中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030408

從三個交於一點的圓形想起
——Miquel’s Theorem之推廣

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 劉安家	章念慈 洪明瞭

關鍵詞：密克定理

摘要

根據密克定理的陳述，於一個三角形的三邊上各任取一點，則三個外接圓會交於一點，且逆定理也存在。我在確認完定理和逆定理的正確性之後，以原本定理的敘述為基礎，推廣並探討了根據該定理所能做出的相似形和圓心的軌跡，並將軌跡視為三角形的基本性質，棄續探討軌跡的交點的軌跡，最後再將密克定理和密克逆定理推廣到多邊形。

壹、　研究動機

在第四冊的尺規作圖中，學習到如何只用尺和圓規作圖，一次隨性的突發奇想，讓我想看看以三角形的三頂點為圓心、以三邊為半徑，所作出來的圓有什麼特色，殊不知我並沒有發現什麼驚奇的事，於是我便上網查查看是否有前人的足跡可循，而密克定理便是其一，當然，與我原本的目的不甚相符，但面對這新奇的定理，又怎能不生好奇之心？故此，以推廣密克定理為目標，輔以第四冊的全等與第五冊中的相似形和圓，我，走向這條以前人的理論為基礎的研究之路。

貳、　研究目的

一、　密克定理與密克逆定理的證明

二、　三角形密克定理的推廣

三、　n 邊形的密克定理與密克逆定理

參、　研究設備與器材

紙、筆、圓規、電腦、Geogebra 繪圖軟體

肆、　研究過程或方法

一、　密克定理與密克逆定理的證明

(一) 密克定理(Miquel's theorem)：

如下圖，任意三角形 ABC 上，P、Q、R 分別位於$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$，則ΔAPR、ΔBQP、ΔCRQ的外接圓(圓O_1、圓O_2、圓O_3)交於一點，並稱之為密克點(Miquel point)。

1. 網路上的證明：

設圓O_1和圓O_3的交點為 M，且 M 在ΔABC內部

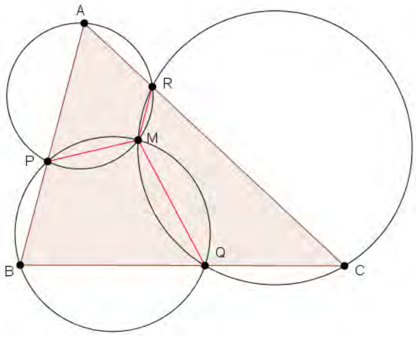
$\because \angle PMR + \angle RMQ = (\pi - \frac{1}{2}\widehat{PMR}) + (\pi - \frac{1}{2}\widehat{RMQ})$

又$\angle \mathrm{PMQ} = 2\pi - (\angle \mathrm{PMR} + \angle \mathrm{RMQ})$

$= \frac{1}{2}\widehat{PMR} + \frac{1}{2}\widehat{RMQ} = \angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C} = \pi - \angle \mathrm{B}$

$\therefore$ M 必在圓O_2上　($\angle \mathrm{PMQ} + \angle \mathrm{B} = \pi$)

故圓O_1、圓O_2、圓O_3交於一點　Q.E.D.



圖一

上面證法的先決條件是「密克點在ΔABC內部」，此時會形成三個四邊形，利用圓內接四邊形對角互補性質就可以證明。

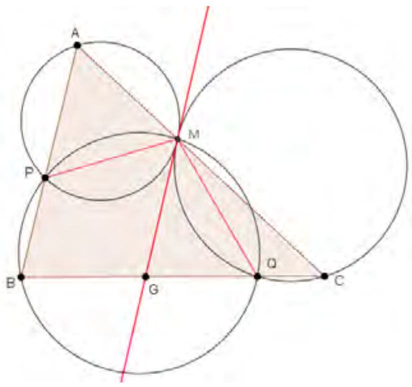
2. 我發現若密克點位在一邊上(如圖二)，也就是其中的兩個圓外切，密克定理一樣成立，其證明如下:

設圓O_1和圓O_3相切於 M 且$\overleftrightarrow{MG}$為其切線，即 M 點在$\overline{AC}$

$\because \angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{PMG}$，$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{QMG}$，又$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi$

$\therefore \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{PMQ} = \pi$

即圓O_2有過 M 點 (圓內接四邊形對角互補)，得若 M 點位在$\overline{AC}$上是成立的，得若密克點在三角形的一邊上密克定理亦成立。在其他二邊上也同理可得密克定理成立。　Q.E.D.



圖二

3. 再考慮到其中兩圓交點在ΔABC外部的情況，利用圓內接四邊形對角互補一樣可以證明第三個圓會過此點：

設圓O_2和圓O_3的交點 M 在ΔABC外部。在此不妨設其在$\overline{AC}$外部(圖三)，仍不失一般性

$\because \angle PMQ = \angle PMR + \angle QMR$

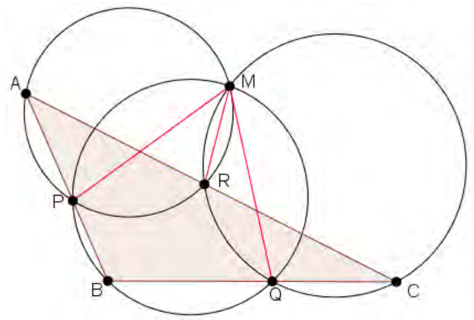
又$\angle QMR = \angle C$，$\angle PMQ = \pi - \angle B$

$\therefore \pi - \angle B = \angle C + \angle PMR \Rightarrow \angle PMR = \angle A$

$\Rightarrow$ APRM 四點共圓

$\therefore$ 圓O_1有過 M

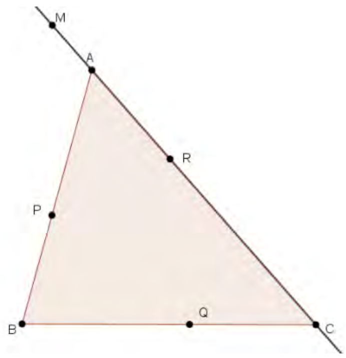
故圓O_1、圓O_2、圓O_3交於一點



圖三

Q.E.D.

4. 以上討論的三角形外部並沒有辦法說明，密克點在直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上的情況，如圖四。若 M 位在$\overline{AC}$延長線上，因為 A、M、R 三點共線，所以 AMPR 不會是圓內接四邊形，得ΔAPR的外接圓不可能過位於$\overline{AC}$延長線上的 M，即密克點不可能在$\overline{AB}$延長線上。其餘二邊延長線亦同。



圖四

綜合以上四點可知：「任意三角形 ABC 上，P、Q、R 分別位於$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$，則ΔAPR、ΔBQP、ΔCRQ的外接圓（圓O_1、圓O_2、圓O_3）會交於一點」。

(二) 密克逆定理

> 設圓O_1、圓O_2、圓O_3交於點 M，而 P、Q、R 則是圓O_1與圓O_2、圓O_2與圓O_3、圓O_1與圓O_3的另一個交點，在圓O_1上任取一點 A，$\overleftrightarrow{AP}$與圓O_2交於點 B、$\overleftrightarrow{AR}$與圓O_3交於點 C，則 B、C、Q 三點會共線。

1. 網路上的證明(圖五)：

$\angle\mathrm{APM}+\angle\mathrm{ARM}=\ \pi$ (圓內接四邊形對角互補)

$\Rightarrow\angle\mathrm{MPB}+\angle\mathrm{CRM}=\ \pi$

$\Rightarrow\angle\mathrm{MQB}+\angle\mathrm{MQC}=\ \pi$

故 B、C、Q 三點共線　Q.E.D.

2. 網路上的證明僅限於三角形內可有三個圓內接四邊形的情況，若非如此，如圖六所示，因ΔABC內三個圓內接四邊形不存在，便不可再用前述方法，為了得到更一般的證法，我提出了下述證明：

將三圓圓心相連，得到$\Delta O_1O_2O_3$

$\because\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{PMR}$ (從圖五中很容易就可以看出來，而在圖六則是因為$\frac{1}{2}\widehat{PMR}+\frac{1}{2}\widehat{PR}=\pi$，其中$\frac{1}{2}\widehat{PR}=\angle\mathrm{PAR}$)

又$\angle O_2O_1O_3=\frac{1}{2}\widehat{PMR}$ ($\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_1O_3}$分別為$\overline{PM}$、$\overline{RM}$的中垂線)

$\therefore\angle\mathrm{BAC}=\angle O_2O_1O_3$

同理$\angle B=\angle O_1O_2O_3$，$\angle C=\angle O_1O_3O_2$

(1) Q 在$\overline{BC}$的情況(圖五)

$\because\angle O_2O_1O_3+\angle O_1O_2O_3+\angle O_1O_3O_2=\pi$

$\Rightarrow\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=\pi$

又 A、P、B 和 A、R、C 三點分別共線

設A、B、Q、C是一個四邊形

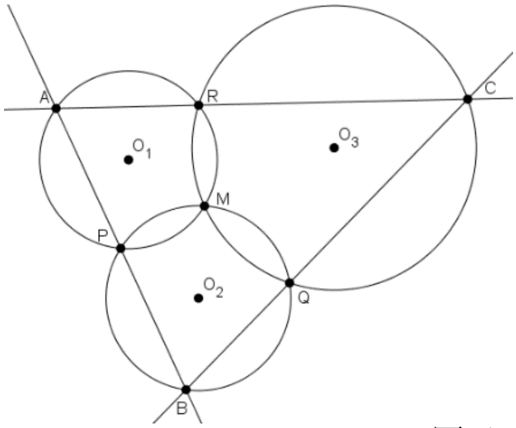
則$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}+\angle\mathrm{Q}=2\pi$

$\therefore\angle\mathrm{Q}=\pi$

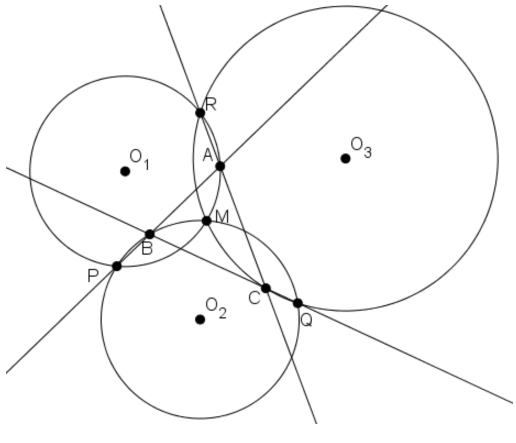
得 B、C、Q 三點共線

(2) Q 在$\overline{BC}$延長線的情況(圖六)

$\because\angle ACB=\angle O_1O_3O_2\Rightarrow\frac{1}{2}\widehat{QMR}$



圖五



圖六

又$\angle RCQ=\frac{1}{2}\widehat{QR}$

$$\therefore \angle ACB+\angle RCQ=\frac{1}{2}\widehat{QMR}+\frac{1}{2}\widehat{QR}=\pi$$

得 B、C、Q 三點共線

若非 C 點在 B、Q 中間而是 B 點在 C、Q 中間，則證法亦同 Q.E.D.

3. 由 2.的證明得：

在密克逆定理的情境中，$\Delta O_1O_2O_3 \sim \Delta ABC$

二、三角形密克定理的推廣

(一) 若 P、Q、R 三點分別位在$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上，則密克定理亦成立：

於$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上各取 P、Q、R 三點，則ΔAPR、ΔBQP、ΔCRQ的外接圓(圓O_1、圓O_2、圓O_3)交於一點(如圖七)。

證明：

設ΔAPR、ΔCRQ的外接圓交於 M

令ΔBMP 的外接圓與ΔCRQ的外接圓交於 Q'

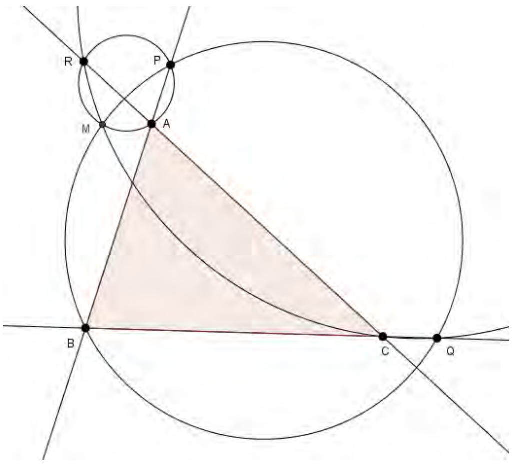
根據密克逆定理，如果三圓交於一點則

B、Q'、C 三點共線

$\therefore$ Q'位在$\overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ Q 點即為 Q'，即 B、P、M、Q 四點共圓

得ΔAPR、ΔBQP、ΔCRQ的外接圓會交於一點



圖七

Q.E.D.

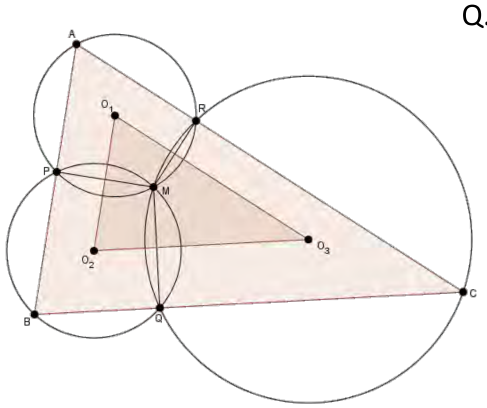
(二) 作邊長為倍數關係的相似形

1. 作邊長為ΔABC 1/2 倍的$\Delta O_1O_2O_3$

作法如下：

(1) 於ΔABC所在平面選一個點 M

(2) 自點 M 向各邊或其延長線作垂

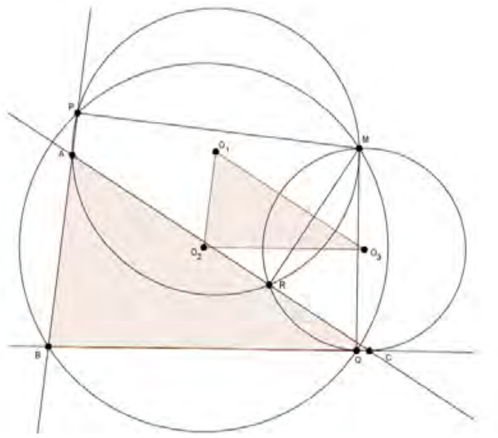


圖八

線，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上的垂足分別為 P、Q、R

(3) 作ΔAPR、ΔBPQ、ΔCQR的外接圓圓心，分別為O_1、O_2、O_3

(4) $\Delta O_1O_2O_3$即為所求(如圖八、圖九)



圖九

以下將逐步證明：

(1)以 P、Q、R 三點為垂足，分別做$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$的垂線，只要三條垂線交於一點，則$\overline{AB}//\overline{O_1O_2}$、$\overline{BC}//\overline{O_2O_3}$、$\overline{AC}//\overline{O_1O_3}$。

證明：

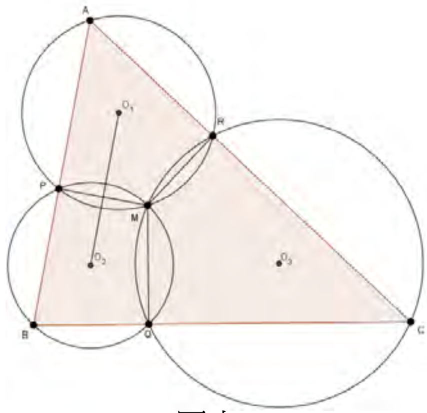
設三條以 P、Q、R 三點為垂足所作的垂線交於 K，因為$\angle APK = \angle ARK = \pi/2$，故四邊形 APKR 為圓內接四邊形，即圓$O_1$有過 K 點，同理，圓$O_2$、圓$O_3$也都會通過 K 點，即$K = M$。

$\because \overline{O_1O_2} \perp \overline{PM}$ (連心線與公弦垂直)

又$\overline{PM} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{AB}//\overline{O_1O_2}$

同理$\overline{BC}//\overline{O_2O_3}$、$\overline{AC}//\overline{O_1O_3}$。



圖十

Q.E.D.

(2) 若 P、Q、R 分別為 M 到三邊所做垂線的垂足時，$\overline{AB}//\overline{O_1O_2}$、$\overline{BC}//\overline{O_2O_3}$、$\overline{AC}//\overline{O_1O_3}$。此時$\Delta O_1O_2O_3$邊長為$\Delta ABC$的 1/2 倍

證明：

$\because \overline{PM} \perp \overline{AB}$

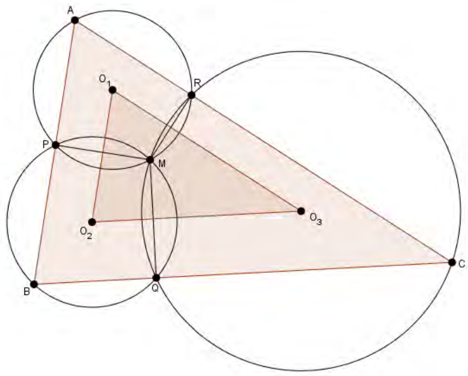
$\therefore \overline{AM} = 2\overline{O_1M}$ (A、O_1、M 三點共線)

又$\overline{AB}//\overline{O_1O_2}$

$\therefore \overline{AB} = 2\overline{O_1O_2}$

$\because \Delta ABC \sim \Delta O_1O_2O_3$

得$\Delta O_1O_2O_3$邊長為ΔABC的 1/2 倍



圖十一

Q.E.D.

發現：從作邊長 1/2 倍的相似形中，可知只要從已知點 M 向三角形三邊作垂線，就可得到用以作三圓的 P、Q、R 三點，且此三圓會交於 M 點，此時 M 點即為密克點。在之前的推廣中知道若 P、Q、R 三點位在三邊延長線上，三圓仍會交於一點，故垂足可以位在三邊及延長線上，即：

除了$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的延長線，密克點可以出現在三角形所在平面上任意處。

但是在已知ΔABC 和 M的前提下，此種作垂線的畫法所畫出的三圓只是其中一種可能，事實上還會有無限組三圓都交於 M 點，其他細節將在(四)繼續討論。

2. 作邊長為ΔABC 2 倍的ΔPQR

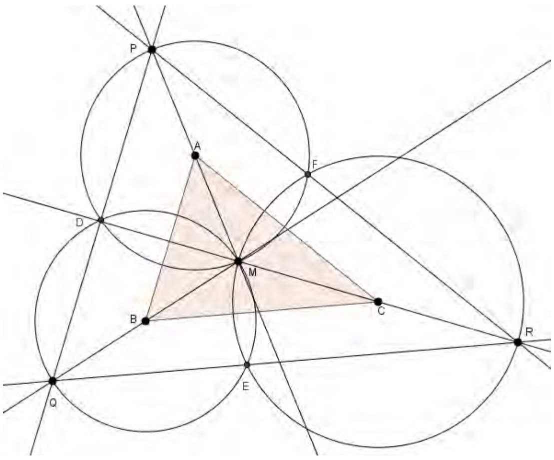
在密克逆定理的證明中，曾利用三角形與三圓心連成的三角形相似的性質。所以如果需要ΔABC的相似形，以 A、B、C 三點分別為圓心，使三圓交於一點，再以逆定理做法畫出新的三角形，前面已經證明過兩三角形相似，故得ΔABC的相似形。

作法如下：

(1) 分別以ΔABC 的三頂點為圓心，$\overline{AM}$、$\overline{BM}$、$\overline{CM}$為半徑作三圓(其中 M 點可為平面上任意點)

(2) 連$\overleftrightarrow{AM}$，交圓 A 於 P。連$\overleftrightarrow{BM}$，交圓 B 於 Q。連$\overleftrightarrow{CM}$，交圓 C 於 R。

(3) ΔPQR即為所求。



圖十二

證明：

$\because \overline{AB}//\overline{PQ}$ （$\overline{MP}$、$\overline{MQ}$皆為直徑 $\Rightarrow \overline{PQ} \perp \overline{MD}$）

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQM$

$\because \overline{MP} = 2\overline{AM}$

得ΔPQM的邊長為ΔABM的邊長的 2 倍

同理得ΔQRM和ΔPRM的邊長分別為ΔBCM和ΔACM的邊長的 2 倍

即ΔPQR的邊長為ΔABC的邊長的 2 倍

Q.E.D.

3. 邊長的倍數範圍

作邊長 1/2 倍是從「類似密克定理」的方式著手，做 2 倍則是從「類似密克逆定理」著手，故以下將分別討論此兩種做法。

(1). 類似密克定理的畫法

此畫法是已知ΔABC，於其三邊各任選一點，根據密克定理做出三個交於一點的圓形，此三圓圓心所連成的三角形就是原三角形的相似形。所以 P、Q、R 三點選取的位置決定了相似形的大小。

因為當 P、Q、R 三點在三邊延長線上時密克定理存在，所以只要 P、Q、R 三點選在離ΔABC的無限遠處，即三個外接圓也無限大，那所能繪出的相似形的邊長倍數範圍也就無上限。而此種畫法的最小倍數即為 1/2 倍。

證明如下：

已知ΔABC所在平面任意點 M，自點 M 向$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$作垂線，垂足分別為 P、Q、R，可得ΔAPR、ΔBPQ、ΔCQR的外接圓。再於$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上分別任選一點 P’、Q’、R’(非 P、Q、R)， 可得$\Delta AP'R'$、$\Delta BP'Q'$、$\Delta CQ'R'$的外接圓，為方便證明，如圖十三先只看兩組圓，即圓O_1和圓O_2、圓O_1'和圓O_2'。

在ΔAPM和ΔAP′M中

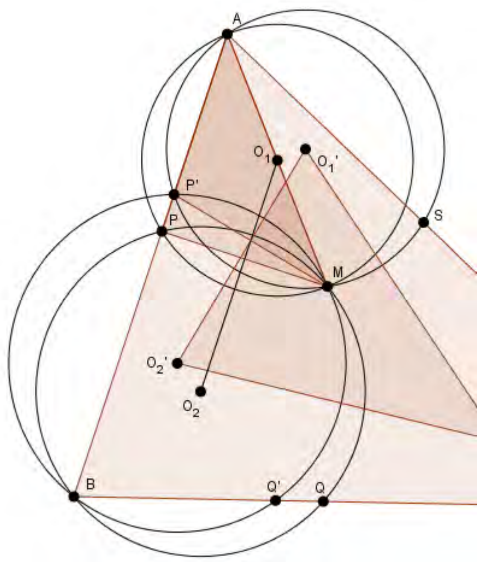
根據正弦定理有：

$$\frac{\overline{\text{AM}}}{sin\angle\text{APM}} = 2r_1 \text{，} \frac{\overline{\text{AM}}}{sin\angle\text{AP}'\text{M}} = 2r_1'$$

(其中r_1和$r_1{}'$分別是圓O_1和圓$O_1{}'$的半徑)

$\because \angle\text{AP}'\text{M} > \angle\text{APM} = \pi/2$且$\overline{AM}$為定值

$\therefore r_1{}' > r_1$



圖十三

同理在ΔBPM和ΔBP′M中

$\because \angle\text{BPM} = \pi/2 > \angle\text{BP}'\text{M}$且$\overline{BM}$為定值

$\therefore r_2{}' > r_2$ (其中r_2和$r_2{}'$分別是圓O_2和圓$O_2{}'$的半徑)

$\therefore$ 在ΔO_1MO_2和$\Delta O_1{}'MO_2{}'$中

$\because \angle O_1MO_2 = \angle O_1'MO_2'$ ($\angle O_1O_2M = \angle\text{PBM} = \angle O_1{}'O_2{}'M$，同理$\angle O_2O_1M = \angle\text{PAM} = \angle O_2'O_1{}'M$)，$\overline{O_1{}'M} > \overline{O_1M}$，$\overline{O_2{}'M} > \overline{O_2M}$

$\therefore \overline{O_1{}'O_2{}'} > \overline{O_1O_2}$

又$\Delta O_1O_2O_3 \sim \Delta O_1{}'O_2{}'O_3{}' \sim \Delta\text{ABC}$

得$\overline{O_1{}'O_2{}'} > \overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2{}'O_3{}'} > \overline{O_2O_3}$、$\overline{O_1{}'O_3{}'} > \overline{O_1O_3}$

意即當 P、Q、R 皆為 M 點到三邊的垂足時，所得$\Delta O_1O_2O_3$的邊長為最小情況，且其邊長為ΔABC的 1/2 倍。 Q.E.D.

(2).類似密克逆定理的畫法

此畫法是以ΔABC的三頂點為圓心，做三個交於一點的圓形，於這三圓上可根據密克定理得到一個新的三角形(ΔPQR)，且相似於ΔABC。

此畫法得到的ΔPQR，其邊長將限於 0 到 2 倍之間，因為只要 P 點選在 M 點上，則ΔPQR不存在，故其邊長可視為 0，得倍數下限為 0 倍。 $\boxed{\text{而上限則為 2 倍。}}$

證明如下：

如圖十四，已知ΔPQR為邊長是ΔABC的 2 倍的三角形，再於圓 A 上任選一點 P'(非 P 點)，得$\Delta P'Q'R'$

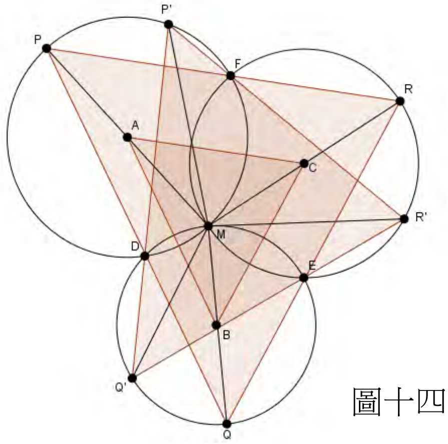
$\because \Delta ABC \sim \Delta PQR \sim \Delta P'Q'R'$

$\therefore \overline{PM} > \overline{P'M}$ ($\overline{PM}$為直徑) $\Rightarrow \overline{PR} > \overline{P'R'}$

同理 $\overline{QR} > \overline{Q'R'}$、$\overline{PQ} > \overline{P'Q'}$

其中$\overline{PR} = 2\overline{AC}$、$\overline{QR} = 2\overline{BC}$、$\overline{PQ} = 2\overline{AB}$

即ΔPQR的邊長最大是ΔABC的 2 倍



圖十四

Q.E.D.

(三)$\overleftrightarrow{AO_1}$、$\overleftrightarrow{BO_2}$、$\overleftrightarrow{CO_3}$交於一點的條件

ΔABC根據密克定理會得到的$\Delta O_1O_2O_3$

1.若 P、Q、R 三點分別為密克點到三邊所作垂線的垂足，則$\overleftrightarrow{AO_1}$、$\overleftrightarrow{BO_2}$、$\overleftrightarrow{CO_3}$會交於一點

證明如下(圖十五)：

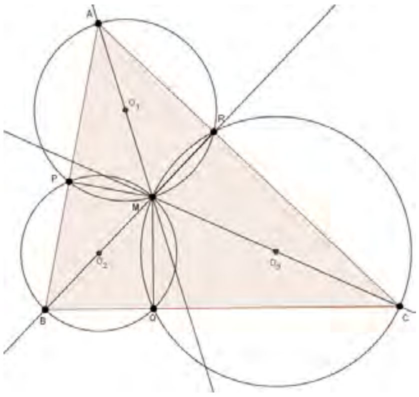
$\angle APM = \pi/2 \Rightarrow \overline{AM}$為圓$O_1$的直徑⇒A、$O_1$、M 三點共線

同理 B、O_2、M 三點和 C、O_3、M 三點分別共線

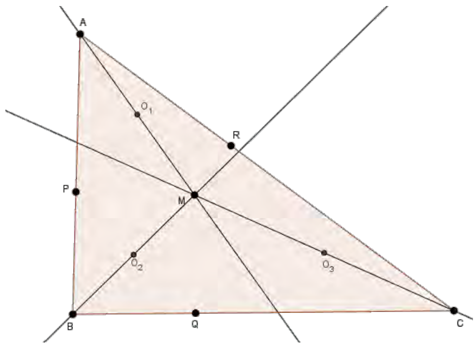
即$\overleftrightarrow{AO_1}$、$\overleftrightarrow{BO_2}$、$\overleftrightarrow{CO_3}$會交於密克點 Q.E.D.

2.若$\overleftrightarrow{AO_1}$、$\overleftrightarrow{BO_2}$、$\overleftrightarrow{CO_3}$交於一點，則此點必為密克點，且 P、Q、R 三點分別為密克點到三邊所作垂線的垂足，證明如下(圖十六)：

$\overleftrightarrow{AO_1}$、$\overleftrightarrow{BO_2}$、$\overleftrightarrow{CO_3}$交於一點，則此點也會是三圓的交點，但三圓只會交於密克點，所以$\overleftrightarrow{AO_1}$、$\overleftrightarrow{BO_2}$、$\overleftrightarrow{CO_3}$交於密克點。根據前一個證明，P、Q、R 三點分別為密克點到三邊所作線的垂足。 Q.E.D.



圖十五



圖十六

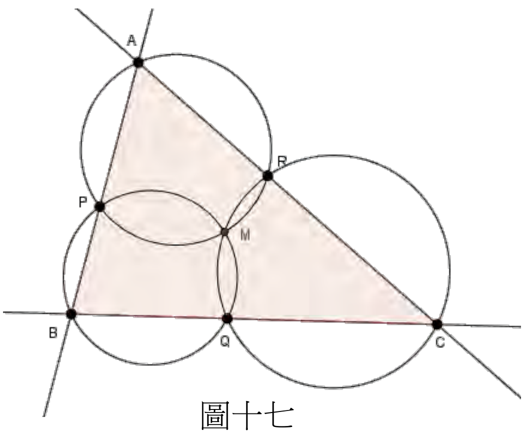
(四) 密克點固定則O_1、O_2、O_3必分別位於三角形頂點到密克點的連線之中垂線上

因為只要從平面上任選一點向各邊做垂線便可得到 P、Q、R 三點，此三點所繪出的三圓必會交於該點，所以在平面上的任意點都可以成為密克點。既然任意點都可以成為密克點，那在同一個點上，我想畫出更多組都交於該點的三圓。

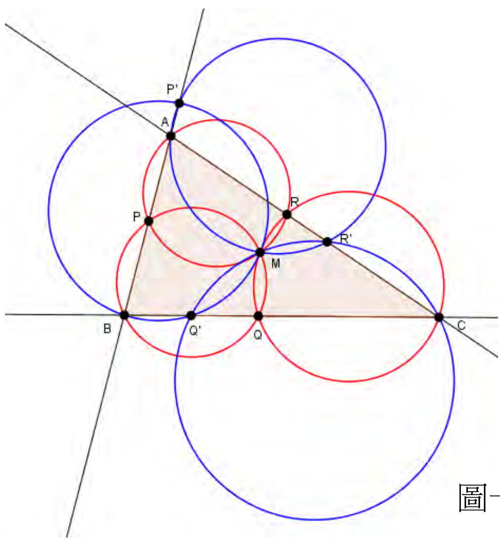
作法如下：

> 如圖十七，已知ΔABC和 M 點，於$\overleftrightarrow{AB}$上任取一點 P(不可選在 A 或 B)，作ΔAPM的外接圓，定此圓與$\overleftrightarrow{AC}$的交點為 R，再作ΔPMB的外接圓，定此圓與$\overleftrightarrow{BC}$交於 Q，最後作ΔRQC的外接圓，即得到交於一點的三圓。(其中 Q、R 皆不可位在 A、B 或 C)

故隨 P 點選得不同，該組的三圓位置大小也會各不相同。如圖十八，紅色和藍色各為一組選法所畫出的交於一點的三圓。

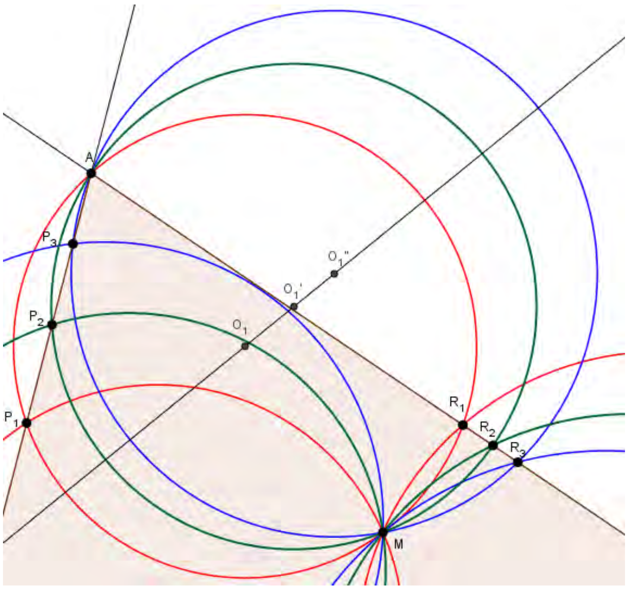


圖十七



圖十八

而我進一步發現，不管 P 點選在哪，圓O_1的圓心都會位在同一條直線上。如圖十九，即為三個不同的 P 點所造成的三個O_1連線。



圖十九

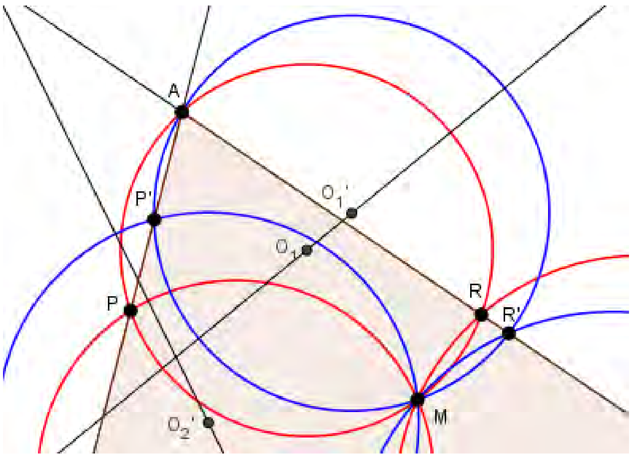
如果密克點固定，則於$\overleftrightarrow{AB}$上取任意點 P，根據前述做法得到的三圓，它們的圓心O_1、O_2、O_3必分別位在頂點到密克點連線中垂線。

證明(如圖二十)：

圓O_1為$\overleftrightarrow{AB}$上任一點 P 與 A、M 的外接圓，故其圓心為$\overline{AP}$、$\overline{AM}$、$\overline{PM}$中垂線交點，又ΔABC與 M 點都不會因為 P 點的位置而有所改變，所以$\overline{AM}$的中垂線是固定的，也就是圓O_1的圓心只能位在該直線上。

同理圓O_2、圓O_3的圓心分別位於$\overline{BM}$、$\overline{CM}$的中垂線。

Q.E.D.

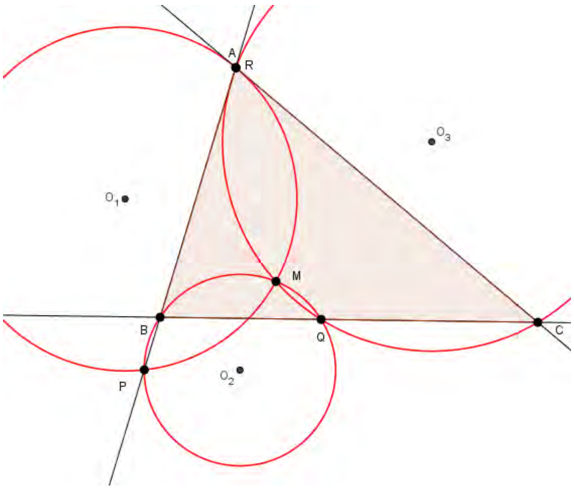


圖二十

然而，並非這三條中垂線上的所有點，都是圓心可能出現的。例如當 P 點選在 A 點上時，ΔAPM的外接圓不存在，自然也不會有圓心，所以$\overline{AM}$的中垂線就會有一點不是圓心的軌跡。

如圖二十一，在移動 P 點時，總有一種情況是 R 點與 A 點重疊，此時雖然ΔAPM的外接圓看似存在，但事實上我們討論的是在「密克定理」敘述下的情況，所以其圓心應當視為ΔAPR的外接圓，但 R 點與 A 點重疊，所以此時沒有外接圓，$\overline{AM}$的中垂線上也因此有另一處不是圓心的軌跡。

所以不能說圓心軌跡為直線，只能說軌跡必在頂點到密克點連線的中垂線上。



圖二十一

(五) 三圓的圓心軌跡

當密克點固定，移動點 P，得到三個圓的圓心軌跡為ΔABC三頂點到密克點的連線的中垂線，而這三條中垂線恰可交成一固定三角形。此三中垂線間兩兩相交的點不會改變，而這三個交點也就是ΔAMB、ΔAMC、ΔBMC的外心 D、E、F。(圖二十二)

1. 當密克點選在ΔABC的垂心上時，可得$\Delta \mathrm{DEF} \cong \Delta \mathrm{ABC}$ (圖二十三)

   證明：

   $\overleftrightarrow{\mathrm{AM}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{BM}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{CM}}$分別為三角形的高

   且$\overline{DF}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$分別為$\overline{AM}$、$\overline{BM}$、$\overline{CM}$的中垂線

   $\overleftrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \overline{DF}$且$\overleftrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{DF}//\overline{BC}$

   同理$\overline{DE}//\overline{AC}$、$\overline{EF}//\overline{AB}$

   故$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{E}$，$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{F}$，$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{D}$　　$\therefore \Delta \mathrm{ABC} \sim \Delta \mathrm{EFD}$

再作過A、B、C且分別平行$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的直線，兩兩交於 G、I、H

則$\angle H = \angle A = \angle E$，$\angle I = \angle B = \angle F$，$\angle G = \angle C = \angle D$

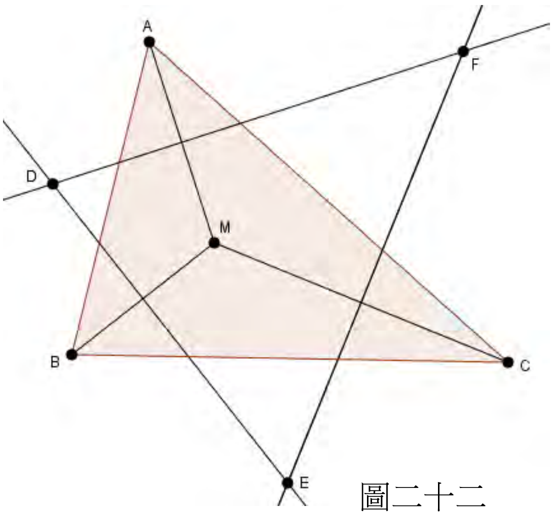
$\therefore \Delta ABC \sim \Delta HIG \sim \Delta EFD$

又ΔHIG的邊長為ΔABC的邊長的 2 倍

$\because \overline{BS} = \overline{SM}$，$\overline{AT} = \overline{TM}$，$\overline{CR} = \overline{RM}$

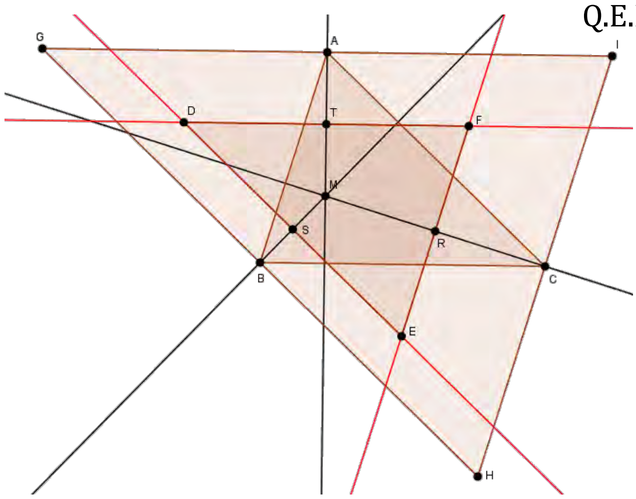
$\therefore \Delta DEF$的邊長為ΔHIG的邊長的 $1/2$ 倍

$\therefore \Delta DEF \cong \Delta ABC$



圖二十二

Q.E.D.



圖二十三

2. 圓心軌跡所位在的中垂線的交點軌跡

已知ΔABC和 M 點，移動點 P 所得到的三外接圓圓心軌跡位在三直線上，而三直線必會有三個交點。

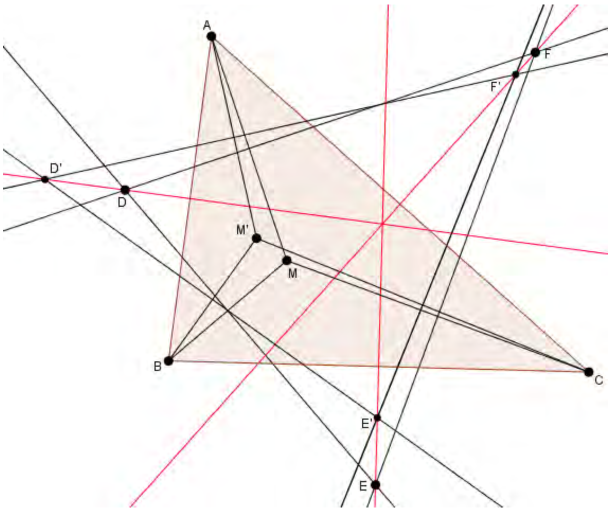
若 M 也任意移動，則三條直線的交點又會出現三條直線軌跡，且分別為ΔABC的三邊中垂線。(如圖二十四)

證明：

三條軌跡的交點又是「三頂點到 M 連線的中垂線」的交點，因為三角形三邊中垂線必交於一點，所以圓O_1的圓心軌跡和圓O_3的圓心軌跡交點F($\overline{AM}$和$\overline{CM}$的中垂線交點)，在$\overline{AC}$的中垂線上。如果在該平面上另選 M’，則$\overline{AM'}$和$\overline{CM'}$的中垂線交點F'依舊會

在$\overline{AC}$的中垂線上，所以$\overleftrightarrow{FF'}$即為$\overline{AC}$的中垂線，同理，$\overleftrightarrow{DD'}$、$\overleftrightarrow{EE'}$也分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的中垂線。如圖二十三中的紅線為圓心軌跡的交點軌跡，也恰為三邊的中垂線。

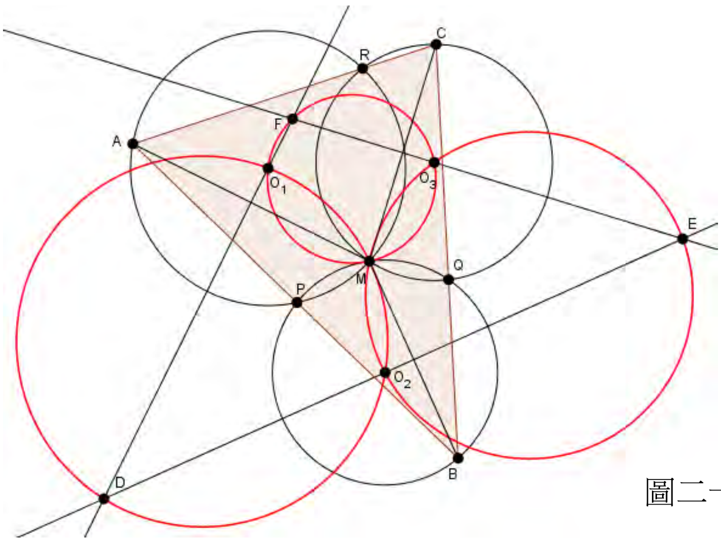
Q.E.D.



圖二十四

3. 自逆定理出發的三條圓心軌跡的交點的圓形軌跡

(1) 現在只剩下ΔABC為可變物件，但如果隨意改變ΔABC，則其所產生的圓心軌跡自然也毫無章法，所以我將ΔABC放入密克逆定理的條件中：已知三圓，依密克逆定理得到ΔABC，因為A點為圓O_1上的動點，移動A則ΔABC的大小也會改變，三圓圓心軌跡交點也隨著改變，這三個交點在此條件之下會形成三個圓形軌跡(如圖二十五中的紅線)。



圖二十五

若圓O_1、圓O_2、圓O_3交於點 M，依密克逆定理得到的ΔABC，其三條圓心軌跡的交點(D、E、F)會因圓O_1上點 A 的選取不同，而得到三個圓形軌跡(圖二十五中的紅線)。

證明(圖二十六)：

(以下若方程式為$A = B$的形式，代表A、B重疊)

$\because$ 若 C 點移動到 R 即 $C = R$ 時 $\Rightarrow F = O_1$

同理若 $A = R$ 時 $\Rightarrow F = O_3$

若 $A \ = M$ 時，所有點皆不會產生，故 F 可視為在 M 點上

$\therefore O_1$、M、O_3即為其中兩圓心軌跡交點的三個可能位置，並可決定一外接圓

$\because\ \Delta AMC \sim \Delta O_1MO_3$（$\angle MAC = \angle MO_1O_3$，$\angle ACB = \angle O_1O_3M$）

$\therefore \angle O_1FO_3 =$ 定值 $= \frac{1}{2}\widehat{O_3MO_1}$ $(F = O_1)$ [一固定三角形其任兩邊中垂線的夾角為定值]

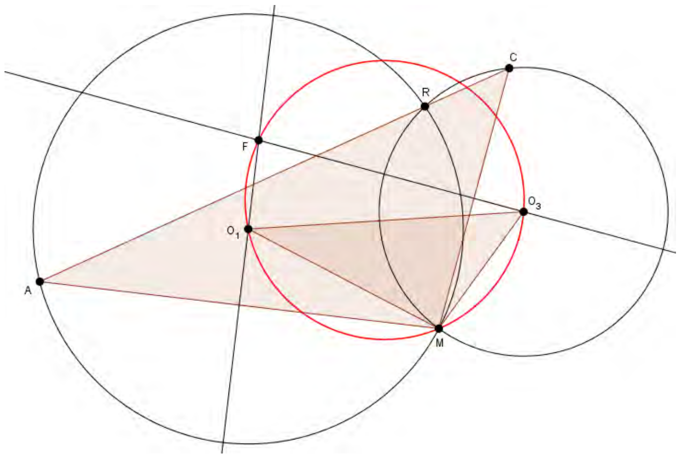
又$\overline{AM}$和$\overline{CM}$的中垂線必分別過O_1和O_3

$\therefore \angle O_1FO_3$為$\Delta O_1MO_3$的外接圓的圓周角

即兩直線軌跡交點 F 必在ΔO_1MO_3的外接圓上

另外兩個交點也同理各在其所屬的圓上

Q.E.D.



圖二十六

(2) 如果三個軌跡兩兩間的交點(D、E、F)連成一個三角形，那三個圓形軌跡就會變成該三角形的三個交於密克點的圓，且隨著 A 點在圓O_1上的位置改變，D、E、F 也會因此分別在三個軌跡圓上移動(如圖二十七)，且ΔDEF滿足以下結果。

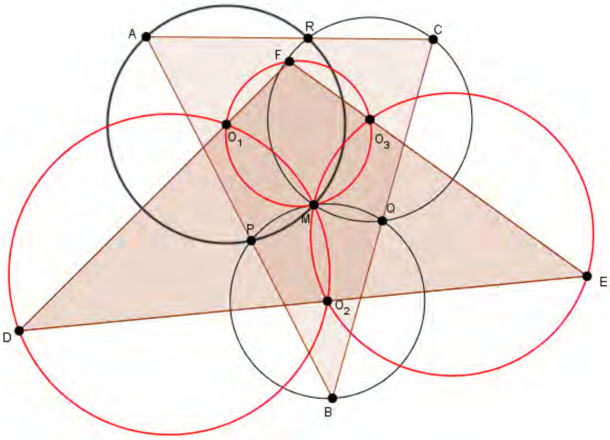
只要 A 點在圓O_1上，則$\Delta DEF \sim \Delta D'E'F'$

證明:

∵ D、E、F 是$\overline{AM}$、$\overline{BM}$、$\overline{CM}$的中垂線的交點

又已知 D、E、F 必分別在ΔO_1MO_2、ΔO_1MO_3、ΔO_2MO_3的外接圓

∴ $\angle D=\frac{1}{2}\widehat{O_1O_2}$、$\angle E=\frac{1}{2}\widehat{O_2O_3}$、$\angle F=\frac{1}{2}\widehat{O_1O_3}$



圖二十七

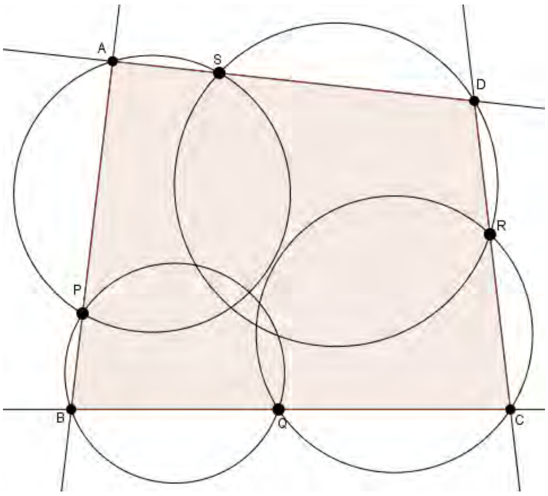
Q.E.D.

三、n 邊形的密克定理與密克逆定理

(一) n 邊形的密克定理

1. 將密克定理推廣到四邊形

任意四邊形 ABCD 上，P、Q、R、S 分別位於$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$，ΔAPS、ΔBQP、ΔCQR、ΔDRS的外接圓(圓O_1、圓O_2、圓O_3、圓O_4)不一定會交於一點(如圖二十八)。



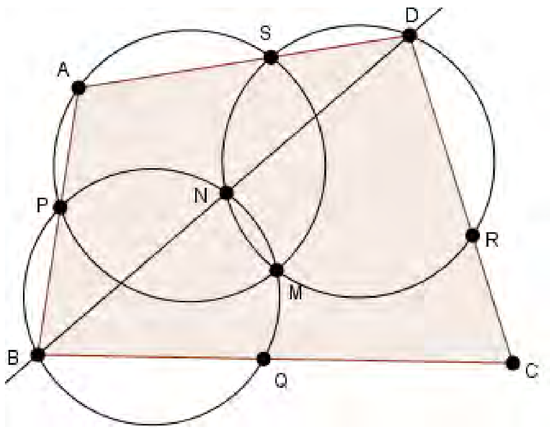
圖二十八

若四圓交於一點代表任選其中的三圓也必交於一點，故先考慮四邊形內三圓交於一點的情況。若ΔAPS、ΔBQP、ΔDRS的外接圓交於一點，代表ΔABD三邊上的選點符合密克定理，除 S、P 是已知點之外，尚有一點是在$\overline{BD}$上，這樣才會符合密克定理所說的：「P、 Q、R 三點分別位於$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上」。而ΔBQP、ΔDRS的外接圓的另一個交點就是該四邊形的密克點。

於四邊形 ABCD 的四邊上各任取一點 P、Q、R、S，若ΔBQP、ΔDRS的外接圓交點之一在$\overleftrightarrow{BD}$上，則ΔAPS、ΔBQP、ΔDRS、ΔCQR的外接圓交於一點。(如圖二十九)

證明：

在ΔABD中，N、P、S 分別為$\overline{BD}$、$\overline{AB}$、$\overline{AD}$上的點，根據密克定理，三圓會交於一點，因為ΔBQP、ΔDRS的外接圓交於 N、M，又 N 點為$\overline{BD}$上的點。



圖二十九

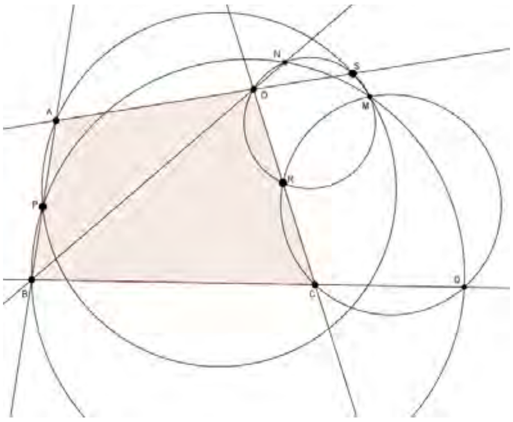
在ΔBCD中三邊有 Q、R、N 三點，根據密克定理，ΔBQP、ΔDRS、ΔCQR的外接圓會交於一點，因為ΔBQP、ΔDRS 的外接圓交點為 N、M，而 N 在邊上，所以其三圓交點只能是 M。如果ΔBQP、ΔDRS 的外接圓相切，則交點就是 N，即ΔCQR的外接圓會過 N 點，此時 N 亦可稱為 M。

得若ΔBQP 和ΔDRS 的外接圓有一交點位在$\overline{BD}$的話，ΔAPS、ΔBQP、ΔDRS、ΔCQR的外接圓交於 M 點，該點即為密克點。

Q.E.D.

2. 四邊形的密克定理之推廣

在之前的推廣中，P、Q、R 三點可位在三邊的延長線上。若四邊形的 P、Q、R、S 位在$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{AD}$，只要其對角圓的交點之一在該四邊形的對角線延長線上，則四圓會交於一點。以ΔABD舉例 (如圖三十)，因為之前已經證過三角形的 P、Q、R 三點可以分別位在三邊延長線上，所以ΔAPS、ΔBQP、ΔDNS的外接圓會交於一點 M，與四-(一)的證明相同，根據推廣的密克定理ΔRCQ的外接圓也會過 M。



圖三十

若ΔBQP、ΔDRS的外接圓交點之一(有可能兩個交點、一個交點或不相交)不在$\overleftrightarrow{BD}$上，則ΔAPS、ΔBQP、ΔDRS也不會交於一點，那就無法四圓共點了。所以只有在「ΔBQP、ΔDRS的外接圓交點之一在$\overleftrightarrow{BD}$上」的前提下，四圓才會共點。

3. 五邊形的密克定理之推廣

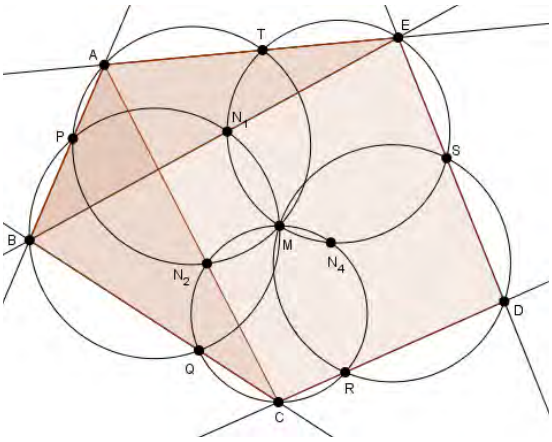
已知五邊形 ABCDE，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{AE}$上有 P、Q、R、S、T 五點，與四邊形相同，ΔAPT、ΔBQP、ΔCQR、ΔDRS、ΔEST的外接圓並非必定交於一點，所以我想找出什麼情況下那五個外接圓會交於一點，而與四邊形不同的是，五邊形需要兩組對角圓(中間只隔一頂點)的交點都在所屬的對角線上，則五圓才會共點。

以ΔABE和ΔABC作舉例，若ΔBQP、ΔEST的交點之一N_1位在對角線$\overleftrightarrow{BE}$上，根據推廣的密克定理，ΔAPT、ΔBQP、ΔEST的外接圓會交於一點 M，又若ΔAPT、ΔCQR的外接圓的交點之一N_2位在對角線$\overleftrightarrow{AC}$上，根據推廣的密克定理，ΔAPT、ΔBQP、ΔCQR的外接圓會交於一點，因為ΔAPT、ΔBQP的外接圓會交於 M 點，所以ΔCQR的外接圓只能過 M 點。至此，可得 ΔDRS的外接圓也會過 M 點

證明(圖三十一)：

ΔAPT、ΔCQR、ΔEST的外接圓交於點 M 則ΔACE 滿足密克定理，即ΔCQR、ΔEST的外接圓除 M 點之外另一個交點N_4在對角線$\overleftrightarrow{CE}$上，所以ΔCQR、ΔDRS、ΔEST的外接圓交於一點(根據密克定理)，得ΔDRS 的外接圓過 M 點 Q.E.D.

所以只要兩組對角圓都有一交點在自己所屬的對角線上，則五圓會共點，反之，則不會共點。



圖三十一

4. n 邊形的密克定理之推廣(其中 n> 3)

> 若在多邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n$中，$P_1$、$P_2$、$P_3\cdots P_{n-1}$、$P_n$ 分別位於 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ $\cdots$ $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overleftrightarrow{A_n\ A_1}$，則$\Delta\ A_1P_1P_n$、$\Delta\ A_2P_1P_2$、$\Delta\ A_3P_2P_3\cdots\Delta\ A_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$、$\Delta\ A_nP_{n-1}P_n$的外接圓共點的條件是「有$\mathrm{n}-3$ 個只隔一頂點的對角圓兩交點之一各位在$\mathrm{n}-3$條自己所屬的對角線上 ($\overleftrightarrow{A_2A_n}$、$\overleftrightarrow{A_3A_1}$、$\overleftrightarrow{A_4A_2}\cdots\overleftrightarrow{A_{n-5}A_{n-3}}$、$\overleftrightarrow{A_{n-4}A_{n-2}}$ 上分別有對角圓的交點 N_1、N_2、$N_3\cdots N_{n-1}$、N_n)」。(可參考圖三十三)

證明：

(1) 從$\Delta\ A_1\ A_2\ A_n$出發，則有對角線$\overleftrightarrow{A_2A_n}$、$\overleftrightarrow{A_3A_1}$、$\overleftrightarrow{A_4A_2}\cdots\overleftrightarrow{A_{n-5}A_{n-3}}$、$\overleftrightarrow{A_{n-4}A_{n-2}}$ ，且其上分別有N_1、N_2、$N_3\cdots N_{n-3}$，則若$\Delta\ A_2P_1P_2$、$\Delta\ A_nP_nP_{n-1}$的外接圓交點之一N_1在$\overleftrightarrow{A_2A_n}$，在$\Delta\ A_1\ A_2A_n$中根據密克定理，$\Delta\ A_1P_1P_n$、$\Delta\ A_2P_1P_2$、$\Delta\ A_nP_nP_{n-1}$的外接圓會交於一點，因為$N_1$在$\overleftrightarrow{A_2A_n}$上，所以該交點是另外一點 M(當然，M 和$N_1$重疊也是有可能的，即密克點在邊上的情況)。

(2) 接著因為$\Delta\ A_1P_1P_n$、$\Delta\ A_3P_2P_3$的外接圓交點之一N_2位在$\overleftrightarrow{A_3A_1}$，在$\Delta\ A_2\ A_1\ A_3$根據密克定理可推得$\Delta\ A_1P_1P_n$、$\Delta\ A_2P_1P_2$、$\Delta\ A_3P_2P_3$的外接圓會交於一點，與(1)同理，該交點不會是$N_2$，又$\Delta\ A_1P_1P_n$、$\Delta\ A_2P_1P_2$的外接圓的交點除$P_1$之外只剩下 M，故得$\Delta\ A_3P_2P_3$的外接圓會過 M 點。

(3) 同理，$\Delta\ A_nP_nP_{n-1}$、$\Delta\ A_1P_1P_n$、$\Delta\ A_2P_1P_2\cdots\Delta\ A_{n-3}P_{n-4}P_{n-3}$、$\Delta\ A_{n-2}P_{n-3}P_{n-2}$的外接圓都會交於 M 點。

(4) 現在只差不確定$\Delta\ A_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$的外接圓會不會過 M 點。

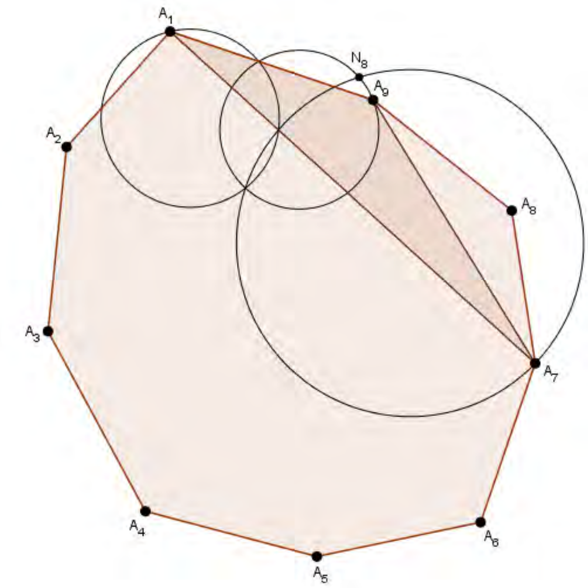
此處只要$\Delta\ A_nP_{n-1}P_n$、$\Delta\ A_{n-2}P_{n-3}P_{n-2}$的外接圓交點之一$N_{n-1}$位在$\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$上，則根據推廣的密克定理， $\Delta\ A_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$的外接圓會過 M 點。進一步說明如下：

任意一個 n 邊形都可以拆成$n-2$個由頂點 A_1組成的三角形(如圖三十二)，在$\Delta\ A_1\ A_{n-2}\ A_{n-1}$中，已知$\Delta\ A_1P_1P_n$、$\Delta\ A_nP_nP_{n-1}$、$\Delta\ A_{n-2}P_{n-3}P_{n-2}$的外接圓交於 M 點，根據密克逆定理，$\Delta\ A_nP_nP_{n-1}$與$\Delta\ A_{n-2}P_{n-3}P_{n-2}$的外接圓的交點$N_{n-1}$，會在$\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$上。所以$\Delta\ A_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$的外接圓會過 M 點。

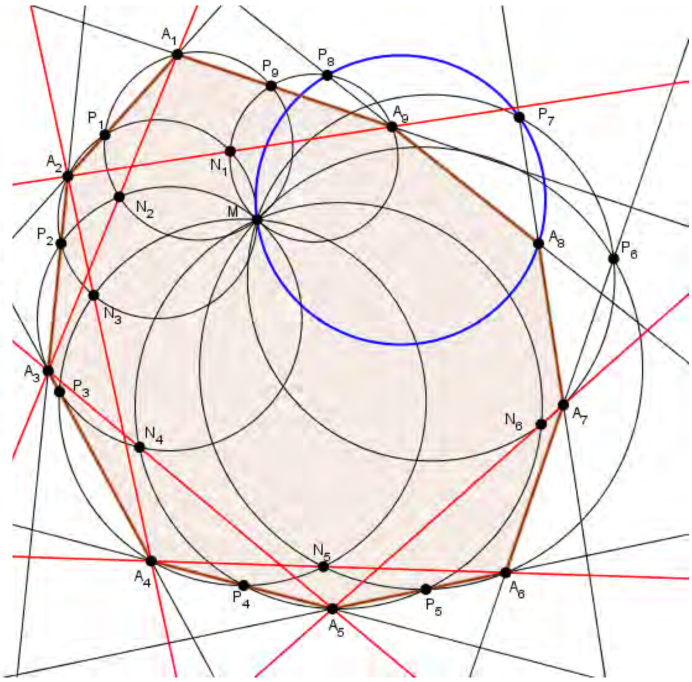
(5) 得 n 個圓會交於一點。

Q.E.D.

以九邊形為例，圖三十三是九邊形的密克定理，其中紅線是對角線，藍圓是$\Delta\ A_8P_7P_8$的外接圓。



圖三十二



圖三十三

(二) n 邊形的密克逆定理(其中 n > 3)

設圓O_1、圓$O_2\cdots$圓O_{n-1}、圓O_n交於點 M，而P_1、$P_2\cdots P_{n-1}$、P_n則是圓O_1與圓O_2、圓O_2與圓$O_3\cdots$圓O_{n-1}與圓O_n、圓O_1與圓O_n的另一個交點，在圓O_1上任取一點A_1，$\overleftrightarrow{A_1P_1}$與圓$O_2$交於點$A_2$、$\overleftrightarrow{A_2P_2}$與圓$O_3$交於點$A_3$、$\overleftrightarrow{A_3P_3}$與圓$O_4$交於點$A_4\cdots\overleftrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}$與圓$O_n$交於點$A_n$，則$A_1$、$P_n$、$A_n$三點會共線。

證明：

與密克逆定理的證法類似，得$\angle A_1 = \angle O_n O_1 O_2$、$\angle A_2 = \angle O_1 O_2 O_3$、$\angle A_3 = \angle O_2 O_3 O_4$、

$\cdots \angle A_{n-1} = \angle O_{n-2} O_{n-1} O_n$、$\angle A_n = O_{n-1} O_n O_1$

在此處也和三角形的密克逆定理證明一樣，分成P_n在$\overline{A_1 A_n}$上和在其延長線上來討論，

1. P_n在$\overline{A_1 A_n}$上

$\because \angle A_1 P_n M = \angle A_2 P_1 M = \angle A_3 P_2 M = \cdots = \angle A_{n-1} P_{n-2} M = \angle A_n P_{n-1} M$

$\therefore \angle A_1 P_n M + \angle A_n P_n M = \angle A_n P_{n-1} M + \angle A_n P_n M = \pi$

得A_1、P_n、A_n三點會共線

2. P_n在$\overline{A_1 A_n}$其延長線上

設A_n在A_1、P_n中間，不失一般性

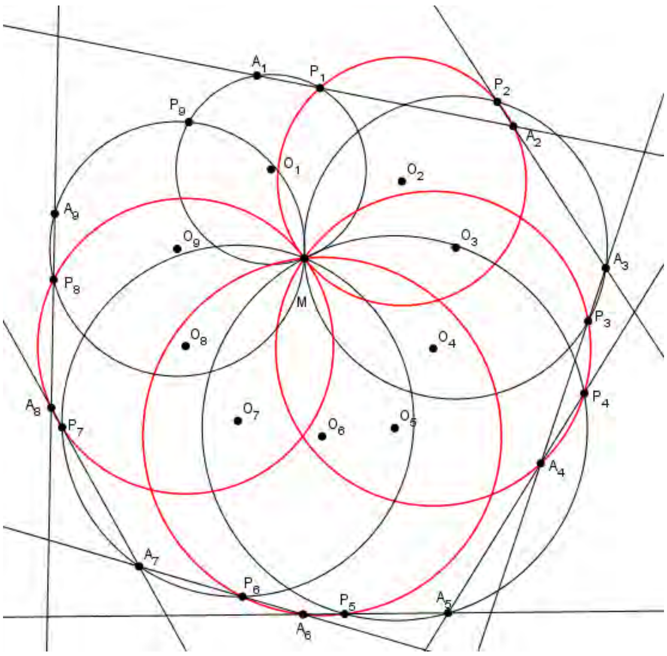
$\because \angle A_1 A_n A_{n-1} = \angle O_{n-2} O_{n-1} O_n = \frac{1}{2} P_n \widehat{M P}_{n-1}$，$\angle P_n A_n A_{n-1} = \frac{1}{2} \widehat{P_n P_{n-1}}$

$\therefore \angle A_1 A_n A_{n-1} + \angle P_n A_n A_{n-1} = \pi$

得A_1、P_n、A_n三點會共線，若是A_1在A_n、P_n中間則證法亦同

Q.E.D.

如圖三十四是九個圓交於一點的情況，可以發現A_1、P_9、A_9三點會共線。(其中紅色圓形是為了方便區分圓形)



圖三十四

伍、 研究結果

一、密克定理的證明

本研究從維基百科的密克定理作發想，卻發現網路上找得到的證明都只限於特殊狀況，可是定理的敘述顯然不只網路所證明的情況，所以我進一步提出證明，看看是不是在符合密克定理敘述中的所有條件之下，密克定理都會存在，結果確實得證，所以只要密克點位在平面上除了 A、B、C 三點與三邊延長線上(不包括三邊)之外任意處，密克定理都成立。

二、密克逆定理的證明

密克逆定理之網路證明僅限於特殊的狀況，而我則利用相似性質，證明在符合定理敘述的所有情況都會成立。

三、三角形密克定理的推廣

(一) 若 P、Q、R 三點位在$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上，則ΔAPR、ΔBQP、ΔCRQ的外接圓會交於一點，該點即為密克點。

(二) 藉密克定理和密克逆定理中的「三圓心連成的三角形和ΔABC相似」性質，作相似三角形的方法如下：

1. 作邊長為ΔABC 1/2 倍的ΔPQR：

(1) 於ΔABC所在平面選一個點 M

(2) 自點 M 向各邊所在的直線作垂線，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上的垂足分別為 P、Q、R

(3) 作ΔAPR、ΔBPQ、ΔCQR的外接圓圓心，分別為O_1、O_2、O_3

(4) $\Delta O_1O_2O_3$即為所求

2. 作邊長為ΔABC 2 倍的ΔPQR：

(1) 分別以ΔABC 的三頂點為圓心，$\overline{AM}$、$\overline{BM}$、$\overline{CM}$為半徑作三圓。

(2) 連$\overleftrightarrow{AM}$，交圓 A 於 P。連$\overleftrightarrow{BM}$，交圓 B 於 Q。連$\overleftrightarrow{CM}$，交圓 C 於 R。

(3) ΔPQR即為所求。

3. 三角形所在平面上的任意點除了 A、B、C 和三邊延長線上的點，皆可成為密克點，即密克點可在三角形所在平面的任意位置。

4. 類似密克定理的畫法，是在原三角形的三邊上選三點再作三圓，其邊長的倍數範圍沒有最大的範圍，而其最小的倍數範圍是 1/2 倍。

5. 類似密克逆定理的畫法，是以原三角形的三頂點為圓心，作三個交於一點的圓，其邊長的倍數最小為 0，而其最大為 2 倍。

6. $\overleftrightarrow{AO_1}$、$\overleftrightarrow{BO_2}$、$\overleftrightarrow{CO_3}$交於一點的條件是 P、Q、R 分別為 M 點到$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$垂線的垂足。

7. 在三角形下探討的各種軌跡

(1) ΔABC與密克點固定，根據我所提出的畫法可得到 P、Q、R 三點，根據密克定理敘述利用此三點所畫出的三個外接圓會交於原本的密克點。

(2) ΔABC與密克點固定，改變 P 點在$\overleftrightarrow{AB}$上的位置，則O_1、O_2、O_3的移動軌跡位在密克點到三頂點連線的中垂線，雖然中垂線上幾乎都是軌跡，但還是有幾點是不存在的。

(3) 密克點在ΔABC 的垂心上時，「圓心軌跡所位在的三條中垂線」交成的ΔDEF，會有$\Delta DEF \cong \Delta ABC$的性質。

(4) 若使密克點任意移動，「圓心軌跡所位在的三條中垂線」的交點D、E、F，其軌跡分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中垂線。

(5) 若將ΔABC放進密克逆定理的情境中。此時ΔABC的三條圓心軌跡已被視為三角形的基本性質，因為 A 點在圓O_1上移動，ΔABC也會跟著一起變動，三條圓心軌跡隨之改變，而三條圓心軌跡所位在的三條中垂線的交點，恰好是三個圓，而且這三個圓分別是ΔO_1MO_3、ΔO_1MO_2、ΔO_2MO_3的外接圓。

(6) 承(5)，此時DEF~$\Delta D'E'F'$，意即不管 A 點在圓O_1上哪一個位置，$\angle$D、$\angle$E、$\angle$F皆為定值。

四、若於 n 邊形的 n 邊或其延長線上各取一點 P，則$\Delta\ A_1P_1P_n$、$\Delta\ A_2P_1P_2$、$\Delta\ A_3P_2P_3$ $\cdots\Delta\ A_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$、$\Delta\ A_nP_{n-1}P_n$的外接圓共點的條件是「有$n-3$個只隔一頂點的對角圓交點之一」各位在只隔一點的對角線上。

五、設圓O_1、圓$O_2\cdots$圓O_{n-1}、圓O_n交於點 M，而P_1、$P_2\cdots P_{n-1}$、P_n則是圓O_1與圓O_2、圓O_2與圓$O_3\cdots$圓O_{n-1}與圓O_n、圓O_1與圓O_n的另一個交點。在圓O_1上任取一點A_1，$\overleftrightarrow{A_1P_1}$與圓$O_2$交於點$A_2$、$\overleftrightarrow{A_2P_2}$與圓$O_3$交於點$A_3$、$\overleftrightarrow{A_3P_3}$與圓$O_4$交於點$A_4\cdots\overleftrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}$與圓$O_n$交於點$A_n$，則$A_1$、$P_n$、$A_n$三點會共線。

陸、 討論

一、文獻探討

(一) 密克定理是 Auguste Miquel 於西元 1838 年發表的諸多定理中的其一，而我只有找到一些與先前講的網路證明極為相似的證明，但因為他們的證明需有三角形內有三個圓內接四邊形的侷限性，所以我各補充了一些證明，使密克定理在符合定理敘述下的所有狀況都成立。

(二) 我也有看到曾經有人將密克定理推廣到四邊形，但並不是證明四邊形的密克定理，而是就三角形在密克定理下現有的性質，說明四邊形在「四圓交於一點」也會有相同的性質，但卻沒有說明四邊形中四圓交於一點的「條件」。

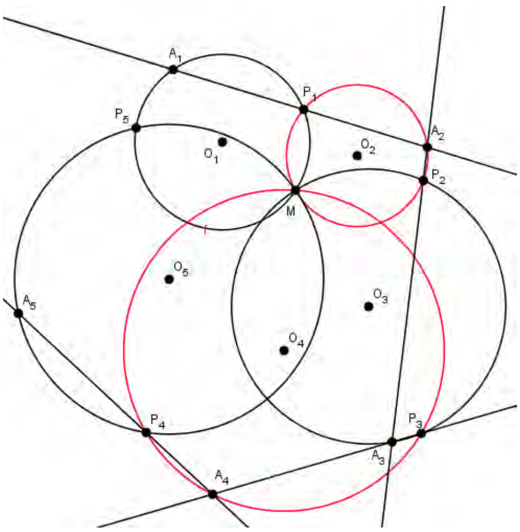
(三) 密克定理在多邊形的探討在網路上就沒有資料了，不過我藉著先前三角形的密克定理得到多邊形中密克定理成立的條件。且因為密克定理的相關資料貧乏，所以我只能就密克定理來發展我後來在三角形的推廣。

二、內容補充

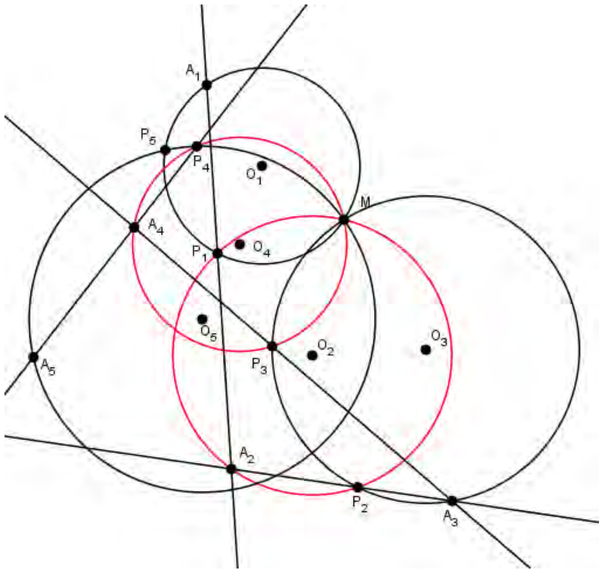
(一) 本研究在 n 邊形的密克定理只討論凸多邊形，凹多邊形的情況則在未來展望有更詳細的說明。

(二) 本研究在 n 邊形的密克逆定理並沒有加諸任何新的條件，也就是說只要有 n 個圓交於一點，不管O_1、O_2、$\cdots O_n$之間的順序為何、相對位置為何，那最後我所討論的三個點必定共線。

圖三十五的類型即為圓心依序順時針排列，如圖三十六的類型其圓心則為任意排列，因為五個圓交於一點，所以 A_1、P_5、A_5三點共線。(圖中圓O_2、圓O_4顏色之所以為紅色，只是為了方便區分，無其他意義)



圖三十五



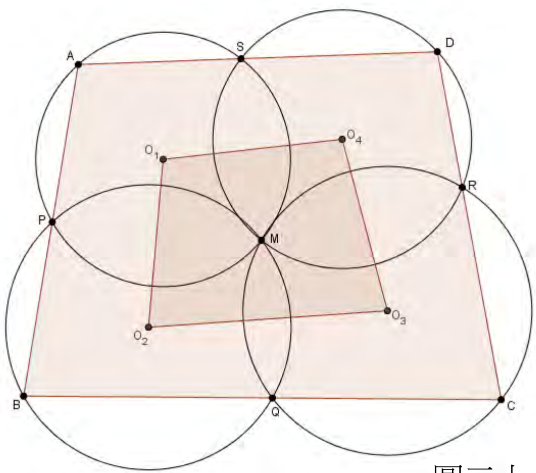
圖三十六

三、未來展望

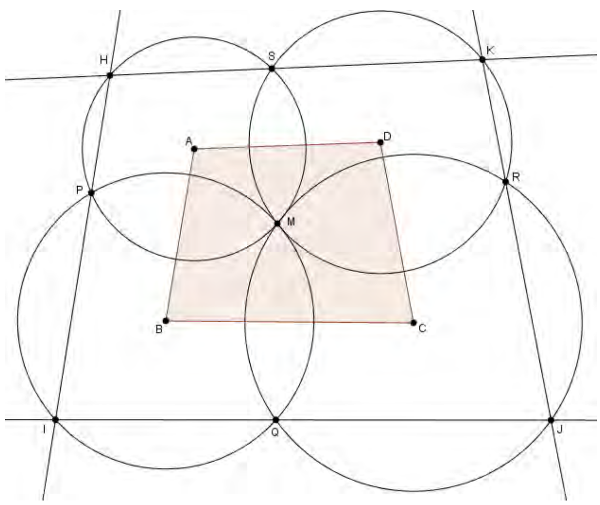
(一) 原本是想將我在三角形的所有推廣，繼續推廣到多邊形，但目前只有得到密克定理在多邊形時，於其邊上所選的點可以不侷限在其邊上，可以選在其邊的延長線上。其餘的目標如下:

1. 作相似形

以下是四邊形 ABCD 以類似密克定理(如圖三十七)和類似密克逆定理(如圖三十八)畫出的相似形$O_1O_2O_3O_4$ 和 HIJK:



圖三十七



圖三十八

雖然看似在四邊形中，其相似形的性質和三角形沒有差別，甚至在多邊形中也是一樣的，但仍須提出證明以確定其正確性。

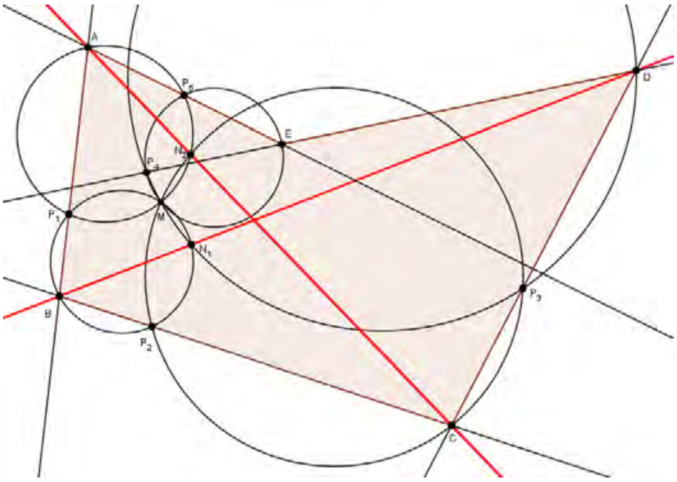
2. $\overleftrightarrow{\mathrm{A}_1O_1}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{A}_2O_2}\cdots\overleftrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}O_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{A}_nO_n}$交於一點的條件

3. 將在三角形時所探究的所有軌跡都推廣到多邊形

(二) 凹多邊形的密克定理

所謂的 n 邊形包含凸多邊形和凹多邊形，本研究中我只討論到凸多邊形。但實際上我從 geogebra 軟體中得到的結果是：「在凹多邊形時，根據我在 n 邊形的密克定理提出的條件，畫出來的圓也都會交於一點。」(如圖三十九即為一種情況)

期望以後能完整的了解凹多邊形的情況。



圖三十九

柒、 結論

一、密克定理

只要密克點不在 A、B、C 和三邊延長線上(不包括三邊)，則三圓交於一點，即密克定理。

二、密克逆定理

不管 A 點選在圓O_1上的哪一處(不包括 M 點)，密克逆定理都會成立。

三、三角形密克定理的推廣

(一) 延長線上的密克定理

若 P、Q、R 三點位在$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上，則$\Delta\mathrm{APR}$、$\Delta\mathrm{BQP}$、$\Delta\mathrm{CRQ}$的外接圓會交於一點。

(二) 作邊長成倍數關係的相似形

1. 藉類似密克定理的畫法，可以畫出 1/2 倍到無限大的相似形。
2. 藉類似密克逆定理的畫法，可以畫出無限小到 2 倍的相似形。

(三) 決定密克點的位置

1. 平面上任意點可藉由向三邊延長線作垂線，得到可畫出三個交於該點的圓形。
2. 若有平面上任意點，則除了用作垂線的方法，也可於$\overleftrightarrow{AB}$任取一點 P，根據我所提出的畫法進而得到交於該點的三圓。

(四) 軌跡

1. 承(三)，改變 P 點在$\overleftrightarrow{AB}$上的位置，則三圓的圓心軌跡位在「密克點到三頂點的連線」的中垂線。
2. 密克點在ΔABC 的垂心上時，「圓心軌跡所位在的三條中垂線」交成的ΔDEF，會有$\Delta\mathrm{DEF} \cong \Delta\mathrm{ABC}$的性質。
3. 若使密克點在平面上任意移動，D、E、F的軌跡分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中垂線。
4. 若將D、E、F視為ΔABC的基本性質，將ΔABC放進符合逆定理的條件中，則 D、E、F 的軌跡分別為ΔO_1MO_3、ΔO_1MO_2、ΔO_2MO_3的外接圓。
5. 承 4，此時$\mathrm{DEF} \sim \Delta\mathrm{D'E'F'}$，意即不管 A 點在圓$O_1$上哪一個位置，$\angle$D、$\angle$E、$\angle$F 皆為定值

四、多邊形的密克定理

密克定理在 n 邊形成立的條件是「連續$\mathrm{n}-3$個只隔一頂點的對角圓交點之一」各位在只隔一點的對角線上。

五、多邊形的密克逆定理

密克逆定理在 n 邊形中與也是成立的。

六、n 邊形的密克定理證明是利用三角形的密克定理與逆定理證得，而 n 邊形的密克逆定理證明則是利用圓弧度數關係證得。

七、本研究將 n 邊形界定為凸多邊形(但在 n 邊形的密克逆定理並無此限)，所以 n 凸邊形的密克定理和密克逆定理是為正逆關係，可由一個 n 凸邊形得到 n 個交於一點的圓，亦可由那 n 個交於一點的圓形推得原本的 n 凸邊形。

捌、 參考資料及其他

一、 張幼賢 • *國中數學課本第四冊* • 翰林出版社

二、 張幼賢 • *國中數學課本第五冊* • 翰林出版社

三、 *Miquel's Theorem.* Wikipedia. Retrieved September, 2016, from https://en.wikipedia.org/wiki/Miquel's theorem

四、 Jubayer Nirjhor, Gene Keun Chung, and Mahindra Jain. Pivot Theorem[Abstract]. *Proof.* Retrieved September, 2016 , from https://www.zybang.com/question/0d45c6fc3ca57041701f583e643e62b9.html?ssl=1

五、 Michael De Villiers (2014). A variation of Miquel's theorem and its generalization. *The Mathematical Gazette, 98(542), 334-339*. Retrieved September, 2016, from http://dynamicmathematicslearning.com/Miquel-variation-general.pdf

【評語】030408

此作品為關於 Miquel's Theroem 的討論，針對此定理更廣義的形式作了探討。說明簡潔清楚,展現了相當成熟的平面幾何能力，且能獨立發現許多的性質，數學的研究精神、研究脈絡及思考皆值得嘉許。此定理流傳已久，更正確的訊息必須查詢相關的書籍或文獻。推廣到多邊形的成立條件想法有點意思。但多邊形的結果探討還沒有完整，是未來可以努力的方向。

作品海報

摘要

我在確認完密克定理和逆定理的正確性之後，將密克定理在三邊上所選的三點推廣到延長線上，探討根據該定理所能做出的相似形和圓心的軌跡，並繼續探討軌跡位在的中垂線的交點軌跡，最後再將密克定理和逆定理推廣到多邊形。

研究動機

因為對於圓與三角形之間的關係產生疑惑，於是我便上網查查看是否有前人的足跡可循，而密克定理便是其一，面對這新奇的定理我頓然生起好奇之心。故此，以推廣密克定理為目標，我，走向這條以前人的理論為基礎的研究之路。

研究目的

一、密克定理與密克逆定理的證明

二、三角形密克定理的推廣

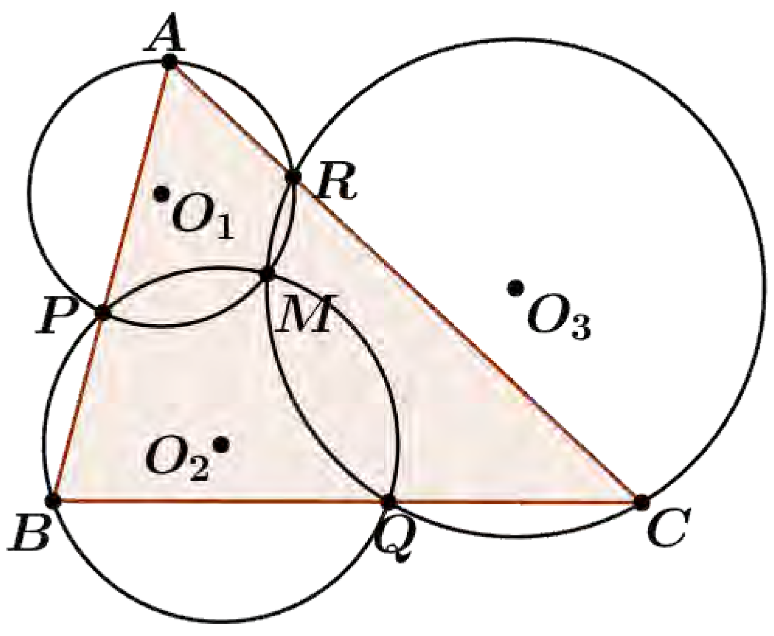
三、n邊形的密克定理與密克逆定理

研究過程與方法

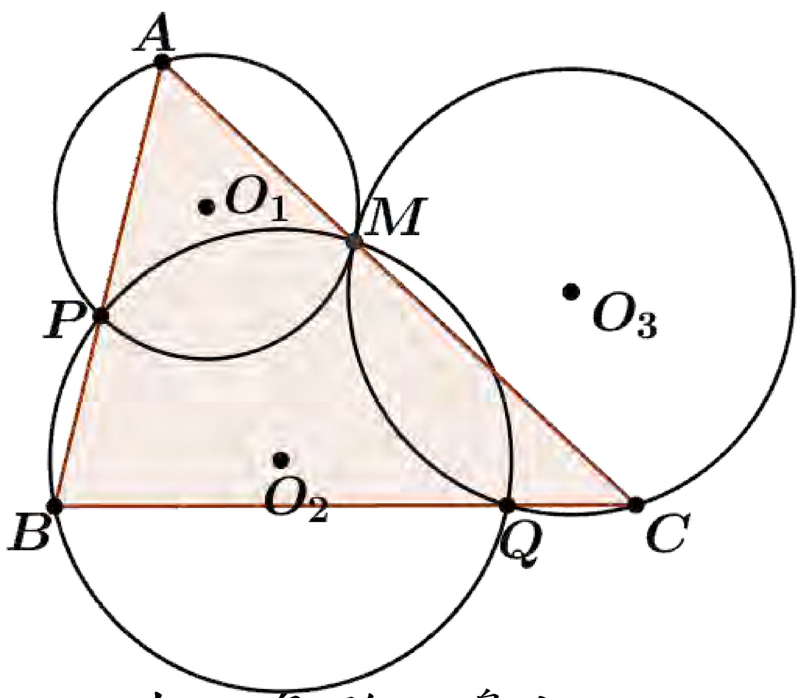
密克定理($Miquel's\ theorem$)

如下圖，任意三角形ABC上，P、Q、R分別位於$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$，則ΔAPR、ΔBQP、ΔCRQ的外接圓(圓O_1、圓O_2、圓O_3)交於一點，並稱之為密克點。

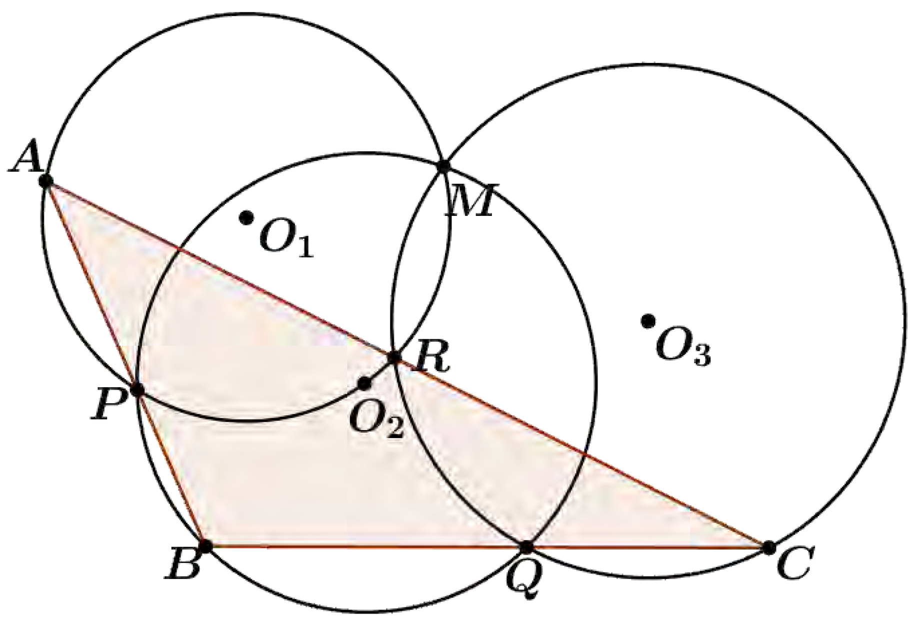
查到的證明僅針對密克點在三角形內部的情形。因此延伸至密克點在三角形三邊上和三角形外部的情形進行證明，最後說明密克點不可能位在三角形三邊延長線上。得到在定理敘述的條件下，所有情況定理都會成立。



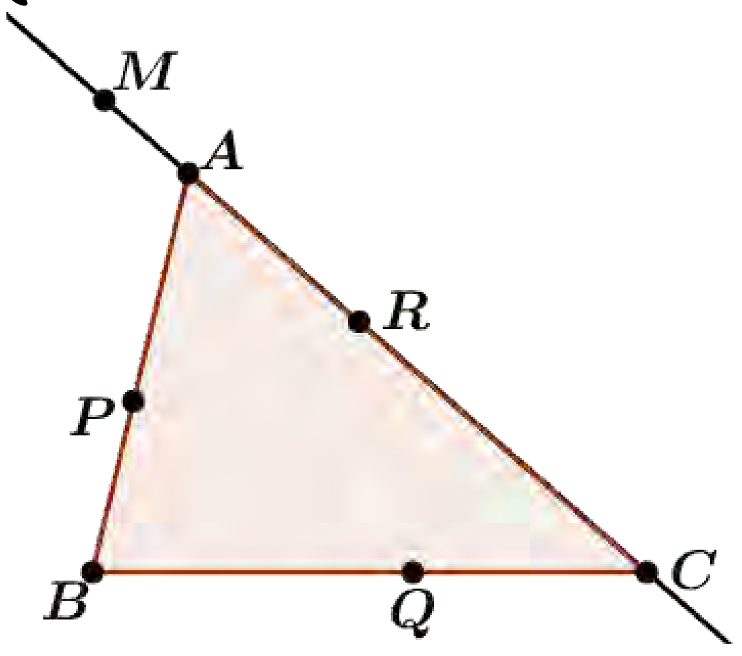
在三角形內部



在三角形三邊上



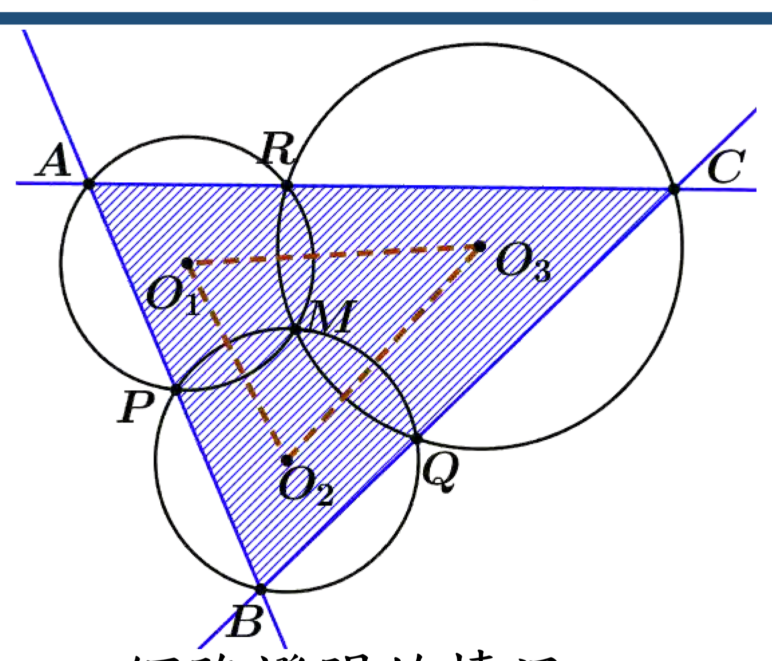
在三角形外部



在三角形三邊延長線

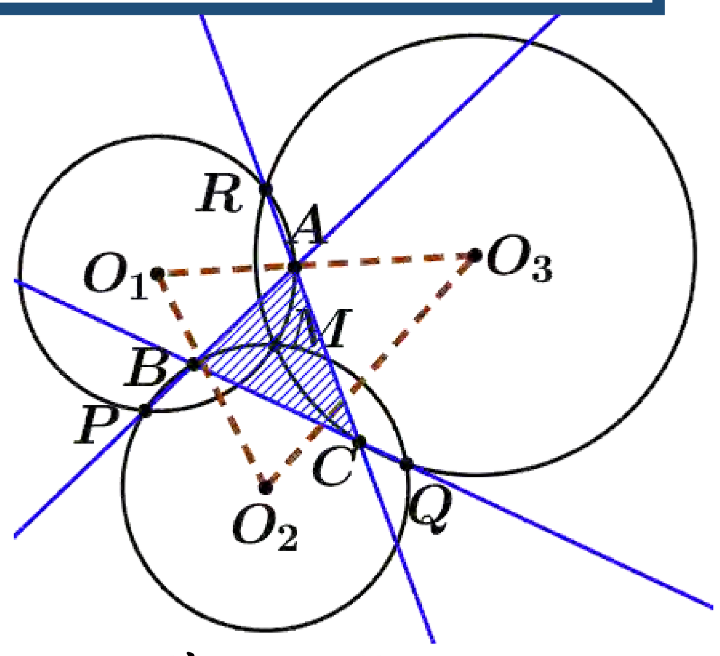
密克逆定理

設圓O_1、圓O_2、圓O_3交於點M，而P、Q、R則是圓O_1與圓O_2、圓O_2與圓O_3、圓O_1與圓O_3的另一個交點，在圓O_1上任取一點A，$\overleftrightarrow{AP}$與圓O_2交於點B、$\overleftrightarrow{AR}$與圓O_3交於點C，則B、C、Q三點會共線。



網路證明的情況

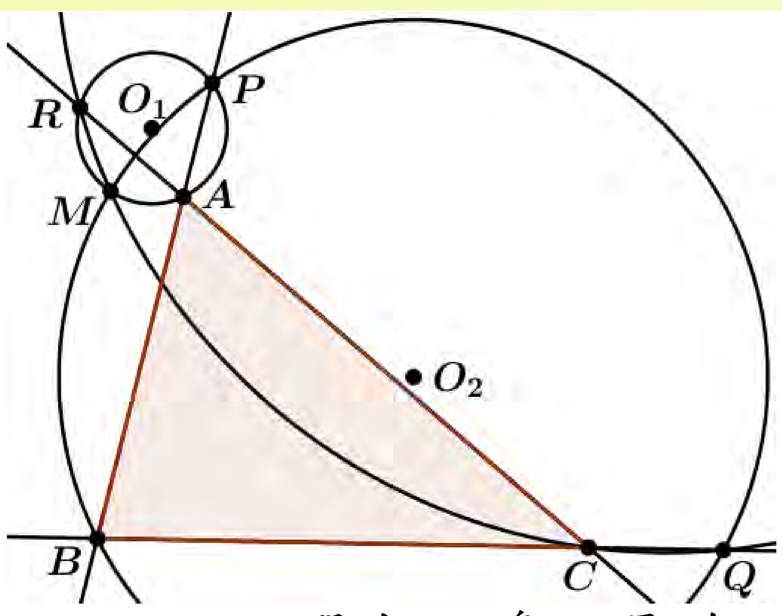
查到的證明也僅限於特殊情況，故利用$\Delta ABC \sim \Delta O_1O_2O_3$性質，將所有情況分兩類型各自證明，最後得到在定理敘述的條件下，所有情況定理都會成立。



其他可能之一

密克定理推廣到延長線上

於$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上各取P、Q、R三點，則ΔAPR、ΔBQP、ΔCRQ的外接圓(圓O_1、圓O_2、圓O_3)交於一點。



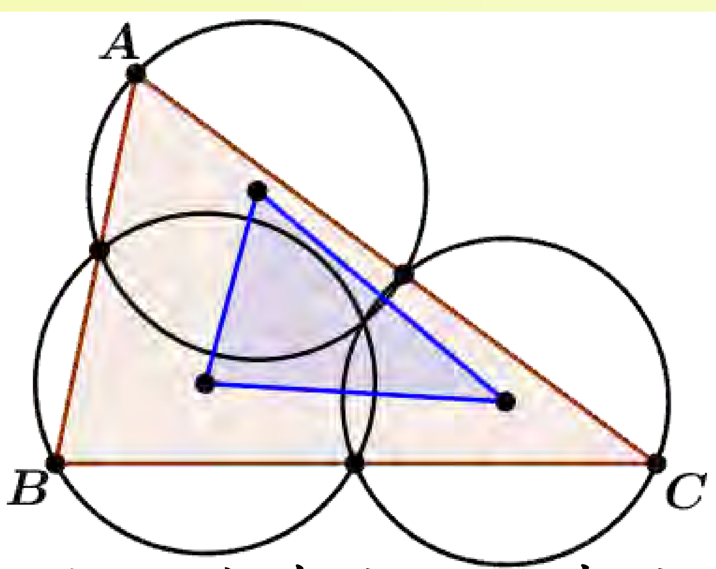
P、Q、R選在三邊延長線

做相似形

一、類似密克定理的畫法

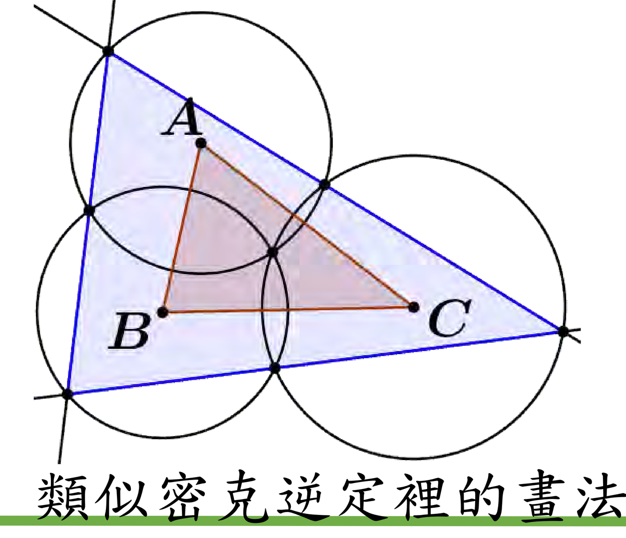
畫法：已知ΔABC，於其三邊(延長線亦可)各選一點，根據密克定理做出三個交於一點的圓形，此三圓圓心所連成的三角形即為原三角形的相似形。

倍數範圍：此類相似形其邊長倍數無上限，最小則為$1/2$倍。



類似密克定理的畫法

二、類似密克逆定理的畫法



類似密克逆定裡的畫法

畫法：已知ΔABC，以其三頂點為圓心，做三個交於一點的圓形，於這三圓上可根據密克逆定理得到一個新的三角形，相似於ΔABC。

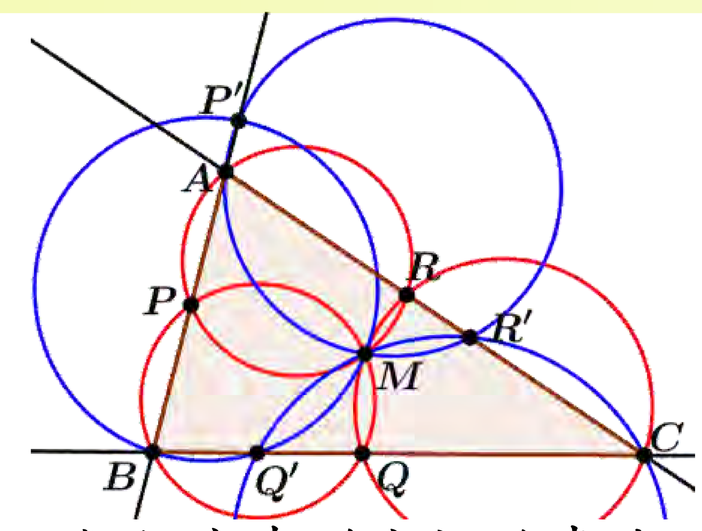
倍數範圍：此畫法畫出的相似形其邊長倍數最小為0倍，最大則為2倍。

發現：對於一個三角形ABC，密克點可以出現在三角形所在平面上任意處（除了$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的延長線）。

軌跡

同一個三角形可以有無限多組都交於已知點的三圓，做法如下：

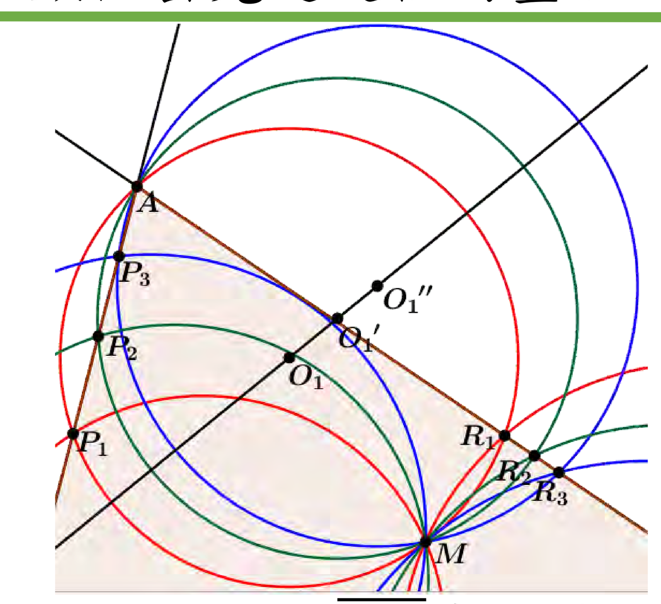
已知ΔABC和M點，於$\overleftrightarrow{AB}$上任取一點P，作ΔAPM的外接圓，定此圓與$\overleftrightarrow{AC}$的交點為R，再作ΔPMB的外接圓，定此圓與$\overleftrightarrow{BC}$交於Q，最後作ΔRQC的外接圓，即得到交於M點的三圓。(右圖藍、紅各為一組)



類似密克逆定裡的畫法

一、圓心軌跡

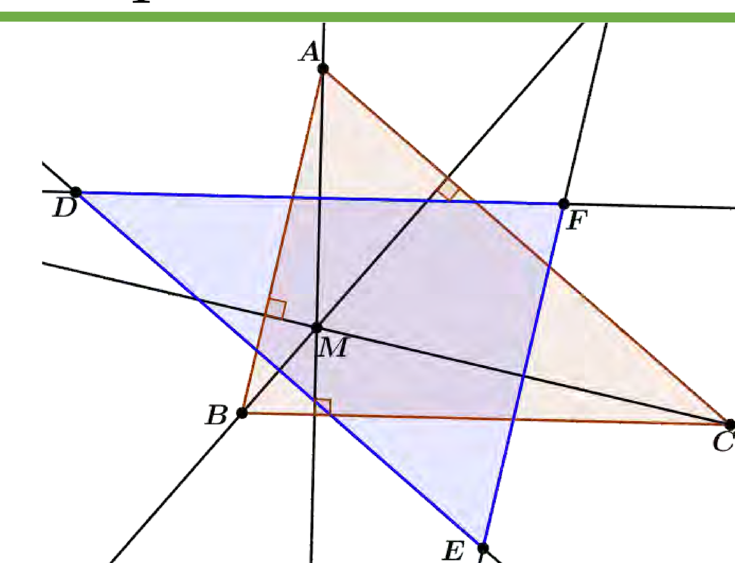
在同一個三角形和同一個密克點的前提下，根據前述作法可做出交於密克點的三圓，此無限多組的三圓它們的圓心O_1、O_2、O_3必分別位在三角形頂點到密克點連線的中垂線。



O_1軌跡位在$\overline{AM}$中垂線上

二、定圓心軌跡所在的三條中垂線兩兩的交點為D、E、F

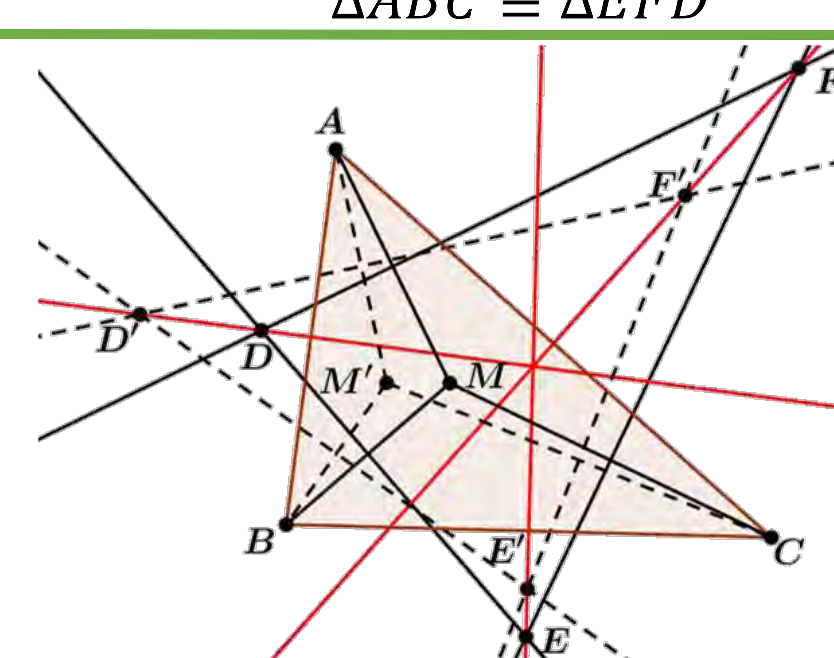
當密克點選在ΔABC的垂心上時，$\Delta ABC \cong \Delta EFD$



$\Delta ABC \cong \Delta EFD$

三、移動M點，D、E、F的軌跡

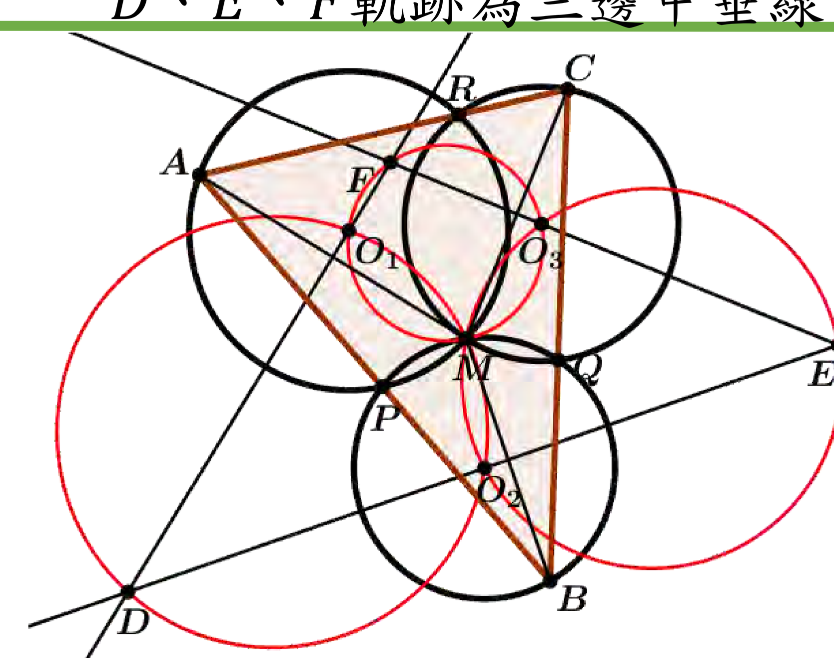
若M也任意移動，則三條直線的交點又會出現三條直線軌跡，且分別為ΔABC的三邊中垂線(右圖中的紅線)。



D、E、F軌跡為三邊中垂線

四、將三角形放進密克逆定理的情境中，D、E、F的軌跡

若圓O_1、圓O_2、圓O_3交於點M，依密克逆定理得到的ΔABC，其三條圓心軌跡的交點(D、E、F)會因圓O_1上點A的選取不同，而得到三個圓形軌跡(右圖中的紅線)。



D、E、F軌跡為圓形

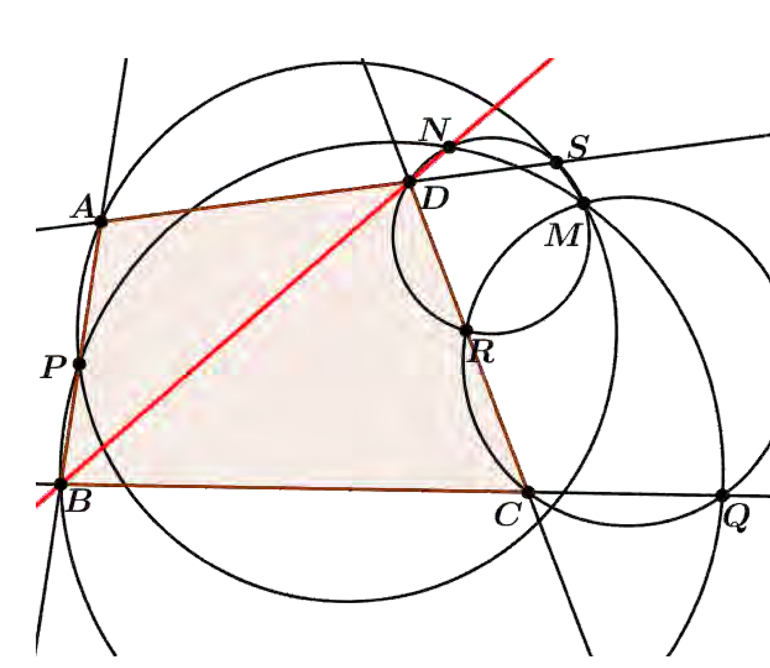
n邊形的密克定理

一、四邊形的密克定理

若在四邊形四邊上各任取一點，四個外接圓未必交於一點。所以我想找出可以使得四個圓交於一點的條件，結果如下：

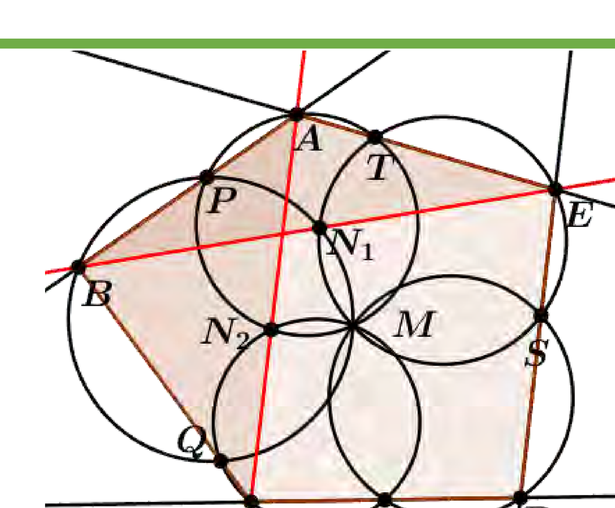
四邊形$ABCD$邊上各取一點P、Q、R、S，若ΔBQP、ΔDRS的外接圓交點在$\overleftrightarrow{BD}$上，則ΔAPS、ΔBQP、ΔDRS、ΔCQR的外接圓交於一點。

只要ΔBQP、ΔDRS的外接圓交點之一在$\overleftrightarrow{BD}$上，P、Q、R、S四點不需侷限在四邊上，四個外接圓仍會交於一點。



四圓交於一點

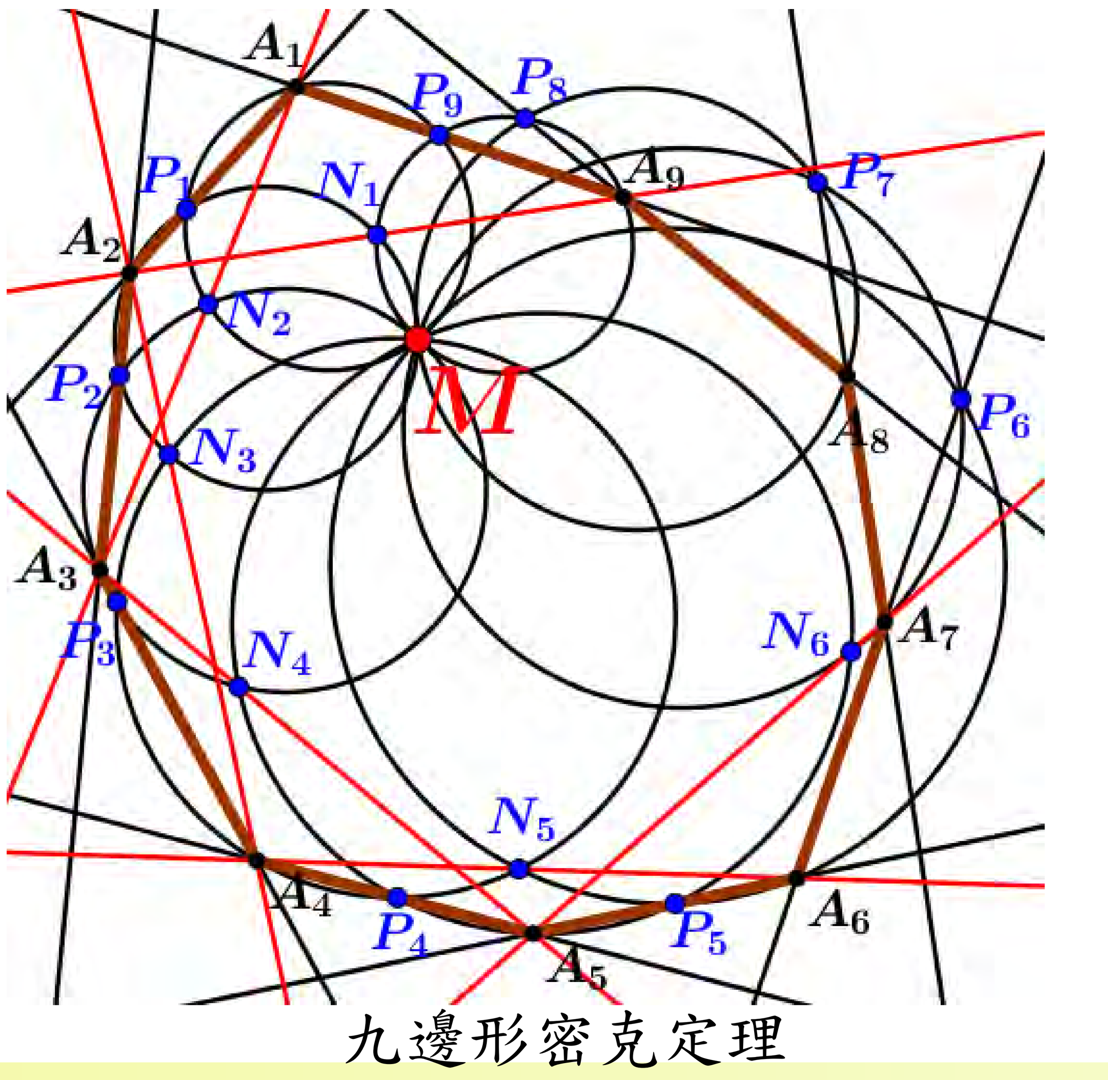
二、五邊形需要兩組對角圓的交點之一在兩條對角線上，則五個外接圓就會交於一點。



五圓交於一點

三、n邊形的密克定理(其中$n>3$)

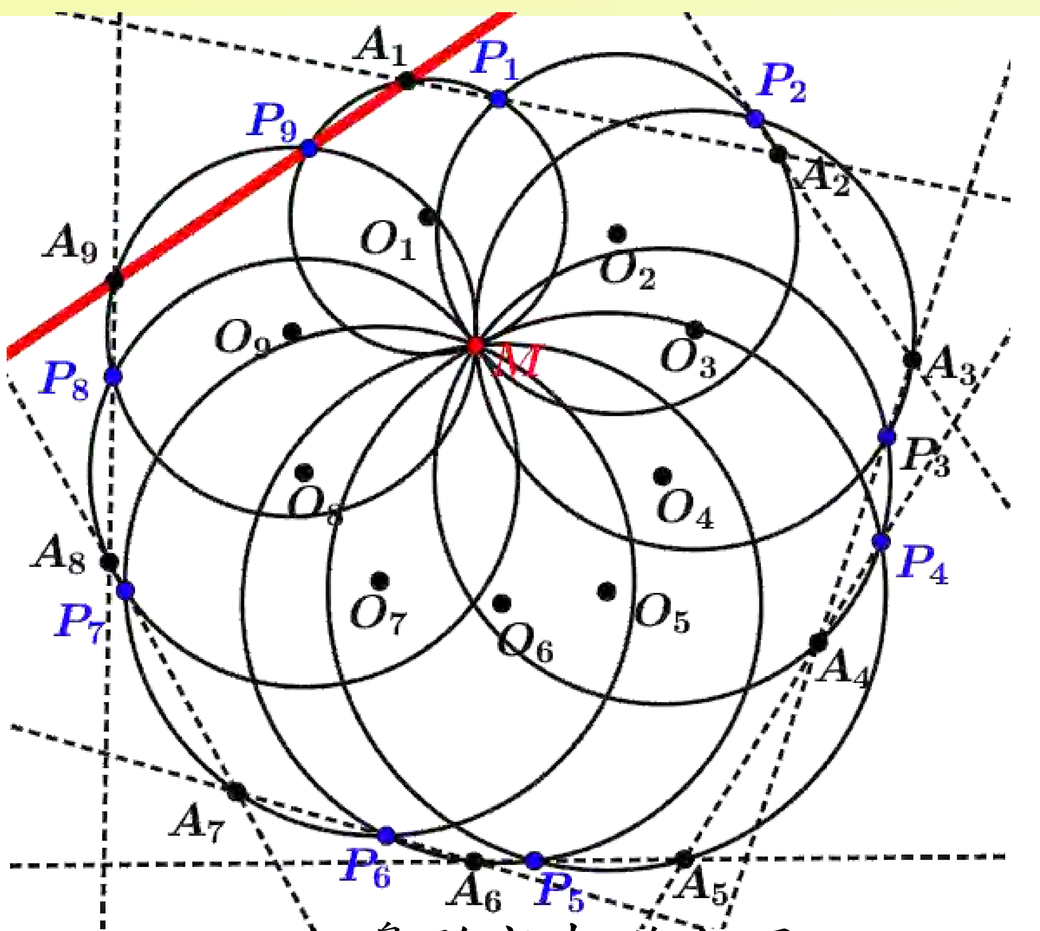
若在多邊形$A_1A_2\cdots A_n$中，P_1、$P_2\cdots P_n$ 分別位於$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ ⋯ $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overleftrightarrow{A_n A_1}$，則$\Delta A_1P_1P_n$、$\Delta A_2P_1P_2\cdots\Delta A_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$、$\Delta A_nP_{n-1}P_n$的外接圓共點的條件是「有$n-3$個只隔一頂點的對角圓交點之一」，各在$n-3$條自己所屬的對角線上。



九邊形密克定理

n邊形的密克逆定理

設圓$O_1\cdots$圓O_n交於點M，而P_1、$P_2\cdots P_n$則是圓O_1與圓O_2、圓O_2與圓$O_3\cdots$圓O_{n-1}與圓O_n、圓O_1與圓O_n的另一個交點，在圓O_1上任取一點A_1，$\overleftrightarrow{A_1P_1}$與圓$O_2$交於點$A_2$、$\overleftrightarrow{A_2P_2}$與圓$O_3$交於點$A_3\cdots\overleftrightarrow{A_{n-1}P_{n-1}}$與圓$O_n$交於點$A_n$，則$A_1$、$P_n$、$A_n$三點會共線。



九邊形密克逆定理

討論

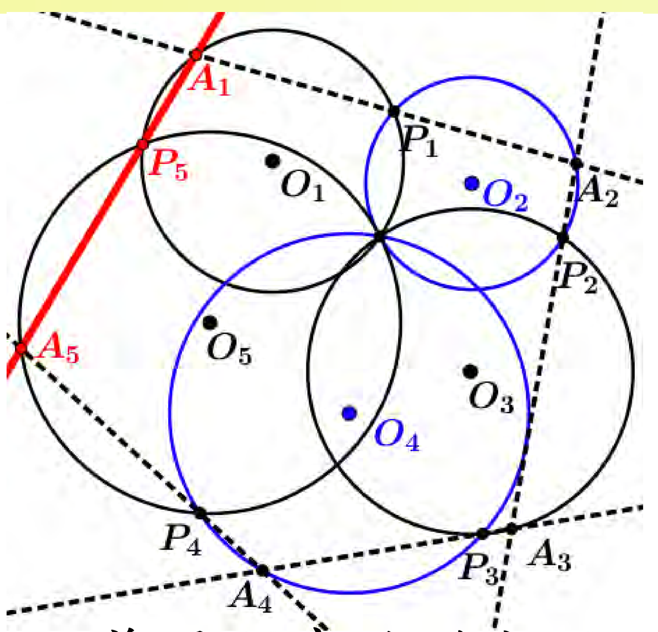
文獻探討

一、密克定理是由$Auguste\ Muquel$提出。而我查到的密克定理與逆定理的證明都只限於特殊情況，故做出一些證明，作為網路證明的補充。

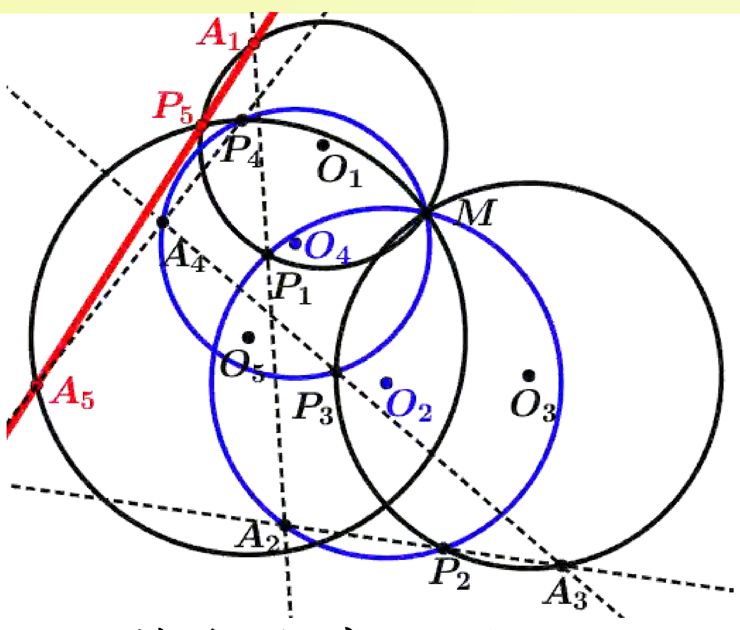
二、網路上有關四邊形密克定理的資料，僅說四邊形在「四圓交於一點」也會有與三角形相同的性質，卻沒說在四邊形中四圓交於一點的「條件」。

內容補充

在n邊形的密克逆定理中，不管O_1、O_2、$\cdots O_n$之間的順序為何、相對位置為何，最後的三個點必定共線。



普通順序的逆定理

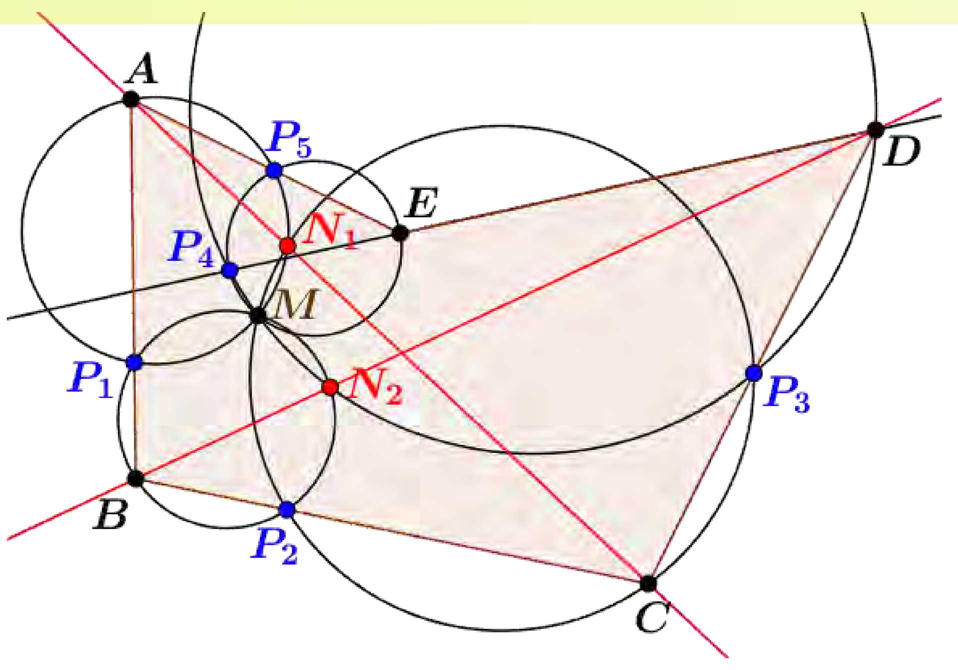


搗亂次序的逆定理

未來展望

一、將在三角形所作的推廣(諸如作相似形、研究軌跡等等)同樣推到n邊形。

二、在n邊形的密克定理提出的條件只考慮凸多邊形，而我從$Geogebra$軟體中得到，同樣的條件在凹多邊形時，畫出來的圓也都會交於一點，期望以後能完整的證明凹多邊形的情況。



凹五邊形的密克定理

結論

一、密克定理與密克逆定理在定理敘述的條件下，所有情況都會成立。

二、密克定理中選的P、Q、R三點若在三邊延長線上，三圓也會交於一點。

三、兩個定理皆可用來作相似形，且擁有各自所能畫出來的邊長倍數範圍。

四、一個三角形，會有無限多組都交於一個已知點的三圓。

五、承上，則會有直線軌跡和圓形軌跡存在。

六、密克定理在n邊形成立的條件是「連續$n-3$個只隔一頂點的對角圓交點之一」分別位在只隔一點的對角線上。

七、密克逆定理在n邊形中也是成立的。

參考資料

一、張幼賢．*國中數學課本第五冊*．翰林出版社

二、*Miquel's Theorem.* Wikipedia. Retrieved September, 2016, from https://en.wikipedia.org/wiki/Miquel's theorem