。又因為$\sum_{x\in A_{n_1}} x^k = \sum_{x\in B_{n_1}} x^k$、$\sum_{x\in A'_{n_2}} x^k = \sum_{x\in B'_{n_2}} x^k$，故$\sum_{x\in A} x^3 = \sum_{x\in B} x^3$得證。

值得注意：發現 1.2 並不保證$A \cap B = \emptyset$的條件仍然成立。

結論 1.1 當$n \geq 2$時，存在A、B為兩個不相交的n元正整數集合，且滿足條件$\sum_{x\in A} x^3 = \sum_{x\in B} x^3$。

證明：利用引理 1.1、引理 1.2，以及式(1.2)、式(1.4)，得到$A_2 = \{1, 12\}$、$B_2 = \{9, 10\}$、$A_3 = \{3, 15, 19\}$、$B_3 = \{4, 13, 20\}$。

選擇以下方式進行集合的擴展及建構：

1. 當$n = 2h$時，令

$$A_n = A_2 \cup 7A_2 \cup 7^2A_2 \cup \cdots\cdots \cup 7^{(h-1)}A_2$$

$$B_n = B_2 \cup 7B_2 \cup 7^2B_2 \cup \cdots\cdots \cup 7^{(h-1)}B_2$$

$$A_n = \{1, 12\} \cup \{7, 7\times 12\} \cup \{7^2, 7^2\times 12\} \cup \cdots\cdots \cup \left\{7^{(h-1)}, 7^{(h-1)}\times 12\right\}$$

$$B_n = \{9, 10\} \cup \{7\times 9, 7\times 10\} \cup \{7^2\times 9^2, 7^2\times 10\} \cup \cdots\cdots$$
$$\cup \left\{7^{(h-1)}\times 9, 7^{(h-1)}\times 10\right\}$$

2. 當$n = 2h + 1$時，令

$$A_n = A_2 \cup 7A_2 \cup 7^2A_2 \cup \cdots\cdots \cup 7^{(h-2)}A_2 \cup A_3$$

$$B_n = B_2 \cup 7B_2 \cup 7^2B_2 \cup \cdots\cdots \cup 7^{(h-2)}B_2 \cup B_3$$

$$A_n = \{1, 12\} \cup \{7, 7\times 12\} \cup \cdots\cdots \cup \left\{7^{(h-2)}, 7^{(h-2)}\times 12\right\} \cup \{3, 15, 19\}$$

$$B_n = \{9, 10\} \cup \{7\times 9, 7\times 10\} \cup \cdots\cdots \cup \left\{7^{(h-2)}\times 9, 7^{(h-2)}\times 10\right\} \cup \{4, 13, 20\}$$

故由此可得：$n \geq 2$時，存在A、B為兩個不相交的n元正整數集合，滿足$\sum_{x\in A} x^3 = \sum_{x\in B} x^3$。

此處，選擇r為7的冪次之倍數，係因為7與A_2、B_2、A_3、B_3集合中的任一元素的數值互質。此外，擴增n時，A_n亦可保留任意部分(或全部)，改利用B_2或B_3的集合加入擴展及建構；同理，對B_n集合的擴展及建構亦同。譬如，當$n = 2h$時，可令

$$A_n = A_2 \cup 7B_2 \cup 7^2A_2 \cup \cdots\cdots \cup 7^{(h-1)}B_2；\quad B_n = B_2 \cup 7A_2 \cup 7^2B_2 \cup \cdots\cdots \cup 7^{(h-1)}A_2。$$

研究二	於滿足條件$\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2$時，$A_n$和$B_n$有何特殊關係存在?

類似研究一的測試實驗，對於兩個二元正整數集合A_2和B_2，窮舉列出$1^2, 2^2, 3^2, \dots, 20^2$，很輕易地就可以找到其中三組不相交的二元正整數集合A_2和B_2、$A_2 \cap B_2 = \emptyset$：

$A_2 = \{3, 11\}, B_2 = \{7, 9\}$，$3^2 + 11^2 = 7^2 + 9^2$ .... (2.1)

$A_2 = \{1, 8\}, B_2 = \{4, 7\}$，$1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ .... (2.2)

$A_2 = \{2, 9\}, B_2 = \{6, 7\}$，$2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$ .... (2.3)

此時，$\sum_{i=1}^{2} a_i^1 \neq \sum_{i=1}^{2} b_i^1$、$\sum_{i=1}^{2} a_i^2 = \sum_{i=1}^{2} b_i^2$。

接著，利用$n = 2$二元正整數集合的實驗結果，推廣到$n = 3$的三元正整數集合求解的建構方式。將式(2.1)、式(2.2)和式(2.3)中的7^2代入消去，合併成

$A_3 = \{1, 8, 9\}, B_3 = \{3, 4, 11\}$，$1^2 + 8^2 + 9^2 = 3^2 + 4^2 + 11^2$ .... (2.4)

$A_3 = \{1, 8, 6\}, B_3 = \{2, 4, 9\}$，$1^2 + 8^2 + 6^2 = 2^2 + 4^2 + 9^2$ .... (2.5)

此時，$\sum_{i=1}^{3} a_i^1 = \sum_{i=1}^{3} b_i^1$、$\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = \sum_{i=1}^{3} b_i^2$。注意到：式(2.4)中$1 + 8 + 9 = 3 + 4 + 11 = 18$、式(2.5)中$1 + 8 + 6 = 2 + 4 + 9 = 15$，$\sum_{x \in A_3} x = \sum_{x \in B_3} x$且皆為$3$的倍數。

現在，採取適當的平移操作，使$\sum_{x \in A_3} x = \sum_{x \in B_3} x = 0$。

以$A_3 = \{1, 8, 9\}$、$B_3 = \{3, 4, 11\}$為例，令$A'_3 = A_3 - 6 = \{1, 8, 9\} - 6 = \{-5, 2, 3\}$、$B'_3 = B_3 - 6 = \{3, 4, 11\} - 6 = \{-3, -2, 5\}$，則$A'_3$和$B'_3$兩個三元實數集合滿足互不相交$A'_3 \cap B'_3 = \emptyset$、$\sum_{x \in A'_3} x = \sum_{x \in B'_3} x$、和$\sum_{x \in A'_3} x^2 = \sum_{x \in B'_3} x^2$。

值得注意：對於$n = 3$的三元實數集合，前述的建構是一個完全滿足命題條件的例子。

引理 2.1：(陳漱文[2]) 設兩不相交的n元實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且滿足條件對$k = 1, 2, \dots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$成立。則對於集合$A' = A + r$、$B' = B + r$、$r \in R$，當$k = 1, 2, \dots, m$，滿足$\sum_{x \in A'} x^k = \sum_{x \in B'} x^k$。

證明：若有兩n元實數集合$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$和$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$，對$k = 1, 2, \dots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$成立。展開

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + r)^k$$
$$= C_0^k \sum_{i=1}^{n} a_i{}^k + C_1^k r \sum_{i=1}^{n} a_i{}^{k-1} + C_2^k r^2 \sum_{i=1}^{n} a_i{}^{k-2} + \cdots + C_{k-1}^k r^{k-1} \sum_{i=1}^{n} a_i + C_k^k r^k$$
$$= C_0^k \sum_{i=1}^{n} b_i{}^k + C_1^k r \sum_{i=1}^{n} b_i{}^{k-1} + C_2^k r^2 \sum_{i=1}^{n} b_i{}^{k-2} + \cdots + C_{k-1}^k r^{k-1} \sum_{i=1}^{n} b_i + C_k^k r^k$$

$= \sum_{i=1}^{n}(b_i + r)^k$

則，對於集合$A' = A + r$、$B' = B + r$，$r \in R$，當$k = 1, 2, \dots, m$，均有$\sum_{x\in A'} x^k = \sum_{x\in B'} x^k$，故得證。

從研究一至前述的探討及測試實驗，令人好奇對於兩個不相交的三元正整數集合A_3和B_3，可以找到滿足$\sum_{x\in A_3} x = \sum_{x\in B_3} x$和$\sum_{x\in A_3} x^2 = \sum_{x\in B_3} x^2$條件的建構結果；然而，當$n = 2$時，是否也存在兩個不相交的二元正整數集合$A_2$和$B_2$，可以滿足這種關係?

引理 2.2： 不存在兩個不相交的二元實數集合A_2和B_2，可以同時滿足$\sum_{x\in A_2} x = \sum_{x\in B_2} x$和$\sum_{x\in A_2} x^2 = \sum_{x\in B_2} x^2$。

證明:設$A_2 = \{a_1, a_2\}$、$B_2 = \{b_1, b_2\}$，令$a_1 + a_2 = b_1 + b_2$、$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$。因$A_2 \cap B_2 = \emptyset$，不妨令$b_2 > a_2 > a_1 > b_1 > 0$、$a_1 - b_1 = y$，$a_2 - a_1 = x$，且$x, y > 0$，則$a_1 = b_1 + y$、$a_2 = b_1 + y + x$、$b_2 = b_1 + 2y + x$。

整理${a_1}^2 + {a_2}^2 = (b_1 + y)^2 + (b_1 + y + x)^2$、${b_1}^2 + {b_2}^2 = {b_1}^2 + (b_1 + 2y + x)^2$，又由條件得知$(b_1 + y)^2 + (b_1 + y + x)^2 = {b_1}^2 + (b_1 + 2y + x)^2$。

化簡後，推得$y^2 + yx = 0$。但因為$x, y > 0$，故知等號不成立，矛盾，因此得證。

定理 2.1： (A.W. Goodman[4]) 當$n \geq 3$時，存在A、B為兩個不相交的n元正整數集合，且滿足條件$\sum_{x\in A} x = \sum_{x\in B} x$、$\sum_{x\in A} x^2 = \sum_{x\in B} x^2$。

證明：由引理 2.2 得知，$n = 2$時，不存在該兩不相交的實數集合。

當$n \geq 3$時，利用引理 2.1，$k = 1, 2$時的平移操作結果，建構如下兩不相交的n元整數集合A_n和B_n、$A_n \cap B_n = \emptyset$：

$A_n = \{-1, -2, \dots, -(n-1), n(n-1)/2\}$、和

$B_n = \{1, 2, \dots, (n-1), -n(n-1)/2\}$，

滿足$\sum_{x\in A_n} x = \sum_{x\in B_n} x$、$\sum_{x\in A_n} x^2 = \sum_{x\in B_n} x^2$。此時令

${A_n}' = A_n + n(n-1)/2 + 1$、和

${B_n}' = B_n + n(n-1)/2 + 1$，

則經過此適當的平移操作後，${A_n}'$和${B_n}'$為兩不相交的n元正整數集合，並且滿足$\sum_{x\in A_n'} x = \sum_{x\in B_n'} x$、$\sum_{x\in A_n'} x^2 = \sum_{x\in B_n'} x^2$，得證。

結論 2.1 當$n \geq 2$時，存在A、B為兩個不相交的n元正整數集合，且滿足條件$\sum_{x\in A} x^2 = \sum_{x\in B} x^2$。

證明：當$n = 2$時，存在兩個不相交的二元正整數集合A_2和B_2，可被建構為：$\{3,11\}$和$\{7,9\}$、$\{1,8\}$和$\{4,7\}$、$\{2,9\}$和$\{6,7\}$等。

當$n \geq 3$時，由定理 2.1 得證。

研究三	於滿足條件對$k = 0,1,\cdots,m$，$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,k} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,k}$成立，$A_n$和$B_n$有何特殊關係存在?

擴增方法一： 利用$\sum_{x\in A_3} x = \sum_{x\in B_3} x$、$\sum_{x\in A_3} x^2 = \sum_{x\in B_3} x^2$。

在$k = 2$，$n \geq 3$時，利用引理 2.1 建構A_4和B_4時，若採用A_3和B_3為基礎的集合進行適當的平移操作，然後再剔除發生重複部分的元素，則可以看到一些有趣的現象，例如：

設$A_3 = \{1,8,9\}$、$B_3 = \{3,4,11\}$，檢查得知$1+8+9 = 3+4+11$、$1^2+8^2+9^2 = 3^2+4^2+11^2$。此時，$\sum_{x\in A_3} x = \sum_{x\in B_3} x$、$\sum_{x\in A_3} x^2 = \sum_{x\in B_3} x^2$。

現在進行平移操作，$(A_3+1) = \{2,9,10\}$、$(B_3+1) = \{4,5,12\}$。

根據引理 2.1，知$\sum_{(A_3+1)} x = \sum_{x\in(B_3+1)} x$、$\sum_{x\in(A_3+1)} x^2 = \sum_{x\in(B_3+1)} x^2$。建構如下的集合元素個數的擴增方式：$A_3 \cup (B_3+1) = \{1,8,9,4,5,12\}$、$B_3 \cup (A_3+1) = \{3,4,11,2,9,10\}$。

根據引理 1.2，知$\sum_{A_3\cup(B_3+1)} x = \sum_{x\in B_3\cup(A_3+1)} x$、$\sum_{x\in A_3\cup(B_3+1)} x^2 = \sum_{x\in B_3\cup(A_3+1)} x^2$。接著，剔除發生重複部分的元素，進行以下的操作：$A_4 = A_3 \cup (B_3+1) - \{4,9\} = \{1,5,8,12\}$、$B_4 = B_3 \cup (A_3+1) - \{4,9\} = \{2,3,10,11\}$。

進行條件滿足的檢驗：

$$A_4 \cap B_4 = \emptyset$$

$$1+5+8+12 = 2+3+10+11$$

$$1^2+5^2+8^2+12^2 = 2^2+3^2+10^2+11^2$$

$$1^3+5^3+8^3+12^3 = 2^3+3^3+10^3+11^3$$

此時，$\sum_{x\in A_4} x = \sum_{x\in B_4} x$、$\sum_{x\in A_4} x^2 = \sum_{x\in B_4} x^2$，並且，很輕易地$\sum_{x\in A_4} x^3 = \sum_{x\in B_4} x^3$也自動滿足，於是完成了$A_4$和$B_4$的 1 至 3 次冪方和均相等的線段完美分割建構方式求解。

定理 3.1：設兩不相交的n元實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且滿足條件對$k = 1, 2, \ldots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$成立。則對於集合$A' = A \cup (B + r)$、$B' = B \cup (A + r)$、$r \in R$，當$k = 1, 2, \ldots, m, m + 1$，亦滿足$\sum_{x \in A'} x^k = \sum_{x \in B'} x^k$。

證明：若有兩個n元實數集合$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$和$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，對$k = 1, 2, \ldots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$成立。

當$k = 1, 2, \ldots, m$時：根據引理 2.1 和引理 1.2，可得知$k = 1, 2, \ldots, m$，$\sum_{x \in A'} x^k = \sum_{x \in B'} x^k$成立。

當$k = m + 1$時：

$$
\begin{aligned}
\sum_{x \in A'} x^{m+1} &= \sum_{x \in A} x^{m+1} + \sum_{x \in B} (x + r)^{m+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} {a_i}^{m+1} + \sum_{i=1}^{n} (b_i + r)^{m+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} {a_i}^{m+1} + C_0^{m+1} \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{m+1} + C_1^{m+1} r \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{m} + C_2^{m+1} r^2 \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{m-1} \\
&\qquad + \cdots + C_m^{m+1} r^m \sum_{i=1}^{n} b_i + C_{m+1}^{m+1} r^{m+1} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= C_0^{m+1} \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{m+1} + \sum_{i=1}^{n} {a_i}^{m+1} + C_1^{m+1} r \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{m} + C_2^{m+1} r^2 \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{m-1} \\
&\qquad + \cdots + C_m^{m+1} r^m \sum_{i=1}^{n} b_i + C_{m+1}^{m+1} r^{m+1} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{m+1} + C_0^{m+1} \sum_{i=1}^{n} {a_i}^{m+1} + C_1^{m+1} r \sum_{i=1}^{n} {a_i}^{m} + C_2^{m+1} r^2 \sum_{i=1}^{n} {a_i}^{m-1} \\
&\qquad + \cdots + C_m^{m+1} r^m \sum_{i=1}^{n} a_i + C_{m+1}^{m+1} r^{m+1} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} {b_i}^{m+1} + \sum_{i=1}^{n} (a_i + r)^{m+1} \\
&= \sum_{x \in B} x^{m+1} + \sum_{x \in A} (x + r)^{m+1} \\
&= \sum_{x \in B'} x^{m+1}
\end{aligned}
$$

故得證：當$k = m + 1$時，$\sum_{x \in A'} x^k = \sum_{x \in B'} x^k$亦成立。

應用定理 3.1 的結果，我們可選擇適當的r平移A和B，讓A'和B'有若干個共同的元素，再移除其中的共同元素，透過此方法建構的集合A'和B'，相對於原來的集合A和B而言，其高一冪次方的和也會相等。

觀察 1：若兩不相交的n元正實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且$k = 1, 2, \ldots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$成立，則利用定理 3.1 的方法擴增集合元素的個數，其建構後的集合元素個數範圍在$2n$至$m + 1$之間。

例如：$\mathbf{A_3=\{1,8,9\}}$和$\mathbf{B_3=\{3,4,11\}}$，此時$\sum_{x\in A_3}x=\sum_{x\in B_3}x$、$\sum_{x\in A_4}x^2=\sum_{x\in B_4}x^2$。利用定理 3.1 的方法擴增，則聯集平移$\mathbf{r=1,2,3,\cdots}$的情形如下：

$$A_4=A_3\cup(B_3+1)-\{4,9\}=\{1,5,8,12\}$$

$$B_4=B_3\cup(A_3+1)-\{4,9\}=\{2,3,10,11\}$$

$$A=A_3\cup(B_3+2)=\{1,5,6,8,9,12,13\}$$

$$B=B_3\cup(A_3+2)=\{3,3,4,10,11,11\}$$ ......集合中有元素重複不合

$$A=A_3\cup(B_3+3)=\{1,5,6,7,9,13\}$$

$$B=B_3\cup(A_3+3)=\{3,4,4,11,13,14\}$$ ......集合中有元素重複不合

$$A=A_3\cup(B_3+4)=\{1,7,8,8,9,15\}$$ ......集合中有元素重複不合

$$B=B_3\cup(A_3+4)=\{3,4,5,11,12,13\}$$

$$A=A_3\cup(B_3+5)=\{1,8,8,9,9,16\}$$ ......集合中有元素重複不合

$$B=B_3\cup(A_3+5)=\{3,4,6,11,13,14\}$$

$$A=A_3\cup(B_3+6)=\{1,8,8,9,10,17\}$$ ......集合中有元素重複不合

$$B=B_3\cup(A_3+6)=\{3,4,7,11,14,15\}$$

$$A_4=A_3\cup(B_3+7)-\{11,8\}=\{1,9,10,18\}$$

$$B_4=B_3\cup(A_3+7)-\{11,8\}=\{3,4,15,16\}$$

$$A_4=A_3\cup(B_3+8)-\{9,11\}=\{1,8,12,19\}$$

$$B_4=B_3\cup(A_3+8)-\{9,11\}=\{3,4,16,17\}$$

$$A_6=A_3\cup(B_3+9)=\{1,8,9,12,13,20\}$$

$$B_6=B_3\cup(A_3+9)=\{3,4,10,11,17,18\}$$

在上面的建構例子中，部分的情況是建構後的集合中有元素重複，所以不合。可以被成功建構的情形只有四個，其中有三個情形在建構後的兩集合元素個數各為$\mathbf{m+1=4}$個。我們

可以觀察到，當$\mathbf{r=9}$或$\mathbf{r=11}$以上時，雖然存在可以被成功建構符合條件的集合，但其個別集合元素的個數將為$\mathbf{2n=6}$個。我們亦可從所建構集合的元素間數值差異情況作出簡單的觀察，以$\mathbf{A_3=\{1,8,9\}}$、$\mathbf{B_3=\{3,4,11\}}$的擴增集合為例，$\mathbf{A_3}$的元素間數值差異分別為 8、7、1；$\mathbf{B_3}$的亦同，恰好差異相同的數值各有 2 個，因此當平移 8、7、1 時，擴增後集合的元素個數分別有$\mathbf{2n-2=4}$個元素。

$\mathbf{A_3}$	1	8	9
9	8	1	
8	7		
1			

$\mathbf{B_3}$	3	4	11
11	8	7	
4	1		
3			

引理 3.1：$\mathbf{A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}}$、$\mathbf{B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}}$，已知 $\sum_{x\in A}x^k=\sum_{x\in B}x^k$，$\mathbf{k=1,\ldots,m}$，且 $\mathbf{n\le m}$，則$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=c_1$、$\sum_{i\neq j}a_i\,a_j=\sum_{i\neq j}b_i\,b_j=c_2$、$\sum_{i\neq j\neq k}a_i\,a_ja_k=\sum_{i\neq j\neq k}b_i\,b_jb_k=c_3$、…、$\sum a_1a_2\ldots a_n=\sum b_1b_2\ldots b_n=c_n$，且$c_i$、$\mathbf{i=1,\cdots,n}$為常數。

證明：設$\sum_{i=1}^{n}a_i^r=S_r$，$\prod_{r=1}^{n}(x-a_r)=\sum_{r=0}^{n}c_{n-r}x^r$，即是$c_1=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$c_2=\sum_{i\neq j}a_i\,a_j$，$c_3=\sum_{i\neq j\neq k}a_i\,a_ja_k$，…。由

$$c_1=\sum_{i=1}^{n}a_i=S_1$$

$$c_2=\sum_{i\neq j}a_i\,a_j=\left[\frac{(-S_1)^2}{1^2\times2!}+\frac{(-S_2)^1}{2^1\times1!}\right]$$

$$c_3=\sum_{i\neq j\neq k}a_i\,a_ja_k=-\left[\frac{(-S_1)^3}{1^3\times3!}+\frac{(-S_1)^1}{1^1\times1!}\times\frac{(-S_2)^1}{2^1\times1!}+\frac{(-S_3)^1}{3^1\times1!}\right]$$

$$\vdots$$

由數學歸納法得：

$$c_k=(-1)^k\sum_{\sum i\times r_i=k}\prod_{i=1}^{k}\frac{(-S_i)^{r_i}}{(i)^{r_i}\times(r_i!)}$$

其中 r_i 為對應 i 的變數。以c_4為例，$\sum i\times r_i=4$的情形有：

(1×4)，$(1\times2+2\times1)$，(2×2)，$(1\times1+3\times1)$，(4×1)共五種

$$c_4=\left[\frac{(-S_1)^4}{1^4\times4!}+\frac{(-S_1)^2}{1^2\times2!}\times\frac{(-S_2)^1}{2^1\times1!}+\frac{(-S_2)^2}{2^2\times2!}+\frac{(-S_1)^1}{1^1\times1!}\times\frac{(-S_3)^1}{3^1\times1!}+\frac{(-S_4)^1}{4^1\times1!}\right]$$

因S_r、$\mathbf{r=1,\cdots,m}$皆為定值、且$\mathbf{n\le m}$，故可知c_i、$\mathbf{i=1,\cdots,n}$時皆為定值。

則$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = c_1$、$\sum_{i\neq j} a_i a_j = \sum_{i\neq j} b_i b_j = c_2$、$\sum_{i\neq j\neq k} a_i a_j a_k = \sum_{i\neq j\neq k} b_i b_j b_k = c_3$、⋯、$\sum a_1 a_2 \dots a_n = \sum b_1 b_2 \dots b_n = c_n$得證。

定理 3.2 (Ajai Choudhry[1]) (陳漱文[2]) (Ajai Choudhry[3]) 當$n \geq 2$時，存在兩個不相交的n元正實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，滿足條件$k = 0,1,2,\dots,m$時，均有$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$，則$m < n$、$k \in N$。

證明： 可轉化證明實數集合A，$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，$i \neq j$時、$a_i \neq a_j$，對$k = 0,1,2,\dots,n$，$\sum_{x\in A} x^k = t_k$只有一解，故不存在另一集合$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$，也滿足$\sum_{x\in B} x^k = t_k$。故$m < n$。

(1) 反證 $m = n$：設有兩組相異解$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$、$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$且$a_i \neq b_j$，對任意$1 \leq i \leq j \leq n$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = c_1$、$\sum_{i\neq j} a_i a_j = \sum_{i\neq j} b_i b_j = c_2$、$\sum_{i\neq j\neq k} a_i a_j a_k = \sum_{i\neq j\neq k} b_i b_j b_k = c_3$、⋯、$a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_n = c_n$。對任意由引理 3.1 知$c_i$是常數、$i = 1,2,\dots,n$，故由根與係數關係，知$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) = (x - b_1)(x - b_2)\cdots(x - b_n) = 0$。所以共有$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$，即$2n$個解，但$n$次實係數方程式只有$n$個解，所以矛盾。

(2) 當$m > n$時：令$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_m = 1$，則$\sum_{i=1}^{m} a_i^r = \sum_{i=1}^{m} b_i^r = t_r + m - n$，$1 \leq r \leq m$，則此時有集合$A'$、$B'$，$A' = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$、$B' = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$，則同$m = n$的證明，可證得$m$次方程式只有$m$個解。

(3) 綜合**(1)**、**(2)**，故當$k = 0,1,2,\dots,m$時，均有$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$，僅有一解；當$m > n$時不存在不相交的$n$元正實數集合$A$和$B$。

因此，給出如下的定義：若經過某次建構產生的集合，符合命題的條件，亦即「若兩不相交的n元正實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且$k = 1,2,\dots,m$，$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$成立。」的命題成立，且其個別集合的元素個數恰等於$m + 1$時，稱之為「**理想解(Ideal Solution)**」(陳漱文[2])。

基於此原則，繼續測試並擴增，建構A和B：我們得到以下的例子：

1. $n = 5$的情況：

$$A_5 = A_4 \cup (B_4 + 7) - \{8, 10, 12\} = \{1, 5, 9, 17, 18\}$$

$$B_5 = B_4 \cup (A_4 + 7) - \{8, 10, 12\} = \{2, 3, 11, 15, 19\}$$

此時理想解集合$\mathbf{A_5}$和$\mathbf{B_5}$，對$\mathbf{k=0,1,\cdots,4}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_5}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_5}}\mathbf{x^k}$成立。

2. $\mathbf{n=6}$的情況：

$$\mathbf{A_6=A_5\cup(B_5+4)-\{5,9,15,19\}=\{1,6,7,17,18,23\}}$$

$$\mathbf{B_6=B_5\cup(A_5+4)-\{5,9,15,19\}=\{2,3,11,13,21,22\}}$$

此時理想解集合$\mathbf{A_6}$和$\mathbf{B_6}$，對$\mathbf{k=0,1,\cdots,5}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_6}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_6}}\mathbf{x^k}$成立。

3. $\mathbf{n=7}$的情況：此例由理想解集合$\mathbf{A_6}$和$\mathbf{B_6}$，無法找到集合$\mathbf{A_7}$和$\mathbf{B_7}$。

4. $\mathbf{n=8}$的情況：

$$\mathbf{A_8=A_6\cup(B_6+11)-\{13,17,18,22\}=\{1,6,7,14,23,24,32,33\}}$$

$$\mathbf{B_8=B_6\cup(A_6+11)-\{13,17,18,22\}=\{2,3,11,12,21,28,29,34\}}$$

此時集合$\mathbf{A_8}$和$\mathbf{B_8}$，對$\mathbf{k=0,1,\cdots,6}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_8}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_8}}\mathbf{x^k}$成立。

5. $\mathbf{n=9}$的情況：此例由集合$\mathbf{A_8}$和$\mathbf{B_8}$，無法找到集合$\mathbf{A_9}$和$\mathbf{B_9}$。

6. $\mathbf{n=10}$的情況：

$$\mathbf{A_{10}=A_8\cup(B_8+9)-\{11,12,21,23,32,33\}=\{1,6,7,14,20,24,30,37,38,43\}}$$

$$\mathbf{B_{10}=B_8\cup(A_8+9)-\{11,12,21,23,32,33\}=\{2,3,10,15,16,28,29,34,41,42\}}$$

此時集合$\mathbf{A_{10}}$和$\mathbf{B_{10}}$，對$\mathbf{k=0,1,\cdots,7}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_{10}}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_{10}}}\mathbf{x^k}$成立。

顯然，對於這樣的結果，並不令人滿意；因此，是否可以找到一個建構方式，使得經過每次的建構，兩集合個別的元素個數皆僅增加一個，且其高一冪次方的和相等的條件仍可以被滿足?

以下重新擬定一些建構的初始集合，並開始進行擴增元素個數展開建構，因而觀察到一些有趣的關係。

利用引理 **2.1**，$\mathbf{k=1,2}$時可平移的結果進行建構，令初始的集合為$\mathbf{A_0=\{1,2,-3\}}$、$\mathbf{B_0=\{-1,-2,3\}}$，顯然$\mathbf{k=0,1,2}$，等式$\sum_{\mathbf{x\in A_0}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_0}}\mathbf{x^k}$成立。

進行平移操作，得到

$$\mathbf{A_3=A_0+4=\{1,5,6\}}$$

$$\mathbf{B_3=B_0+4=\{2,3,7\}}$$

再利用定理 **3.1** 擴增集合的元素個數，得到：

$$\mathbf{A_4=A_3\cup(B_3+5)-\{6,7\}=\{1,5,8,12\}}$$

$\mathbf{B_4 = B_3 \cup (A_3 + 5) - \{6,7\} = \{2,3,10,11\}}$

此時，理想解集合$\mathbf{A_4}$和$\mathbf{B_4}$，對$\mathbf{k = 0,1,\cdots,3}$，$\sum_{x\in A_4} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B_4} \mathbf{x^k}$成立。

同理，依序類推，可得到：

$\mathbf{A_5 = A_4 \cup (B_4 + 7) - \{8,10,12\} = \{1,5,9,17,18\}}$

$\mathbf{B_5 = B_4 \cup (A_4 + 7) - \{8,10,12\} = \{2,3,11,15,19\}}$

理想解集合$\mathbf{A_5}$和$\mathbf{B_5}$，對$\mathbf{k = 0,1,\cdots,4}$，$\sum_{x\in A_5} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B_5} \mathbf{x^k}$成立。

$\mathbf{A_6 = A_5 \cup (B_5 + 8) - \{9,11,17,19\} = \{1,5,10,18,23,27\}}$

$\mathbf{B_6 = B_5 \cup (A_5 + 8) - \{9,11,17,19\} = \{2,3,13,15,25,26\}}$

理想解集合$\mathbf{A_6}$和$\mathbf{B_6}$，對$\mathbf{k = 0,1,\cdots,5}$，$\sum_{x\in A_6} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B_6} \mathbf{x^k}$成立。

$\mathbf{A_8 = A_6 \cup (B_6 + 13) - \{15,18,23,26\} = \{1,5,10,16,27,28,38,39\}}$

$\mathbf{B_8 = B_6 \cup (A_6 + 13) - \{15,18,23,26\} = \{2,3,13,14,25,31,36,40\}}$

集合$\mathbf{A_8}$和$\mathbf{B_8}$，對$\mathbf{k = 0,1,\cdots,6}$，$\sum_{x\in A_8} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B_8} \mathbf{x^k}$成立。

當$\mathbf{k = 0,1,\dots,6}$，依舊找不到集合$\mathbf{A_7}$和$\mathbf{B_7}$滿足$\sum_{x\in A_7} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B_7} \mathbf{x^k}$，如果繼續擴增建構，則發現：

$\mathbf{A_8{}' = A_8 \cup (B_8 + 11) - \{13,14,16,25,27,36,38,39\} = \{1,5,10,24,28,42,47,51\}}$

$\mathbf{B_8{}' = B_8 \cup (A_8 + 11) - \{13,14,16,25,27,36,38,39\} = \{2,3,12,21,31,40,49,50\}}$

此時，理想解集合$\mathbf{A_8{}'}$和$\mathbf{B_8{}'}$，對$\mathbf{k = 0,1,\cdots,7}$，$\sum_{x\in A_8{}'} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B_8{}'} \mathbf{x^k}$成立。

綜合以上的探討可知，若在前幾次的集合元素個數擴增時，若求得的兩個解集合非理想解，則再繼續進行擴增集合的元素個數時，其兩個集合的個別元素個數未必一定會增加。

結論 3.1 當$\mathbf{n \geq 5}$時，存在$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$為兩個不相交的$\mathbf{n}$元正整數集合，對$\mathbf{k = 0,1,\cdots,4}$，$\sum_{x\in A} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B} \mathbf{x^k}$成立。

證明：利用引理 **2.1** 及定理 **3.1** 及$\mathbf{A_4 = \{1,5,8,12\}}$，$\mathbf{B_4 = \{2,3,10,11\}}$，$\mathbf{k = 0,1,\cdots,3}$，$\sum_{x\in A} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B} \mathbf{x^k}$成立的結果，可得到以下對$\mathbf{k = 0,1,\cdots,4}$，$\sum_{x\in A} \mathbf{x^k} = \sum_{x\in B} \mathbf{x^k}$成立的$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$為兩個不相交的$\mathbf{n}$元正整數集合。

$\mathbf{A_5 = A_4 \cup (B_4 + 7) - \{8,10,12\} = \{1,5,9,17,18\}}$

$\mathbf{B_5 = B_4 \cup (A_4 + 7) - \{8,10,12\} = \{2,3,11,15,19\}}$

$\mathbf{A_6 = A_4 \cup (B_4 + 8) - \{9,11\} = \{1,5,8,12,18,19\}}$

$B_6 = B_4 \cup (A_4 + 8) - \{9, 11\} = \{2, 3, 9, 13, 16, 20\}$

$A_7 = A_4 \cup (B_4 + 11) - \{12\} = \{1, 5, 8, 13, 14, 21, 22\}$

$B_7 = B_4 \cup (A_4 + 11) - \{12\} = \{2, 3, 10, 11, 16, 19, 23\}$

$A_8 = A_4 \cup (B_4 + 12) = \{1, 5, 8, 12, 14, 15, 22, 23\}$

$B_8 = B_4 \cup (A_4 + 12) = \{2, 3, 10, 11, 13, 17, 20, 24\}$

當$n = 9$時，再利用引理 1.2

$A_9 = A_5 \cup (A_5 + 18) - \{19\} = \{1, 5, 9, 17, 18, 23, 27, 35, 36\}$

$B_9 = B_5 \cup (B_5 + 18) - \{19\} = \{2, 3, 11, 15, 20, 21, 29, 33, 37\}$

當$n \geq 10$時，再利用引理 1.2，由$A_{n+5} = A_n \cup (A_5 + r)$、$B_{n+5} = B_n \cup (B_5 + r)$，其中，$r = \max\{A_n \cup B_n\}$，即得$n \geq 5$成立。

研究四	於滿足條件對$k = 0, 1, \cdots, m$，$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,k} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,k}$成立，$A_n$和$B_n$是否存在其他更為簡便的建構求解方式? 建構方式是否適用有理數及無理數?

擴增方法二： 利用$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$和$\sum_{x \in A} x^3 = \sum_{x \in B} x^3$。

在研究一的探討中發現，對於$n = 3$的情形，在$\{2, 10, 16\}$和$\{1, 12, 15\}$，有

$$2^3 + 10^3 + 16^3 = 1^3 + 12^3 + 15^3 \quad \text{......................................(1.3)}$$

在$\{3, 15, 19\}$和$\{4, 13, 20\}$，有

$$3^3 + 15^3 + 19^3 = 4^3 + 15^3 + 20^3 \quad \text{......................................(1.4)}$$

其中，等式$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$和$\sum_{x \in A} x^3 = \sum_{x \in B} x^3$成立。

當$n = 2$時，等式$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$和$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \sum_{i=1}^{n} b_i^3$成立的情況又會是如何?

定理 4.1： 不存在兩個不相交的二元實數集合A_2和B_2，可以同時滿足$\sum_{x \in A_2} x = \sum_{x \in B_2} x$和$\sum_{x \in A_2} x^3 = \sum_{x \in B_2} x^3$。

證明：設$A_2 = \{a_1, a_2\}$、$B_2 = \{b_1, b_2\}$，令$a_1 + a_2 = b_1 + b_2$、$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$。因$A_2 \cap B_2 = \emptyset$，不妨令$b_2 > a_2 > a_1 > b_1 > 0$、$a_1 - b_1 = y$，$a_2 - a_1 = x$，且$x, y > 0$，則$a_1 = b_1 + y$、$a_2 = b_1 + y + x$、$b_2 = b_1 + 2y + x$。

整理$a_1{}^3+a_2{}^3=(b_1+y)^3+(b_1+y+x)^3$、$b_1{}^3+b_2{}^3=b_1{}^3+(b_1+2y+x)^3$，又由條件得知$(b_1+y)^3+(b_1+y+x)^3=b_1{}^3+(b_1+2y+x)^3$。

化簡後，推得$6y^2+6b_1y+3x^2+6b_1x+9yx=0$。但因為$x,y>0$，故知等號不成立，矛盾，因此得證。

$n=3$時，利用定理 3.1 建構A_4和B_4時，若採用A_3和B_3為初始集合進行建構，則當剔除重複的元素後，會發現滿足$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$且$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$但$\sum_{i=1}^{n}a_i^3\neq\sum_{i=1}^{n}b_i^3$，。

以下是等式$\sum_{x\in A}x=\sum_{x\in B}x$和$\sum_{x\in A}x^3=\sum_{x\in B}x^3$成立的一種建構方式：

$A_3=\{2,10,16\}$、$B_3=\{1,12,15\}$

利用定理 3.1 擴增集合的元素個數：

$A_4=A_3\cup(B_3+14)-\{15,16\}=\{2,10,26,29\}$

$B_4=B_3\cup(A_3+14)-\{15,16\}=\{1,12,24,30\}$....................................(4.1)

此時，集合A_4和B_4，對$k=0,1,2$，$\sum_{x\in A_4}x^k=\sum_{x\in B_4}x^k$成立。

以下是等式$\sum_{x\in A}x=\sum_{x\in B}x$和$\sum_{x\in A}x^3=\sum_{x\in B}x^3$成立的另一種建構方式：

$A_3'=\{3,15,19\}$、$B_3'=\{4,13,20\}$

利用定理 3.1 擴增集合的元素個數：

$A_4'=A_3'\cup(B_3'+16)-\{19,20\}=\{3,15,29,36\}$

$B_4'=B_3'\cup(A_3'+16)-\{19,20\}=\{4,13,31,35\}$.................................(4.2)

此時，集合A_4和B_4，對$k=0,1,2$，$\sum_{x\in A_4}x^k=\sum_{x\in B_4}x^k$均成立。

檢驗A_3'、B_3'平移後$\sum_{x\in A_3'-3}x^3\neq\sum_{x\in B_3'-3}x^3$，故可知，(4.1)與(4.2)平方和會成立與立方和相等並無關係，真正關鍵的原因在於集合A_3和B_3、A_3'和B_3'的一次方和相等。利用定理 3.1，即可證明擴增後的集合A_4和B_4、A_4'和B_4'的平方和也會相等，但立方和相等的性質消失了。若再往下擴充並觀察：

$A_7'=A_4'\cup(B_4'+16)-\{35\}=\{3,8,15,17,29,36,39\}$

$B_7'=B_4'\cup(A_4'+16)-\{35\}=\{4,7,13,19,31,33,40\}$........................ (4.3)

此時，集合A_7'和B_7'，對$k=0,1,2,3$，$\sum_{x\in A_4}x^k=\sum_{x\in B_4}x^k$均成立。

綜合以上的討論，可以得到更為簡便的方式，進行符合冪次方和均相等的線段完美分割方式的簡易建構方法：

擴增方法三：

當 $\mathbf{n=1}$ 時，因為要求兩個不相交的 $\mathbf{n}$ 元正整數集合 $\mathbf{A_n=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}}$ 和 $\mathbf{B_n=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}}$，故不存在。

當 $\mathbf{n=2}$ 時，找出相異四數使得其中兩數的和等於另兩數的和，如令初始理想解的集合 $\mathbf{A_2=\{3,6\}}$、$\mathbf{B_2=\{2,7\}}$，顯然，當 $\mathbf{k=0,1}$ 時，$\sum_{\mathbf{x\in A_2}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_2}}\mathbf{x^k}$ 成立。

因此，給出 $\mathbf{A_2=\{3,6\}}$、$\mathbf{B_2=\{2,7\}}$。利用定理 3.1 擴增集合的元素個數：

$$\mathbf{A_3=A_2\cup(B_2+3)-\{6\}=\{3,5,10\}}$$

$$\mathbf{B_3=B_2\cup(A_2+3)-\{6\}=\{2,7,9\}}$$

此時，理想解集合 $\mathbf{A_3}$ 和 $\mathbf{B_3}$，對 $\mathbf{k=0,1,\cdots,2}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_3}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_3}}\mathbf{x^k}$ 成立。

$$\mathbf{A_4=A_3\cup(B_3+5)-\{10,7\}=\{3,5,12,14\}}$$

$$\mathbf{B_4=B_3\cup(A_3+5)-\{10,7\}=\{2,8,9,15\}}$$

此時，理想解集合 $\mathbf{A_4}$ 和 $\mathbf{B_4}$，對 $\mathbf{k=0,1,\cdots,3}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_4}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_4}}\mathbf{x^k}$ 成立。

$$\mathbf{A_5=A_4\cup(B_4+7)-\{12,9,15\}=\{3,5,14,16,22\}}$$

$$\mathbf{B_5=B_4\cup(A_4+7)-\{12,9,15\}=\{2,8,10,19,21\}}$$

此時，理想解集合 $\mathbf{A_5}$ 和 $\mathbf{B_5}$，對 $\mathbf{k=0,1,\cdots,4}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_5}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_5}}\mathbf{x^k}$ 成立。

$$\mathbf{A_6=A_5\cup(B_5+2)-\{5,10,16,21\}=\{3,4,12,14,22,23\}}$$

$$\mathbf{B_6=B_5\cup(A_5+2)-\{5,10,16,21\}=\{2,7,8,18,19,24\}}$$

此時，理想解集合 $\mathbf{A_6}$ 和 $\mathbf{B_6}$，對 $\mathbf{k=0,1,\cdots,5}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_6}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_6}}\mathbf{x^k}$ 成立。

此外，定理 3.1 擴增集合元素個數的建構方式，也適用於有理數。

如令初始的 $\mathbf{A_2=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}}$、$\mathbf{B_2=\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right\}}$，則當 $\mathbf{k=0,1}$，顯然 $\sum_{\mathbf{x\in A_2}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_2}}\mathbf{x^k}$ 成立。因此 $\mathbf{A_2=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}}$、$\mathbf{B_2=\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right\}}$。利用定理 3.1 擴增集合的元素個數：

$$\mathbf{A_3=A_2\cup\left(B_2+\frac{1}{2}\right)-\left\{\frac{3}{4}\right\}=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{4}\right\}}$$

$$\mathbf{B_3=B_2\cup\left(A_2+\frac{1}{2}\right)-\left\{\frac{3}{4}\right\}=\left\{\frac{1}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{6}\right\}}$$

此時，理想解集合 $\mathbf{A_3}$ 和 $\mathbf{B_3}$，對 $\mathbf{k=0,1,\cdots,2}$，$\sum_{\mathbf{x\in A_3}}\mathbf{x^k}=\sum_{\mathbf{x\in B_3}}\mathbf{x^k}$ 成立。

$$\mathbf{A_4=A_3\cup\left(B_3+\frac{1}{3}\right)-\left\{\frac{2}{3},\frac{7}{4}\right\}=\left\{\frac{1}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{12},\frac{3}{2}\right\}}$$

$$B_4 = B_3 \cup \left(A_3 + \frac{1}{3}\right) - \left\{\frac{2}{3}, \frac{7}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, 1, \frac{19}{12}\right\}$$

此時，理想解集合A_4和B_4，對$k = 0, 1, \cdots, 3$，$\sum_{x \in A_4} x^k = \sum_{x \in B_4} x^k$成立。

定理 3.1 擴增集合元素個數的建構方式，也適用於無理數。

如令初始的$A_2 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$、$B_2 = \{1, -1\}$，則當$k = 0, 1$，顯然$\sum_{x \in A_2} x^k = \sum_{x \in B_2} x^k$成立。

因此$A_2 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$、$B_2 = \{1, -1\}$。利用定理 3.1 擴增集合的元素個數：

$$A_3 = A_2 \cup \left(B_2 + 2\sqrt{2}\right) - \left\{\sqrt{2}\right\} = \left\{-\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2}\right\}$$

$$B_3 = B_2 \cup \left(A_2 + 2\sqrt{2}\right) - \left\{\sqrt{2}\right\} = \left\{1, -1, 3\sqrt{2}\right\}$$

此時，理想解集合A_3和B_3，對$k = 0, 1, \cdots, 2$，$\sum_{x \in A_3} x^k = \sum_{x \in B_3} x^k$成立。

$$A_4 = A_3 \cup (B_3 + 2) - \left\{1, 1 + 2\sqrt{2}\right\} = \left\{-\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2}, 3, 2 + 3\sqrt{2}\right\}$$

$$B_4 = B_3 \cup (A_3 + 2) - \left\{1, 1 + 2\sqrt{2}\right\} = \left\{-1, 3\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\right\}$$

此時，理想解集合A_4和B_4，對$k = 0, 1, \cdots, 3$，$\sum_{x \in A_4} x^k = \sum_{x \in B_4} x^k$成立。

$$\begin{aligned} A_6 &= A_4 \cup \left(B_3 + 3 + \sqrt{2}\right) - \left\{3, 2 + 3\sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{-\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2}, 5, 6 + 3\sqrt{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_6 &= B_4 \cup \left(A_3 + 3 + \sqrt{2}\right) - \left\{3, 2 + 3\sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{-1, 3\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 6 + \sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2}\right\} \end{aligned}$$

此時，集合A_6和B_6，對$k = 0, 1, \cdots, 4$，$\sum_{x \in A_6} x^k = \sum_{x \in B_6} x^k$成立。

$$\begin{aligned} A'_6 &= A_6 \cup \left(B_6 + 3 - \sqrt{2}\right) - \left\{2 + \sqrt{2}, 5, 6 + 3\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 6 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{-\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2}, 5 - 2\sqrt{2}, 9, 8 + 3\sqrt{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_6 &= B_6 \cup \left(A_6 + 3 - \sqrt{2}\right) - \left\{2 + \sqrt{2}, 5, 6 + 3\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 6 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{-1, 3\sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, 8 - \sqrt{2}, 9 + 2\sqrt{2}\right\} \end{aligned}$$

此時，理想解集合A'_6和B'_6，對$k = 0, 1, \cdots, 5$，$\sum_{x \in A'_6} x^k = \sum_{x \in B'_6} x^k$成立。

在擴增集合的元素個數以尋求解答時，可能經常找到同一類型的解，但經過平移操作或放大、縮小集合的元素數值之後，即會發現是相同的解。

因此，於建構求解的操作中，為了能夠使人容易分辨是否找到同一類型的解，故對集合A_n和B_n作出一些規定，使其建構的集合表示法能夠唯一。

現在給出一個標準表示法的定義：

對於兩個不相交的n元正整數集合$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$和$B_n = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，若

1. 每個元素皆為整數。
2. $\min\{A_n \cup B_n\} = 1$。
3. 最大公因數$(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$。

則滿足以上條件的A_n和B_n，且符合命題所給定之條件，則稱此為集合A_n和B_n的標準表示法。

基於以上的推演，可以知道只要找到一組初始解的建構方式，則可以利用引理 2.1 和引理 1.1 找出同一系列解的建構結果，所以得到：

結論 4.2 (Ajai Choudhry[1]) (A.W. Goodman[4]) $n \geq 2$時，若存在兩個不相交的n元正實數集合 $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 和 $B_n = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，對 $k = 0, 1, \cdots, m$，$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$ 均成立，則對 $A_n{}' = pA_n + q = \{pa_1 + q, pa_2 + q, \ldots, pa_n + q\}$ 和 $B_n{}' = pB_n + q = \{pb_1 + q, pb_2 + q, \ldots, pb_n + q\}$，$p$、$q \in R$，對$k = 0, 1, \cdots, m$，$\sum_{x\in A_n{}'} x^k = \sum_{x\in B_n{}'} x^k$亦成立。

研究五	於滿足條件對$k = 1, 3, \cdots, 2t + 1$或對$k = 2, 4, \cdots, 2t$，$\sum_{i=1}^{n} a_i{}^k = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^k$成立，$A_n$和$B_n$是否存在其他更為簡便的建構求解方式?

利用定理 3.1 由一次和相等依序進行擴增兩不相交的n元正實數集合A_n和B_n，對$k = 0, 1, 2, \ldots, m$，均有$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$的問題中，對所有解(不論是否為理想解)，利用引理 2.1 進行平移操作，分別取得集合$A_n{}'$和$B_n{}'$，並使得$\sum_{x\in A_n{}'} x = \sum_{x\in B_n{}'} x = 0$，即$A_n{}' = A_n - (\sum_{x\in A_n} x)/n$，$B_n{}' = B_n - (\sum_{x\in B_n} x)/n$。

設進行平移操作後，兩不相交的n元正整數集合$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$和$B_n = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，$b_1 < b_2 < \cdots < b_n$，可發現解有以下的規律：

1. 當 m 為偶數時：

(1) $A_n = -B_n$，即$b_1 = -a_n$，$b_2 = -a_{n-1}$，…，$b_n = -a_1$。

例如 m=2 時：

$$\begin{cases} A_3 = \{1, 6, 8\} \\ B_3 = \{2, 4, 9\} \end{cases} \xrightarrow[\text{平移後}]{} \begin{cases} A_3{}' = A_3 - 5 = \{-4, 1, 3\} \\ B_3{}' = B_3 - 5 = \{-3, -1, 4\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = \{1, 7, 10\} \\ B_3 = \{2, 5, 11\} \end{cases} \xrightarrow[\text{平移後}]{} \begin{cases} A_3{}' = A_3 - 6 = \{-5, 1, 4\} \\ B_3{}' = B_3 - 6 = \{-4, -1, 5\} \end{cases}$$

例如 **m=4** 時：

$$\begin{cases}A_5=\{1,7,9,18,20\}\\B_5=\{2,4,13,15,21\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}\begin{cases}A_5{}'=A_5-11=\{-10,-4,-2,7,9\}\\B_5{}'=B_5-11=\{-9,-7,2,4,10\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_6=\{1,9,10,12,20,23\}\\B_6=\{2,5,13,15,16,24\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}$$

$$\begin{cases}A_6{}'=A_6-12.5=\{-11.5,-3.5,-2.5,-0.5,7.5,10.5\}\\B_6{}'=B_6-12.5=\{-10.5,-7.5,0.5,2.5,3.5,11.5\}\end{cases}$$

例如 **m=6** 時：

$$\begin{cases}A_8=\{1,6,7,14,23,24,32,33\}\\B_8=\{2,3,11,12,21,28,29,34\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}$$

$$\begin{cases}A_8{}'=A_8-17.5=\{-16.5,-11.5,-10.5,-3.5,5.5,6.5,14.5,15.5\}\\B_8{}'=B_8-17.5=\{-15.5,-14.5,-6.5,-5.5,3.5,10.5,11.5,16.5\}\end{cases}$$

(2) 發現到：$m=2t,t\in N$時，A_n、B_n平移後大於 0 的元素所形成的子集合分別為C、D，其$k=1,3\cdots,2t-1$，$\sum_{x\in C}x^k=\sum_{x\in D}x^k$均成立，且可適用引理 **1.1**。

例如 **m=6** 時：

$$\begin{cases}A_8=\{1,6,7,14,23,24,32,33\}\\B_8=\{2,3,11,12,21,28,29,34\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}\begin{cases}C=\{5.5,6.5,14.5,15.5\}\\D=\{3.5,10.5,11.5,16.5\}\end{cases}$$

取$\begin{cases}C'=2C=\{11,13,29,31\}\\D'=2D=\{7,21,23,33\}\end{cases}$，則對集合$C$、$D$與集合$C'$、$D'$，對$k=1,3,5$，$\sum_{x\in C}x^k=\sum_{x\in D}x^k$，$\sum_{x\in C'}x^k=\sum_{x\in D'}x^k$均成立。

因此找到偶數冪次方和均相等的分割方法。A_n、B_n的n若為奇數則在取集合C、D元素為一奇一偶，故需取擴增後的A_n、B_n，n若為偶數，如此集合C、D元素才會相同。

2. 當 **m** 為奇數時：

(1) $a_1=-a_n$，$a_2=-a_{n-1}$，…且$b_1=-b_n$，$b_2=-b_{n-1}$，…。

例如 **m=3** 時：

$$\begin{cases}A_4=\{1,8,10,17\}\\B_4=\{2,5,13,16\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}\begin{cases}A_4{}'=A_4-9=\{-8,-1,1,8\}\\B_4{}'=B_4-9=\{-7,-4,4,7\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_4=\{1,6,11,16\}\\B_4=\{2,4,13,15\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}\begin{cases}A_4{}'=A_4-8.5=\{-7.5,-2.5,2.5,7.5\}\\B_4{}'=B_4-8.5=\{-6.5,-4.5,4.5,6.5\}\end{cases}$$

例如 **m=5** 時：

$$\begin{cases}A_6=\{1,6,7,17,18,23\}\\B_6=\{2,3,11,13,21,22\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}\begin{cases}A_6{}'=A_6-12=\{-11,-6,-5,5,6,11\}\\B_6{}'=B_6-12=\{-10,-9,-1,1,9,10\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_6=\{1,5,10,18,23,27\}\\B_6=\{2,3,13,15,25,26\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}\begin{cases}A_6{}'=A_6-14=\{-13,-9,-4,4,9,13\}\\B_6{}'=B_6-14=\{-12,-11,-1,1,11,12\}\end{cases}$$

例如 **m=7** 時：

$$\begin{cases}A_8=\{1,5,10,24,28,42,47,51\}\\B_8=\{2,3,12,21,31,40,49,50\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}$$

$$\begin{cases}A_8{}'=A_8-26=\{-25,-21,-16,-2,2,16,21,25\}\\B_8{}'=B_8-26=\{-24,-23,-14,-5,5,14,23,24\}\end{cases}$$

(2) 發現到：$m=2t+1,t\in N$時，A_n、B_n平移後大於 0 的元素所形成的子集合分別為C、D，其$k=2,4\cdots,2t$，$\sum_{x\in C}x^k=\sum_{x\in D}x^k$均成立，且可適用引理 **1.1**。

例如 **m=7** 時：

$$\begin{cases}A_8=\{1,5,10,24,28,42,47,51\}\\B_8=\{2,3,12,21,31,40,49,50\}\end{cases}\xrightarrow[\text{平移後}]{}\begin{cases}C=\{2,16,21,25\}\\D=\{5,14,23,24\}\end{cases}$$

取$\begin{cases}C'=2C=\{4,32,42,50\}\\D'=2D=\{10,28,46,48\}\end{cases}$，則對集合$C$、$D$與集合$C'$、$D'$，對$k=2,4,6$，$\sum_{x\in C}x^k=\sum_{x\in D}x^k$，$\sum_{x\in C'}x^k=\sum_{x\in D'}x^k$均成立。

因此找到奇數冪次方和均相等的分割方法。

結論 5.1 從定理 **3.1** 由一次和相等依序進行擴增的n元實數集合A_n和B_n，對$k=0,1,2,\dots,m$，均有$\sum_{x\in A_n}x^k=\sum_{x\in B_n}x^k$的問題中，設$A_n{}'$和$B_n{}'$分別為$A_n$和$B_n$利用引理 **3.1** 進行平移操作後的集合，滿足$\sum_{x\in A_n{}'}x=\sum_{x\in B_n{}'}x=0$，則集合$A_n{}'=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$和$B_n{}'=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$，當$i<j$時$a_i<a_j$、$b_i<b_j$：

(1)當m為偶數時：$A_n{}'=-B_n{}'$；

(2) 當m為奇數時：$a_1=-a_n$、$a_2=-a_{n-1}$、…，且$b_1=-b_n$、$b_2=-b_{n-1}$、**…**。

證明：當$m=1$時：

不妨令初始的二元集合為$A_2=\{a_1,a_2\}$、$B_2=\{b_1,b_2\}$，且當$k=0,1$， $\sum_{x\in A_2}x^k=\sum_{x\in B_2}x^k$成立，則$a_1+a_2=b_1+b_2$。

在以下證明過程中，不要求$A_n\cap B_n=\emptyset$。

當$m=2$時：

利用定理 **3.1** 進行擴增，

$A_4=\{a_1,a_2,b_1+r_1,b_2+r_1\}$、$B_4=\{b_1,b_2,a_1+r_1,a_2+r_1\},r_1\in R$。

不妨引進下列平移操作後，可得到：

$A_4{}'=A_4-(a_1+a_2+r_1)/2$

$=\{(a_1-a_2-r_1)/2,(a_2-a_1-r_1)/2,(b_1-b_2+r_1)/2,(b_2-b_1+r_1)/2\}$

$B_4{}'=B_4-(a_1+a_2+r_1)/2$

$=\{(b_1-b_2-r_1)/2,(b_2-b_1-r_1)/2,(a_1-a_2+r_1)/2,(a_2-a_1+r_1)/2\}$

得到$A_4{}'=-B_4{}'$，而此時的$A_4{}'$、$B_4{}'$：當$k=0,1,2$，$\sum_{x\in A_2}x^k=\sum_{x\in B_2}x^k$成立。

在此簡化成$A_4{}'=\{a,b,c,d\}$、$B_4{}'=\{-d,-c,-b,-a\}$，且不妨設$a<b<c<d$、$a,b,c,d\in R$。

當$m=3$時：

利用定理 3.1 進行擴增，

$A_8=\{a,b,c,d,-d+r_2,-c+r_2,-b+r_2,-a+r_2\}$、

$B_8=\{-d,-c,-b,-a,a+r_2,b+r_2,c+r_2,d+r_2\},r_2\in R$，

不妨引進下列平移操作後，令$r_2{}'=r_2/2$，可得到：

$A_8{}'=A_8-r_2{}'$

$=\{a-r_2{}',b-r_2{}',c-r_2{}',d-r_2{}',-d+r_2{}',-c+r_2{}',-b+r_2{}',-a+r_2{}'\}$

$B_8{}'=B_8-r_2{}'$

$=\{-d-r_2{}',-c-r_2{}',-b-r_2{}',-a-r_2{}',a+r_2{}',b+r_2{}',c+r_2{}'_2,d+r_2{}'\}$

得到$A_4{}'$和$B_4{}'$，其中$a_1=-a_8$、$a_2=-a_7$、…，且$b_1=-b_8$、$b_2=-b_7$、…、。此時，$A_8{}'$和$B_8{}'$，滿足當$k=0,1,2,3$，$\sum_{x\in A_2}x^k=\sum_{x\in B_2}x^k$成立。

在此簡化成$A_8{}'=\{a_1,a_2,\dots,-a_2,-a_1\}$、$B_8{}'=\{b_1,b_2,\dots,-b_2,-b_1\}$，且不妨設$a_1<a_2<\cdots$、$b_1<b_2<\cdots$、$a_1,a_2,\dots,b_1,b_2,\dots\in R$。

當$m=4$時：

利用定理 3.1 進行擴增，同理可得到$A_{16}{}'=-B_{16}{}'$，此時，$A_{16}{}'$和$B_{16}{}'$，滿足當$k=0,1,2,3,4$，$\sum_{x\in A_2}x^k=\sum_{x\in B_2}x^k$成立。

利用數學歸納法，可證得：

當m為偶數時：$A_n{}'=-B_n{}'$，

當m為奇數時：$a_1=-a_n$、$a_2=-a_{n-1}$、…，且$b_1=-b_n$、$b_2=-b_{n-1}$、…。

結論 5.2 從定理 3.1 由一次和相等依序進行擴增的n元實數集合A_n和B_n，對$k=0,1,2,\dots,m$，均有$\sum_{x\in A_n}x^k=\sum_{x\in B_n}x^k$的問題中，設$A_n{}'$和$B_n{}'$分別為$A_n$和$B_n$利用引理 3.1 進行平

移操作後的集合，滿足$\sum_{x\in A_n'} x = \sum_{x\in B_n'} x = 0$，且令$A_n'$和$B_n'$中大於 0 的元素所形成的子集合分別為$C$和$D$，則集合$C$和$D$：

(1)當$m = 2t, t \in N$時：對 $k = 1, 3 \cdots, 2t-1$，$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in D} x^k$成立；

(2)當$m = 2t+1, t \in N$時：對 $k = 2, 4 \cdots, 2t$，$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in D} x^k$成立。

證明：利用結論 5.1 得到：

當$m = 2t, t \in N$時：$A_n' = -B_n'$。

此時的A_n'和B_n'，當$k = 0, 1, 2, \dots, 2t$，$\sum_{x\in A_n'} x^k = \sum_{x\in B_n'} x^k$成立。

因為引用引理 3.1 進行平移操作，使得A_n'和B_n'滿足$\sum_{x\in A_n'} x = \sum_{x\in B_n'} x = 0$，讓集合$A_n'$和$B_n'$大於 0 的元素所形成的子集合分別為$C$、$D$。

故，當$k = 1, 3 \cdots, 2t-1$：

因為$A_n' = -B_n'$，所以$\sum_{x\in C} x^k + \sum_{x\in A_n'-C} x^k = -\sum_{x\in D} x^k - \sum_{x\in B_n'-D} x^k = \sum_{x\in D} x^k + \sum_{x\in B_n'-D} x^k$，得到$\sum_{x\in D} x^k + \sum_{x\in B_n'-D} x^k = 0$。

又，集合$B_n' - D = -C$，推得$\sum_{x\in D} x^k - \sum_{x\in C} x^k = 0$，故得到$\sum_{x\in D} x^k = \sum_{x\in C} x^k$。

當$m = 2t+1, t \in N$時：$a_1 = -a_n$、$a_2 = -a_{n-1}$、…、且$b_1 = -b_n$、$b_2 = -b_{n-1}$、…。

此時的A_n'和B_n'，當$k = 0, 1, 2, \dots, 2t+1$，$\sum_{x\in A_n'} x^k = \sum_{x\in B_n'} x^k$成立。

因為引用引理 3.1 進行平移操作，使得A_n'和B_n'滿足$\sum_{x\in A_n'} x = \sum_{x\in B_n'} x = 0$，讓集合$A_n'$和$B_n'$大於 0 的元素所形成的子集合分別為$C$、$D$。

故，當$k = 2, 4 \cdots, 2t$：

因為$a_1 = -a_n$、$a_2 = -a_{n-1}$、…，且$b_1 = -b_n$、$b_2 = -b_{n-1}$、…，所以$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in A_n'-C} x^k$、$\sum_{x\in D} x^k = \sum_{x\in B_n'-D} x^k$。又$\sum_{x\in A_n'} x^k = \sum_{x\in B_n'} x^k$，故得到$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in D} x^k$。

綜合以上得證。

因擴增方式也適用於無理數，可以利用解特徵來再次擴增，且適用平移操作。若擴增前為理想解，則擴增完亦為理想解。

推論 5.1 若對$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$和$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$、$a_i, b_i > 0$、$i = 0, 1, 2, \dots, n$，對$k = 0, 1, 2, \dots, m$，均有$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$，則可建構$A' = \{-\sqrt{a_1}, -\sqrt{a_2}, \dots, -\sqrt{a_n},$

$\sqrt{a_n}, \dots, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_1}\}$及$B' = \{-\sqrt{b_1}, -\sqrt{b_2}, \dots, -\sqrt{b_n}, \sqrt{b_n}, \dots, \sqrt{b_2}, \sqrt{b_1}\}$。此時$A'$與$B'$為兩個不相交的$n$元無理數集合，對$k = 0, 1, 2, \dots, 2m, 2m+1$，均有$\sum_{x \in A'} x^k = \sum_{x \in B'} x^k$。

故，設一線段的總長度為L，對於$k_1, k_2, \cdots, k_m$冪次方和均相等的線段完美分割，可以是：

結論 5.3 $n \geq 2$時，若存在兩個不相交的n元正實數集合$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$和$B_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$，對$k = k_1, k_2, \cdots, k_m$且$k_1, k_2, \cdots, k_m \in N$，$\sum_{x \in A_n} x^k = \sum_{x \in B_n} x^k$均成立，則對一線段總長度為$L$，其$k_1, k_2, \cdots, k_m$冪次方和均相等的線段完美分割的$n$條子線段長度可為：$A_n{}' = pA_n = \{pa_1, pa_2, \dots, pa_n\}$和$B_n{}' = pB_n = \{pb_1, pb_2, \dots, pb_n\}$，其中$p = L / \sum_{x \in A_n} x$，且對$k = k_1, k_2, \cdots, k_m$，$\sum_{x \in A_n{}'} x^k = \sum_{x \in B_n{}'} x^k$均成立。

證明：同理，利用引理 1.1 易得證。

由定理 3.2、定理 4.1、及研究五可得到以下推論：

推論 5.2 若存在兩個不相交的n元正實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，若對$k = k_1, k_2, \cdots, k_m$，均有$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$、$m < n$、當$i \neq j$時$k_i \neq k_j$，且$k_1, k_2, \cdots, k_m \in N$。

伍、 研究結果

一、 引理 1.1：設兩不相交的n元實數集合A_n和B_n、$A_n \cap B_n = \emptyset$，且滿足條件$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$，則對任意非零實數$r$，$rA_n$和$rB_n$也滿足條件$\sum_{i=1}^{n} (ra_i)^k = \sum_{i=1}^{n} (rb_i)^k$。

二、 引理 1.2：設A_{n_1}和B_{n_1}為兩個不相交的n_1元實數集合，滿足條件$\sum_{x \in A_{n_1}} x^k = \sum_{x \in B_{n_1}} x^k$、$A'_{n_2}$和$B'_{n_2}$為兩個不相交的$n_2$元實數集合，滿足條件$\sum_{x \in A'_{n_2}} x^k = \sum_{x \in B'_{n_2}} x^k$，且$A_{n_1} \cap A'_{n_2} = \emptyset$、$B_{n_1} \cap B'_{n_2} = \emptyset$則$A = A_{n_1} \cup A'_{n_2}$、$B = B_{n_1} \cup B'_{n_2}$，亦滿足條件$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$。

三、 引理 2.1： 設兩不相交的n元實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且滿足條件對$k = 1, 2, \dots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$成立。則對於集合$A' = A + r$、$B' = B + r$、$r \in R$，當$k = 1, 2, \dots, m$，滿足$\sum_{x \in A'} x^k = \sum_{x \in B'} x^k$。

四、 定理 3.1： 設兩不相交的n元實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且滿足條件對$k = 1, 2, \dots, m$，

$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$成立。則對於集合$A' = A \cup (B + r)$、$B' = B \cup (A + r)$、$r \in R$，當$k = 1, 2, \dots, m, m + 1$，亦滿足$\sum_{x\in A'} x^k = \sum_{x\in B'} x^k$。

五、 定理 3.2：當$n \geq 2$時，存在兩個不相交的n元正實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，滿足條件$k = 0, 1, 2, \dots, m$時，均有$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$，則$m < n$、$k \in N$。

六、 利用定理 3.1 的方法擴增兩不相交的n元實數集合A和B，對$k = 0, 1, 2, \dots, m$，均有$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$的問題

(一) 應用引理 2.1 的結果，我們可選擇適當的r平移A和B，讓A'和B'有若干個共同元素，再剔除其中的共同元素，使得$A' \cap B' = \emptyset$。透過此方法建構的集合A'和B'，相對於原來的集合A和B而言，其高一冪次方的和也相等。

(二) 可由建構的集合中之元素間的數值差作簡易的觀察，在建構的集合中元素間具有相同的數值差個數，即為平移該差值可消去的元素個數。

(三) 對所有的m，均可找到解，解集合的元素個數卻大不相同。在建構前的集合元素若各為n個，則建構後的集合元素個數範圍在$2n$至$m + 1$之間。

(四) 只要找到一組解，就可以利用引理 2.1 和引理 1.1 找出同一系列的解，如結論 4.2，並且可以推廣找到對一線段總長度為L，其$k = 0, 1, \cdots, m$冪次方和均相等的線段完美分割方法的簡易建構方法，如結論 5.3。

七、 結論 5.1：從定理 3.1 由一次和相等依序進行擴增的n元實數集合A_n和B_n，對$k = 0, 1, 2, \dots, m$，均有$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$的問題中，設${A_n}'$和${B_n}'$分別為$A_n$和$B_n$利用引理 3.1 進行平移操作後的集合，滿足$\sum_{x\in {A_n}'} x = \sum_{x\in {B_n}'} x = 0$，則集合${A_n}' = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$和${B_n}' = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$，當$i < j$時$a_i < a_j$、$b_i < b_j$：

(1)當m為偶數時：${A_n}' = -{B_n}'$；

(2) 當m為奇數時：$a_1 = -a_n$、$a_2 = -a_{n-1}$、…，且$b_1 = -b_n$、$b_2 = -b_{n-1}$、…。

八、 結論 5.2：從定理 3.1 由一次和相等依序進行擴增的n元實數集合A_n和B_n，對$k = 0, 1, 2, \dots, m$，均有$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$的問題中，設${A_n}'$和${B_n}'$分別為$A_n$和$B_n$利用引理 3.1 進行平移操作後的集合，滿足$\sum_{x\in {A_n}'} x = \sum_{x\in {B_n}'} x = 0$，且令${A_n}'$和${B_n}'$中大於 0 的元素所形成的子集合分別為$C$和$D$，則集合$C$和$D$：

(1) 當$m = 2t, t \in N$時：對$k = 1, 3 \cdots, 2t - 1$，$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in D} x^k$成立；

(2)當$m = 2t + 1, t \in N$時：對 $k = 2, 4 \cdots, 2t$，$\sum_{x \in C} x^k = \sum_{x \in D} x^k$成立。

陸、 討論

一、 比較文獻與本研究結果如下：

參考文獻內容	本研究內容
(Ajai Choudhry[1]) 利用代數方法找出 $m = 4$ 至 7 的部份解，滿足 $k = 0, 1, 2, \ldots, m$，均有$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$，其解皆為數字較大的整數。未見性質定理證明。	● 只須利用集合加法、聯集，即可找到更高一冪次和相等的解，方法簡單且一定找得到解，也可以找到無理數的解。 ● 因本研究是採用筆算，輔以計算機及電腦 Excel 驗算，故數字皆相對較小。
(陳溦文[2]) PTE 問題的發展歷史、應用、許多利用電腦搜索的解，只公佈數值解、未公佈解法，其解皆為整數。目前找到 $m = 7, 9, 11$ 的理想解，滿足 $k = 0, 1, 2, \ldots, m$，均有$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$。此外，也找到一些奇數次方和相等$k = 1, 3, 5, 7$和$k = 1, 3, 5, 7, 9$的解。未見性質定理證明。	● 定理 3.2: 簡易方法證明當$n \geq 2$時，存在兩個不相交的n元正實數集合A和B，對$k = 0, 1, 2, \ldots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$，則$m < n$。 ● 本研究的方法可以找到無理數解。 ● 可利用解平移操作至集合的元素總和為 0 時，找出$k = 1, 3, 5 \ldots$或$k = 2, 4, 6 \ldots$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$的解。
(Ajai Choudhry[3]) 用代數的方法找出滿足 $k = 1, 3$，$\sum_{x \in A_3} x^k = \sum_{x \in B_3} x^k$，$A_3$、$B_3$完整的參數解，及$x_1^k + y_1^k + z_1^k = x_2^k + y_2^k + z_2^k = \cdots = x_n^k + y_n^k + z_n^k$、$k = 1, 3$，並由$x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k + x_5^k = 0$、$k = 1, 3$，建構出$k = 0, 1, 2, \ldots, 4$，$\sum_{x \in A_5} x^k = \sum_{x \in B_5} x^k$的解。未見性質定理證明。	● 可以延伸求得滿足$k = 1, 3, 5 \ldots$或$k = 2, 4, 6 \ldots$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$的解。 ● 可以獲得無理數通解的建構方法。 ● 可以找到$k = 0, 1, 2, \ldots, m$，A、B元素皆大於零的理想解；利用推論 5.1 的方法，可倍增建構$k = 0, 1, 2, \ldots, 2m + 1$情況無理數的理想解。
(A.W. Goodman[4]) 對$n \geq 3$、$k = 1, 2$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$，建構符合條件的正整	● 本研究由歸納的性質在定理 2.1 即建構出 $n \geq 3$、$k = 1, 2$，$\sum_{x \in A} x^k =$

數$\mathbf{A_n}$、$\mathbf{B_n}$。未見性質定理證明。	$\sum_{x\in B} x^k$，且滿足所有$\mathbf{n}$的解集合，方法更為簡單。

二、 本研究的方法可以很容易找出解，但只能證明存在，無法找出所有的解。由結論 5.1 可觀察到，由一次方和相等依序進行擴增所找出的解有以下特徵：

$\mathbf{A_n}$和$\mathbf{B_n}$為兩個不相交的$\mathbf{n}$元實數集$\mathbf{A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}}$和$\mathbf{B_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}}$且當$\mathbf{i < j}$時，$\mathbf{a_i < a_j}$、$\mathbf{b_i < b_j}$，對$\mathbf{k = 0, 1, \cdots, m}$，均有$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$

(一) $|a_1 - b_1| = |a_n - b_n|$

(二) 當$m = 2t, t \in N$時：

$$a_1 + b_n = \cdots = a_i + b_{n+1-i} = \cdots = a_n + b_1 = (2\sum_{x\in A} x)/n，\forall i \le n、i \in N$$

當$m = 2t + 1, t \in N$時：

$$a_1 + a_n = \cdots = a_i + a_{n+1-i} = b_1 + b_n = \cdots = b_j + b_{n+1-j} = (2\sum_{x\in A} x)/n，\forall i, j \le n、i, j \in N$$

當$m = 2t + 1$時，A_n及B_n的n不可能為奇數，若為奇數則$a_{(n+1)/2} = b_{(n+1)/2} = (\sum_{x\in A} x)/n$，與$A_n \cap B_n = \emptyset$不合。當$m = 2t + 1$時，建構後的元素個數一定是偶數；當$m = 2t$時，建構後的元素個數奇數、偶數皆有可能。

三、 在研究四擴增方法二 (4.1)和 (4.2)，因係由 1 及 3 冪次方和相等，利用定理 3.1 擴增集合元素的個數求得。從$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$的條件，使其擴增後平方和相等的條件得以被滿足；但因擴增前的集合A_3與B_3未有前述$m = 2t + 1$解的特徵：$a_1 + a_n = b_1 + b_n = (2\sum_{x\in A} x)/n$，故在擴增後雖然滿足$k = 0, 1, 2$，均有$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$，但其解卻無前述$m = 2t$的特徵：$a_1 + b_n = a_n + b_1 = (2\sum_{x\in A} x)/n$。由(4.2)若再往下擴充得到(4.3)，得到集合A_7'和B_7'，對$k = 0, 1, 2, 3$，$\sum_{x\in A_4} x^k = \sum_{x\in B_4} x^k$均成立，此時$m$為奇數，元素為奇數個。

四、 在本研究中尚未找出 1 至 6 冪次方和均相等的理想解，搜尋相關資料後找到兩解(陳潄文 [2])。其中，一解為 $A_7 = \{1, 19, 20, 51, 57, 80, 82\}$ 和 $B_7 = \{2, 12, 31, 40, 69, 71, 85\}$，其 $|2 - 1| \ne |85 - 82|$，另一解為為 $A_7 = \{83, 191, 197, 383, 419, 55\ \ , 569\}$和$B_7 = \{89, 149, 263, 317, 491, 503, 587\}$，其

$|89-83| \neq |587-569|$，兩組解皆沒有本研究由一次和相等依序進行擴增方法找出的解偶次理想解的特徵，故可知無法由本研究一次和相等依序進行擴增方法得到以上的解，但可能從擴增方法二，類似的起始的集合再擴增而來或是採用其它的方法得到。

五、 利用解特徵可以把文獻中的奇次$k=1,3,5\ldots$或偶次$k=2,4,6\ldots$方和相等的解擴增為$k=0,1,\cdots,m$的解，如(陳潄文[2]) $A_5=\{19,101,157,239,251\}$和$B_5=\{31,79,173,227,257\}$，對$k=1,3,5,7$均有$\sum_{x\in A}x^k=\sum_{x\in B}x^k$。

可令$A_{10}=\{-19,-101,-157,-239,-251,31,79,173,227,257\}$，$B_{10}=\{-31,-79,-173,-227,-257,19,101,157,239,251\}$，對$k=0,1,\cdots,8$均有$\sum_{x\in A_{10}}x^k=\sum_{x\in B_{10}}x^k$。

六、 等冪和問題可應用至軟體加密技術中(陳潄文[2])。把等冪和陣列引入軟體加密技術中，最基本做法是選取若干等冪和陣列（每組都可以演變出無陣列新的等冪和陣列），等號左邊的數存入軟體，等號右邊的數存入硬體。

七、 本研究探討的是A和B為兩個不相交的n元實數集，若兩集合元素個數不相同又會呈現出怎樣的結果，應該也是一個很有趣又具有挑戰性的題目。

八、 利用A和B為兩個不相交的n元實數集$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$和$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，且滿足條件$\sum_{i=1}^n a_i^2=\sum_{i=1}^n b_i^2$或$\sum_{i=1}^n a_i^3=\sum_{i=1}^n b_i^3$的結果，可進一步探討面積各不相同的正方形是否可以拼成面積相同、形狀相同的長方形，或者是體積各不相同的立方體是否可以拼成體積相同、形狀相同的長方體問題。

柒、 結論

一、 本研究以三種方式進行建構，最後得到可直接利用$\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^n b_i$的條件，找出相異四數、其中兩數的和等於另兩數的和，作為初始理想解集合A_2、B_2，並以此為解集合擴增的基礎，然後導入定理 3.1 的方法進行建構，使其高一冪次方的和相等的條件得以被滿足的方式進行建構，是一個便捷、成功的求解兩線段完美分割問題的方法。

二、 本研究亦延伸獲得一個簡便的建構方法求解，使得被分割的線段滿足$k=1,3,5\ldots$或

$\mathbf{k=2,4,6\ldots}$，均有$\sum_{x\in A}x^k=\sum_{x\in B}x^k$分割方法，如結論 5.1 和結論 5.2 所示，此結果可適用於引理 1.1 解等倍數放大後仍可成立，但不適用引理 2.1 的平移操作。

三、 可以利用研究結果得到對$\mathbf{k=0,1,2,\ldots,m}$，均有$\sum_{x\in A}x^k=\sum_{x\in B}x^k$的理想解平移，使$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$中的元素皆為大於零。利用推論 5.1 的方法，可建構$\mathbf{k=0,1,2,\ldots,2m+1}$無理數的理想解，應用平移操作使該無理數的理想解每個元素皆為大於零，再次建構可得$\mathbf{k=0,1,2,\ldots,4m+3}$無理數的理想解，如此操作下去可迅速找到高次等冪和問題的理想解。

四、 由結論 4.2，$\mathbf{n\geq 2}$時，若存在兩個不相交的$\mathbf{n}$元正實數集合$\mathbf{A_n=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}}$和$\mathbf{B_n=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}}$，對$\mathbf{k=0,1,\cdots,m}$，$\sum_{x\in A_n}x^k=\sum_{x\in B_n}x^k$均成立，則對$\mathbf{A_n{}'=pA_n+q=\{pa_1+q,pa_2+q,\ldots,pa_n+q\}}$和

$\mathbf{B_n{}'=pB_n+q=\{pb_1+q,\ pb_2+q,\ldots,pb_n+q\}}$，$\mathbf{p}$、$\mathbf{q\in R}$，對$\mathbf{k=0,1,\cdots,m}$，$\sum_{x\in A_n{}'}x^k=\sum_{x\in B_n{}'}x^k$亦成立。

五、 $\mathbf{n\geq 2}$時，若存在兩個不相交的$\mathbf{n}$元正實數集合$\mathbf{A_n=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}}$和$\mathbf{B_n=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}}$，對$\mathbf{k=k_1,k_2,\cdots,k_m}$且$\mathbf{k_1,k_2,\cdots,k_m\in N}$，$\sum_{x\in A_n}x^k=\sum_{x\in B_n}x^k$均成立，則對一線段總長度為$\mathbf{L}$，其$\mathbf{k_1,k_2,\cdots,k_m}$冪次方和均相等的線段完美分割$\mathbf{n}$條子線段長度可為：$\mathbf{A_n{}'=pA_n=\{pa_1,pa_2,\ldots,pa_n\}}$和$\mathbf{B_n{}'=pB_n=\{pb_1,pb_2,\ldots,pb_n\}}$，其中$\mathbf{p=L/\sum_{x\in A_n}x}$，且對$\mathbf{k=k_1,k_2,\cdots,k_m}$，$\sum_{x\in A_n{}'}x^k=\sum_{x\in B_n{}'}x^k$均成立。

捌、 參考資料及其他

1. Ajai Choudhry (2017). A new approach to the Tarry-Escott problem, arXiv:1603.00206v2 [math. NT] 7 Feb 2017.
2. 陳瀫文 (2016)。等冪和問題與區塊鏈技術，陳瀫文網博客。http://blog.sciencenet.cn/blog-3249051-1013969.html.
3. Ajai Choudhry (2010). Some diophantine problems concerning equal sums of integers and their cubes, Hardy-Ramanujan Journal, Vol. 33, pp. 59-70.
4. A.W. Goodman (2002). Pure multigrades, Mathematica Balkanica, New Series Vol. 16, Fasc. 1-4, pp.63-71.

【評語】030409

此作品為 Tarry Escott 問題的變形。作者討論冪次和相等問題，用窮舉法找到基本解，再用擴建數字的方法找出可以寫出冪次和相等的數字集合。具有研究精神，值得嘉許。此問題歷來已有非常多的資料與理論，對於文獻可再多參考。對於學界之嚴肅學術期刊論文，宜消化後再評述。作品報告的行文風格完全是數學論文格式，符號運用與書寫相當成熟，但也因學術化而使得原始問題和想法的創意略模糊，此研究雖有一些想法，文中闡述了一些構造解的方式，但沒有特別的創新與突破，是較為可惜之處。

作品海報

摘　要

等冪和是個古老、留有許多未解的迷人問題，過去多數使用多項式對稱、組合公式、複雜的代數方法、或以電腦輔助搜尋，求取較高冪次的理想解。本研究採用初級的數學理論、方法和公式，應用基本的集合性質、二項式公式、數學歸納法，成功獲取一系列等冪和的理想解，並證明其解的存在。研究從基本的二元集開始，探討等冪和理想解存在時的特性，然後導入定理 3.1 的方法建構、或運用推論 5.1 的方法倍數擴增，必可找到高一冪次或倍數冪次方和的解或理想解，並延伸到實數的等冪和問題求解。本研究也成功找到一系列奇數和偶數次、或無理數的等冪和理想解。研究結果預期可被應用至軟體的加密技術和相關應用，並且值得進一步探討質數的高冪次等冪和問題。

壹、研究動機

在「乘法公式與多項式」單元，練習到一題數學題：「兩不相交的非空子集$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$，使得$\sum_{x\in A} x = \sum_{x\in B} x$且$\sum_{x\in A} x^3 = \sum_{x\in B} x^3$」。在嘗試後發現，有很多奇妙的特性和美麗的數學關係。搜尋相關文獻後，擬採用基本的集合性質、二項式公式、數學歸納法，探討等冪和理想解的求解問題與解存在的證明；並且延伸探討求取一系列有理數或無理數等冪和問題理想解的方法，從而擴展到實數的等冪和問題研究。

首先針對以下問題探討：對給定長度相等的兩條線段，將其各分割為n $(n \in N)$，且$n \ge 2$條子線段，滿足$2n$條子線段的長度均互不相等，第一條和第二條線段的n條子線段長度的冪次方k $(k \in N)$的和均相等。滿足時稱為：<u>**k冪次方和相等的線段完美分割**</u>。

數學建模

設$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和$b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(a_i, b_i \in R^+)$分別代表第一條和第二條線段的n $(n \ge 2,\ n \in N)$條子線段長度，並以n元正實數集合$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$和$B_n = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$表示，滿足

1. $a_i \ne a_j, b_i \ne b_j$，當$i \ne j$，且$A_n \cap B_n = \emptyset$。　　2. $\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$、$k \in N$。

貳、研究目的

本研究探尋建構一個簡易的方式，求解前述對於兩n元正實數非空集合A_n和B_n、$A_n \cap B_n = \emptyset$之k $(k \in N)$冪次方和均相等的線段完美分割問題：

一、於滿足條件$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \sum_{i=1}^{n} b_i^3$時，$A_n$和$B_n$有何特殊關係存在?

二、於滿足條件$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$時，$A_n$和$B_n$有何特殊關係存在?

三、於滿足條件對$k = 0, 1, \cdots, m$，$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$成立，$A_n$和$B_n$有何特殊關係存在?

四、於滿足條件對$k = 0, 1, \cdots, m$，$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$成立，$A_n$和$B_n$是否存在其他更為簡便的建構求解方式? 建構方式是否也適用於有理數及無理數?

五、於滿足條件對$k = 1, 3, \cdots, 2t+1$或對$k = 2, 4, \cdots, 2t$，$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$成立，$A_n$和$B_n$是否存在其他更為簡便的建構求解方式?

參、研究過程與方法

名詞及符號定義

一、A_n：n元正實數集合$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，且$i = 1, 2, \ldots, n$、$a_i \in R^+$；或為$n$元實數集合$A_n$、$a_i \in R$；或為$n$元正整數集合$A_n$、$a_i \in N$；同理，$B_n = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$亦同。

二、rA_n：$rA_n = \{ra_1, ra_2, \ldots, ra_n\}$、$r \ne 0 \in R$；同理，$rB_n = \{rb_1, rb_2, \ldots, rb_n\}$。

三、$A_n + r$：$A_n + r = \{a_1 + r, a_2 + r, \ldots, a_n + r\}$、$r \in R$；同理，$B_n + r = \{b_1 + r, b_2 + r, \ldots, b_n + r\}$。

四、理想解：若兩不相交的n元實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且$k = 1, 2, \ldots, m$，$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$成立、$n = m + 1$時，集合$A$和$B$為$k = 1, 2, \ldots, m$的理想解。

冪次方和均相等的線段完美分割　滿足$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$，對$k = 0, 1, \cdots, m$均成立

$\sum_{x\in A_n} x^3 = \sum_{x\in B_n} x^3$ 的問題

$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$，$r \in R$
則$\sum_{x\in rA_n} x^k = \sum_{x\in rB_n} x^k$

$\sum_{x\in A_{n_1}} x^k = \sum_{x\in B_{n_1}} x^k$，$\sum_{x\in A'_{n_2}} x^k = \sum_{x\in B'_{n_2}} x^k$
且$A_{n_1} \cap A'_{n_2} = \emptyset$、$B_{n_1} \cap B'_{n_2} = \emptyset$，
則$\sum_{x\in A_{n_1}\cup A'_{n_2}} x^k = \sum_{x\in B_{n_1}\cup B'_{n_2}} x^k$

$n \ge 2$存在A_n、B_n滿足
$\sum_{x\in A_n} x^3 = \sum_{x\in B_n} x^3$

發現$\sum_{x\in A} x^3 = \sum_{x\in B} x^3$
且　$\sum_{x\in A} x = \sum_{x\in B} x$

$\sum_{x\in A_n} x^2 = \sum_{x\in B_n} x^2$ 的問題

對$k = 1, 2, \dots, m$，$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$，均成立。
$A' = A + r$、$B' = B + r$，$r \in R$，恆滿足
$k = 1, 2, \dots, m$，均有$\sum_{x\in A'} x^k = \sum_{x\in B'} x^k$。

$n \ge 3$存在A_n與B_n滿足
$\sum_{x\in A_n} x = \sum_{x\in B_n} x$ 及
$\sum_{x\in A_n} x^2 = \sum_{x\in B_n} x^2$

$n \ge 2$存在A_n、B_n滿足
$\sum_{x\in A_n} x^2 = \sum_{x\in B_n} x^2$

滿足$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$
對$k = 0, 1, \cdots, m$ 成立

設A與B滿足$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$，對$k = 0, 1, \dots, m$均成立
則集合$A' = A \cup (B + r)$與$B' = B \cup (A + r)$，$r \in R$，
滿足對$k = 0, 1, \dots, m, m+1$，均有$\sum_{x\in A'} x^k = \sum_{x\in B'} x^k$。

當$n \ge 2$時，存集合A_n與B_n，對
$k = 0, 1, 2, \dots, m$，均有$\sum_{x\in A} x^k$
$= \sum_{x\in B} x^k$、$m < n$、$k \in N$。

利用$\sum_{x\in A_3} x = \sum_{x\in B_3} x$且$\sum_{x\in A_3} x^3 = \sum_{x\in B_3} x^3$擴增

利用$\sum_{x\in A_2} x = \sum_{x\in B_2} x$擴增

利用$\sum_{x\in A_3} x = \sum_{x\in B_3} x$且$\sum_{x\in A_3} x^2 = \sum_{x\in B_3} x^2$擴增

滿足$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$
對$k = 0, 1, \cdots, m$ 成立的
其它建構方式

當$n \ge 2$時，若A_n和B_n，對$k = 0, 1, \cdots, m$，$\sum_{x\in A_n} x^k =$
$\sum_{x\in B_n} x^k$成立，則$A_n' = pA_n + q$和$B_n' = pB_n + q$，p、
q∈ R，對$k = 0, 1, \cdots, m$，$\sum_{x\in A_n'} x^k = \sum_{x\in B_n'} x^k$成立

可用
無理數
建構

由系列解通
式給出完美
分割的通解

$n \ge 5$存在集合A_n與B_n
對$k = 0, 1, \dots, 4$均有
$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$。

滿足$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$
對$k = 1, 3 \cdots$或$k = 2, 4 \cdots$
成立的建構方式

存在正實數集合C、D，
對 $k = 1, 3 \cdots, 2t - 1$，$t \in N$
均成立的建構方式

存在正實數集合C、D，
對 $k = 2, 4 \cdots, 2t$，$t \in N$
均成立的建構方式

由$k = 0, 1, 2, \dots, m$，A 、B元素皆大於
零，$\sum_{x\in A} x^k = \sum_{x\in B} x^k$的理想解，建構
$k = 0, 1, 2, \dots, 2m + 1$無理數的理想解

一、正整數理想解建構範例：從二元$(n = 2, m = 1)$理想解集合開始，運用**定理 3.1** 聯集擴增至三元$(n = 3, m = 2)$、四元$(n = 4, m = 3)$、五元$(n = 5, m = 4)$和六元$(n = 6, m = 5)$理想解求解，對$k = 0, 1, \cdots, m$，$\sum_{x\in A_n} x^k = \sum_{x\in B_n} x^k$成立。

$$\begin{cases} A_2 = \{3, 6\} \\ B_2 = \{2, 7\} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A_3 = A_2 \cup (B_2 + 3) - \{6\} = \{3, 5, 10\} \\ B_3 = B_2 \cup (A_2 + 3) - \{6\} = \{2, 7, 9\} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} A_4 = A_3 \cup (B_3 + 5) - \{10, 7\} = \{3, 5, 12, 14\} \\ B_4 = B_3 \cup (A_3 + 5) - \{10, 7\} = \{2, 8, 9, 15\} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} A_5 = A_4 \cup (B_4 + 7) - \{12, 9, 15\} = \{3, 5, 14, 16, 22\} \\ B_5 = B_4 \cup (A_4 + 7) - \{12, 9, 15\} = \{2, 8, 10, 19, 21\} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} A_6 = A_5 \cup (B_5 + 2) - \{5, 10, 16, 21\} = \{3, 4, 12, 14, 22, 23\} \\ B_6 = B_5 \cup (A_5 + 2) - \{5, 10, 16, 21\} = \{2, 7, 8, 18, 19, 24\} \end{cases}$$

二、結論 5.2 正整數情況奇數和偶數冪次方和相等解建構範例：利用**引理 2.1** 進行平移操作，滿足$\sum_{x\in A_n'} x = \sum_{x\in B_n'} x = 0$，令$A_n'$和$B_n'$中大於 0 的子集合為C和D。

(1) $m = 2t + 1, t \in N$時，集合C、D，其$k = 2, 4 \cdots, 2t$，$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in D} x^k$成立。

例如$m = 5$時：$\begin{cases} A_6 = \{3, 4, 12, 14, 22, 23\} \\ B_6 = \{2, 7, 8, 18, 19, 24\} \end{cases} \xrightarrow[\text{平移後}]{} \begin{cases} A_6' = \{-10, -9, -1, 1, 9, 10\} \\ B_6' = \{-11, -6, -5, 5, 6, 11\} \end{cases} \xrightarrow[\text{大於 0 的子集合}]{} \begin{cases} C = \{1, 9, 10\} \\ D = \{5, 6, 11\} \end{cases}$

對$k = 2, 4$，$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in D} x^k$成立。

(2) $m = 2t, t \in N$時，集合C、D，其$k = 1, 3 \cdots, 2t - 1$，$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in D} x^k$成立。

例如$m = 4$時：$\begin{cases} A_6 = \{3, 5, 11, 16, 18, 24\} \\ B_6 = \{2, 8, 9, 15, 21, 23\} \end{cases} \xrightarrow[\text{平移後}]{} \begin{cases} A_6' = \{-10, -8, -2, 4, 5, 11\} \\ B_6' = \{-11, -5, -4, 2, 8, 10\} \end{cases} \xrightarrow[\text{大於 0 的子集合}]{} \begin{cases} C = \{4, 5, 11\} \\ D = \{2, 8, 10\} \end{cases}$

對$k = 1, 3$，$\sum_{x\in C} x^k = \sum_{x\in D} x^k$成立。

三、推論 5.1 倍增建構無理數理想解範例：元素皆為正的**理想解**→倍數擴增建構**無理數理想解**→應用**引理 2.1** 平移操作使元素皆為正→倍數擴增→…

$\begin{cases} A_6 = \{3, 4, 12, 14, 22, 23\} \\ B_6 = \{2, 7, 8, 18, 19, 24\} \end{cases}$，

$k = 0, 1, \cdots, 5$，$\sum_{x\in A_6} x^k = \sum_{x\in B_6} x^k$

$\begin{cases} A_{12} = \{-\sqrt{3}, -\sqrt{4}, -\sqrt{12}, -\sqrt{14}, -\sqrt{22}, -\sqrt{23}, \sqrt{23}, \sqrt{22}, \sqrt{14}, \sqrt{12}, \sqrt{4}, \sqrt{3}\} \\ B_{12} = \{-\sqrt{2}, -\sqrt{7}, -\sqrt{8}, -\sqrt{18}, -\sqrt{19}, -\sqrt{24}, \sqrt{24}, \sqrt{19}, \sqrt{18}, \sqrt{8}, \sqrt{7}, \sqrt{2}\} \end{cases}$，

$k = 0, 1, \cdots, 11$，$\sum_{x\in A_{12}} x^k = \sum_{x\in B_{12}} x^k$

$\begin{cases} A_{12}' = A_{12} + 5 \\ B_{12}' = B_{12} + 5 \end{cases}$　$k = 0, 1, \cdots, 11$，$\sum_{x\in A_{12}} x^k = \sum_{x\in B_{12}} x^k$

$\begin{cases} A_{24} = \cdots \\ B_{24} = \cdots \end{cases}$　$k = 0, 1, \cdots, 23$，$\sum_{x\in A_{12}} x^k = \sum_{x\in B_{12}} x^k$

肆、研究結果

一、 等冪和的解有一個特殊性質，簡稱平移操作 – 引理 2.1

設兩不相交的n元實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且滿足條件對$k = 1, 2, \dots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$成立。則對於集合$A' = A + r$、$B' = B + r$、$r \in R$，當$k = 1, 2, \dots, m$，滿足$\sum_{x \in A'} x^k = \sum_{x \in B'} x^k$。

二、 利用平移操作、聯集擴增可求出等冪和的理想解、引用二項式公式證明 – 定理 3.1

設兩不相交的n元實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，且滿足條件對$k = 1, 2, \dots, m$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$成立。則對於集合$A' = A \cup (B + r)$、$B' = B \cup (A + r)$、$r \in R$，當$k = 1, 2, \dots, m, m + 1$，亦滿足$\sum_{x \in A'} x^k = \sum_{x \in B'} x^k$。

三、 應用多項式根與係數之間的關係和數學歸納法、反證法證明 – 定理 3.2

當$n \geq 2$時，存在兩個不相交的n元實數集合A和B、$A \cap B = \emptyset$，滿足條件$k = 0, 1, 2, \dots, m$時，均有$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$，則$m < n$、$k \in N$。

四、 利用定理 3.1 的建構和擴增方法，求解 k 冪次方和相等的線段完美分割問題

- 可選擇適當的r平移A和B，讓A'和B'有若干個共同元素，再剔除其中的共同元素，使得$A' \cap B' = \emptyset$。相對於原來的集合A和B而言，透過此方法建構的集合A'和B'，其高一冪次方的和也相等。
- 可由建構的集合之元素間的數值差異作簡易的觀察，在建構的集合中元素間具有相同數值差的元素個數，即為平移該差異數值可消去的元素個數。
- 對所有的m均可找到解，但在建構前的集合元素若各為n個，則建構後的集合元素個數範圍在$2n$至$m + 1$之間。
- 只要找到一組解，就可以利用**平移操作**和**等倍放大**找出同一系列的解或理想解，經過推廣即獲得 **k 冪次方和相等的線段完美分割**的簡易建構方法。

五、 找到$k = 0, 1, 2, \dots, m$，A、B元素皆大於零的理想解；利用**推論 5.1** 的方法，可倍增建構**無理數**問題$k = 0, 1, 2, \dots, 2m + 1$情況的解，並延伸求得滿足$k = 1, 3, 5 \dots$或$k = 2, 4, 6 \dots$，$\sum_{x \in A} x^k = \sum_{x \in B} x^k$的解。

六、 $n \geq 2$時，若存在兩個不相交的n元正實數集合$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$和$B_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$對$k = k_1, k_2, \cdots, k_m \in N$，$\sum_{x \in A_n} x^k = \sum_{x \in B_n} x^k$均成立，則**對一線段總長度為$L$**，其**$k_1, k_2, \cdots, k_m$冪次方和均相等的線段完美分割**$n$條子線段長度可為：$A_n' = pA_n = \{pa_1, pa_2, \dots, pa_n\}$和$B_n' = pB_n = \{pb_1, pb_2, \dots, pb_n\}$，其中$p = L / \sum_{x \in A_n} x$。

伍、討論與結論

一、僅須利用集合的**平移操作**(加法)、**聯集擴增**的方式進行**建構**，即可找到更高一冪次方和相等的一系列**理想解**，方法簡單、保證找得到解、和引用**二項式公式**證明**定理 3.1**，並且可適用於**有理數**、**無理數**(或**實數**)問題的求解。

二、僅應用**初級**或**基礎的**數學技巧，應用**多項式根與係數之間的關係**和**數學歸納法**、**反證法**即重新證明了**定理 3.2 理想解**存在的重要限制，$m < n$、$k \in N$。

三、僅採用筆算、輔以手持計算器和電腦 Excel 驗算，故本研究解集合的數字，皆相對較小；但應用此方法，應可進一步運用程式輔助運算，有效找到其他組合的系列理想解。

四、等冪和問題**可應用至軟體加密技術中**：

把等冪和陣列引入軟體加密技術中，最基本做法是選取若干等冪和陣列 (每組都可以演變出無陣列新的等冪和陣列)，等號左邊的數存入軟體，等號右邊的數存入硬體，並隨著加密的難度升高，進一步探討質數的高冪次等冪和問題。

陸、參考資料

1. Ajai Choudhry (2017). A new approach to the Tarry-Escott problem, arXiv:1603.00206v2 [math. NT] 7 Feb 2017.
2. 陳漱文(2016)。等冪和問題與區塊鏈技術，陳漱文網博客。http://blog.sciencenet.cn/blog-3249051-1013969.html.
3. Ajai Choudhry (2010). Some diophantine problems concerning equal sums of integers and their cubes, Hardy-Ramanujan Journal, Vol. 33, pp. 59-70.
4. A.W. Goodman (2002). Pure multigrades, Mathematica Balkanica, New Series Vol. 16, Fasc. 1-4, pp.63-71.