# 中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

國中組　數學科

## 第一名

030407

## 神機妙算

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學



| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 國三 黃胤甡<br>國三 蔡　慈<br>國三 張丰耘 | 沈志強<br>簡民峰 |



關鍵詞：排列組合、最少步數、三進位法

# 得獎感言

## 半個國中生涯的研究

在國中最繁忙的歲月裡，我們毅然決定投入了科展，研究至今，已歷時近十七個月。一開始只是為了校內的數學專題發表會，誰也沒想到的是，我們就這樣一路跌跌撞撞地走了下來。我們每天努力討論，不斷地在發現、證明及被推翻中來回，經歷了漫長、痛苦又煎熬的撞牆期，也曾碰到教育會考而停滯數週，但即便如此，在我們的眾多選項裡，也從沒有放棄，總在讀書讀累了的時候，翻翻研究日誌、想想更多其他的可能性……，我們費盡心血，把這個題目進行了透徹的分析，試圖將研究推向高峰。

等到終於站在全國科展的會場中，看到其他 20 餘組的作品、20 餘組其他縣市的冠軍，我們三個的心裡，是非常激動的！一方面懷抱著我們一年多來的雄心壯志、學長姊未竟的夢，另一方面，那些各具特色、精彩的海報，那些飛揚著自信光芒的笑臉，即使我們有著靈犀相通的默契，我們仍不敢幻想得名，能在會場和那些縣市代表交流，得到其他人的鼓勵，已經是對這段時光最好的報酬和交待。

在得知獲獎的那一刻，內心奔湧的情緒，是難以言喻的感動、開心！對於初次參與科展比賽的我們而言，這次能得獎，是努力、運氣各半，但毋論如何，這些都是我們的心血結晶，是我們半個國中生涯的快樂與心酸。感謝評審老師給予我們這麼大的肯定與鼓勵，讓我們倍感榮幸；感謝指導老師不斷啟發我們新的想法，並無條件支持我們嘗試各種可能，讓我們得以呈現更加完整且特別的作品；還要感謝最重要的伙伴們，我們就這麼陪著彼此度過了一年多的研究時光，過程中一起歡樂，一起瘋狂，也一同體驗做研究的艱辛。三個人，沖淡了一切的徬徨、迷惘，更增值了收穫的喜悅！

在整個過程中，我們學習到了一件很重要的事——多方嘗試、永不放棄的精神。研究時，總是會遇到大大小小的問題，而面對問題的時候，絕對不是輕言放棄，是要找出問題的癥結點，試著用各種不同的方式來解決它，一次不行再試第二次、兩次不行再試第三次，直到找出解決的方法。不只研究如此，生活上很多的事情抑是如此，唯有不斷嘗試、永不放棄才能真正解決問題並達成學習的目的。


評審前放鬆心情合照


得獎後開心合照

科教館合照

# 摘要

本研究源自於第 54-4 期科學研習月刊上的一道數學題目——神算，我們主要在探討：如何由第一列 $n$ 個色球迅速判斷出圖形第 $n$ 列色球的顏色。一開始先從 $n$ 層第一列 $n$ 個色球的排列組合方式開始探討、歸納，接下來我們從最簡單的層數開始觀察，慢慢推導兩層及三層公式，並歸納出符合兩層公式系統的層數：$a_m = 3^{m-1} + 1$層、三層公式系統的層數：$b_m$= $2 \times 3^{m-1} + 1$層。接著我們把所有層數都化為函數式，在過程中，我們發現這並不是一道普通的數學題，因為這個題目竟和三進位有莫大的關聯存在！於是，我們將最少步數結合重新定義的「三進位法」，找出了 $n$ 層最少步數解法的通式：

$f_{\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)}(x)$= $\sum_{i=1}^{k}[\prod_{j=0}^{i-1}(a_j+1)]\, f_{a_i+1}(a_i 3^{i-1}+1)$。除了上述之外，我們還發現只需知道圖形中任一層的組合，即可求出其下方任一列、任一個色球的快速解法。

## 壹、 研究動機

第一次看見這個題目，是在第 54-4 期的科學研習月刊中（如圖 1-1）:「一共 $n$ 個紅、綠、藍三種色球各若干個排成第一列。在下一列排 $n-1$ 個色球（每個色球插空隙）成第二列，以此類推排第三列……直到最後一列只有一個色球。 但從第二列起，色球的顏色由其左上和右上決定。若左上右上不同色，則此色球為第三種顏色。若左上右上同色，則此色球同色。問 $n$ 是多少時，可以由第一列直接預測最後一列色球的顏色？如何判斷？」對於這個題目強烈的興趣，與想了解若是無法直接判斷，它的最少運算次數為何的疑惑，令我們開啟了接下來一連串的研究。

▲圖 1-1

得知第 56 屆全國科展國小組數學科也有相同題目的作品是在一次偶然之中，然而當時已經做到一半的我們，並不想就此放棄。本來害怕內容是否會有所雷同，直到作品說明書出爐時，我們才大大地鬆了一口氣，畢竟研究的方向及內容有很大的差異。

# 貳、研究目的

一、求出 $n$ 層有多少種排列方式

二、找出 $n$ 層的基本判斷法

三、$n$ 層的最少步數及系統化

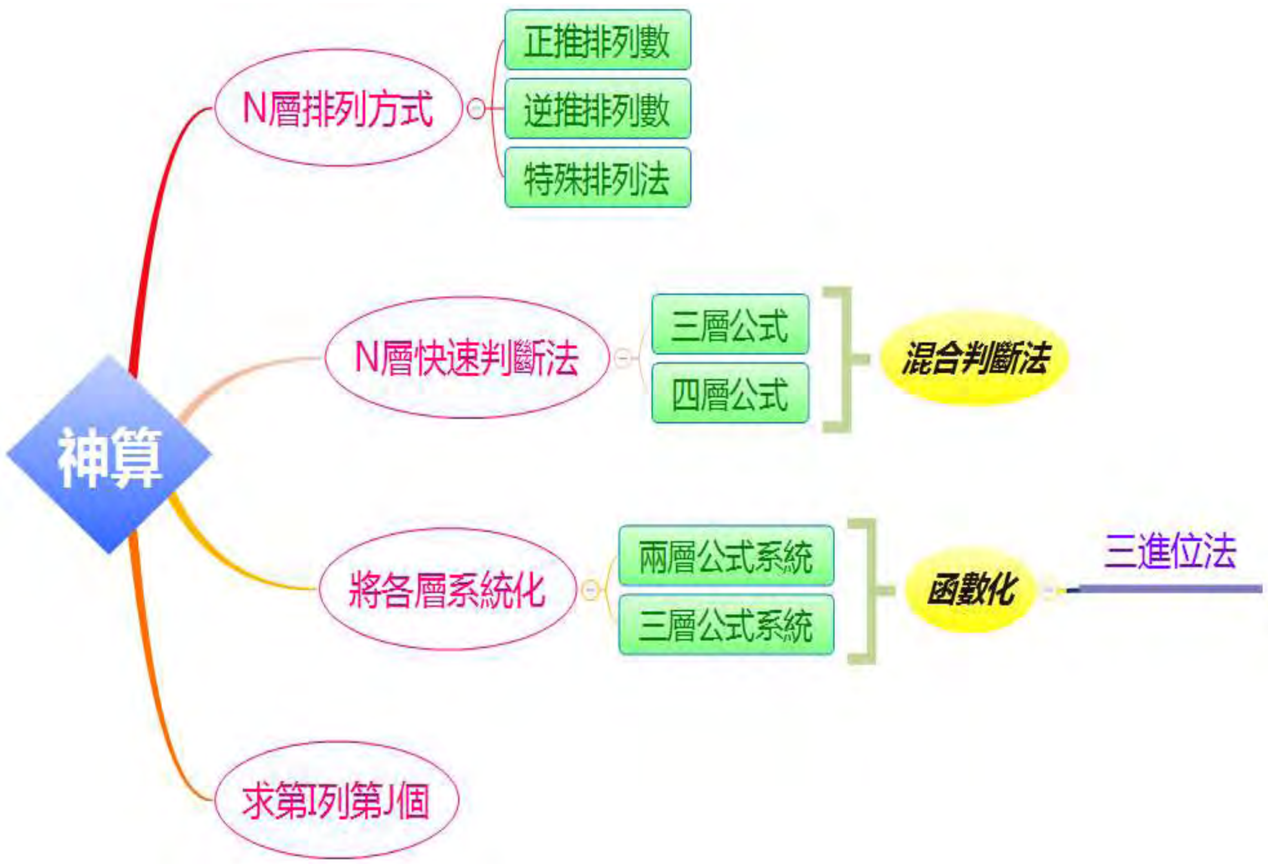
（一）歸納兩層公式系統

（二）歸納三層公式系統

（三）最少步數的函數公式

四、速求第 $i$ 層第 $j$ 個之解

# 參、研究架構



# 肆、研究過程

## 遊戲規則

▲圖 4-1

一共 $n$ 個紅、綠、藍三種顏色的色球各若干個排成第一列，下一列排 $n-1$ 個色球(每個色球插空隙)成第二列，以此類推排第三列⋯⋯直到最後一列只有一個色球。但從第二列起，色球的顏色由其左上和右上決定：

(1) 若左上右上同色，則此球同色；

(2) 若左上右上不同色，則此球為第三種顏色。

*Ex*：

▲圖 4-2

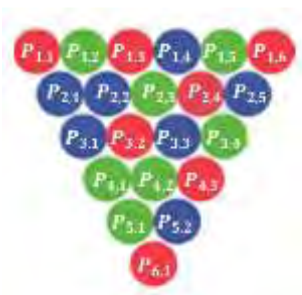
如圖 4-2，因為上方兩個皆為藍色色球（兩色球顏色相同），所以得出下一列的色球亦為藍色。

▲圖 4-3

如圖 4-3，因為上方有紅色色球和綠色色球（兩色球顏色不同），所以得出下一列的色球為藍色。

## 名詞定義

過程中我們為了研究的方便做出以下定義：



▲圖 4-4

(一) 將紅、綠、藍三色球分別以 $R$、$G$、$B$ 表示。

(二) 將⊕視為橫式運算符號，可代表兩兩同色產生相同顏色或兩色球異色得第三色的過程。通過⊕即定義為「一步」的運算。

*Ex*：

$$(R\oplus R) \Rightarrow (R)$$
$$(R\oplus G) \Rightarrow (B)$$
$$(B\oplus G) \Rightarrow (R)$$

(三) 令第 $x$ 列由左算起第 $y$ 個色球為 $P_{x,y}$（如圖 4-4）

## 一、 求出 *n* 層有多少種排列方式

### (一)排列的種類數量

首先，我們決定先從歸納出各層的所有排列方式開始著手進行研究，我們希望能藉由排列的種類數量，來找到 *n* 層中的結果$P_{n,1}$。

所謂「排列的種類數量」，即 *n* 層第一列有多少種排列方式，因為共有三種顏色，所以每一個位置皆有三種可能，即可得出 *n* 層的排列有$3^n$種。

但經過我們詳細思考後，產生了其他的疑慮：分別以(*R G*)⇔ (*G R*)和(*R G B*)⇔ (*B G R*)這兩組的組合為例，對於(*R G*)、(*R G B*)而言，(*G R*)、(*B G R*)只是左右交換，並「不會影響」第 2 列到第 *n*-1 列的過程(僅僅是左右對調)和$P_{n,1}$的結果 ($P_{n,1}$都會是同一種顏色的色球)。基於這個想法，我們針對排列數有了全新的定義。

在接下來的敘述中，我們將上述的組合定義為「左右不對稱」。

先由最少的層數開始，窮舉在新的定義中各層數的首列排列（如下表 4-1）

▼表 4-1

| 第 *n* 層 | 排列方式 | |
|---|---|---|
| *n=1* | (*R*) (*G*) (*B*) | 共 3 種 |
| *n=2* | (*R R*)、(*R G*)、(*R B*)、(*G G*)、(*G B*)、(*B B*) | 共 6 種 |
| *n=3* | (*R R R*)、(*R R G*)、(*R R B*)、(*R G R*)、(*R G G*)、(*R G B*)<br>(*R B R*)、(*R B G*)、(*R B B*)、(*G R G*)、(*G R B*)、(*G G G*)<br>(*G G B*)、(*G B G*)、(*G B B*)、(*B R B*)、(*B G B*)、(*B B B*) | 共 18 種 |

當然，我們並不會滿足於利用窮舉法得出 *n* 層的排列種類數量，所以接著我們就要來找出 *n* 層的排列種類數量通式。因為左右交換類型的組合我們將它們視為相同的組合(如(*R G*)、(*G R*)原先在排列種類數$3^n$種中算作 2 種組合，在此變成只有 1 種組合)，因此可以知道新的排列種類數量就是$3^n$扣掉「左右不對稱的組數」。但是，左右不對稱的組數並不如預期中容易求，於是我們找到一個替代方案：將 $3^n$加上左右對稱的組合除以 2，即可得解。

亦即

$$3^n-\text{「左右不對稱的組數」}=\frac{3^n+(\text{「左右對稱的組數」})}{2}$$

以 2 層為例，

原先第一列的排列方式共有$3^2$ =9 種，分別是：

$(R\ R)$、$(G\ G)$、$(B\ B)$、

$(R\ B)$、$(R\ G)$、$(G\ B)$、

$(B\ R)$、$(G\ R)$、$(B\ G)$。

因為$\{(R\ B)、(R\ G)、(G\ B)\}$跟$\{(B\ R)、(G\ R)、(B\ G)\}$是相同組合必須扣掉，但換個想法我們也可以將原先 9 種加上三種對稱$\{(R\ R)、(G\ G)、(B\ B)\}$再除以 2，即$12\div 2=6$，可以知道，新的計算方式中，2 層會有 6 種排列方式。

因為在左右對稱的排列種類中，只需考慮第一列第$P_{1,1}\sim\ P_{1,\left[\frac{n+1}{2}\right]}$個色球，又每個位置均有$(R)$、$(G)$、$(B)$三種可能，於是，可知當層數為 $n$ 時左右對稱的排列種類數應為：$3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ (種)

註：$[x]$為高斯符號，代表小於等於 $x$ 的最大整數。

所以可以得到 ***n* 層的排列種類數量共有** $\dfrac{3^n+3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{2}$ **(種)**

**(二)逆推排列種類數量**

第一列排列種類數量之後，我們試著換方向思考：當我們的排列組合是由第 $n$ 層向上決定第一列時，會不會有不同的排列種類數量呢？於是我們便開始了逆推的排列種類研究。

每一個色球逆推的方法共有三種，以第 $n$ 層固定 $R$ 為例，則第 $n-1$ 層可能的情形為$(R\ R)$、$(G\ B)$、$(B\ G)$，但依據我們之前的種類計算規則，$(G\ B)$和$(B\ G)$的組合應看作同一種排列，我們就不納入排列數的計算中。因此，由第 $n$ 層逆推到第 $n-1$ 層共有 2 種組合。

接著我們可以發現，每當逆推到 2 的倍數層時，就會多出$3^{n-1}$個「左右不對稱的排列組合」，因此每當推至偶數層時就必須減掉$3^{n-1}$種，如下表 4-2 所示 (將底層固定為 $R$)：

▼表 4-2

| | 一層 | 兩層 | 三層 | 四層 | 五層 | 六層 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **逆推排列種類數** | 1 | 2<br>$(1 \times 3 - 3^0)$ | 6 | 15<br>$(6 \times 3 - 3^1)$ | 45 | 126<br>$(45 \times 3 - 3^2)$ |

當我們減掉$3^{n-1}$種組合的時候，也就是加上左右對稱的組合再除以 2，而各層左右對稱的組合為：

▼表 4-3

| | 一層 | 兩層 | 三層 | 四層 | 五層 | 六層 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **逆推排列中不重複的排列數** | 1<br>$(3^0)$ | 1<br>$(3^1 - 2 \times 3^0)$ | 3<br>$(3^1)$ | 3<br>$(3^2 - 2 \times 3^1)$ | 9<br>$(3^2)$ | 9<br>$(3^3 - 2 \times 3^2)$ |

由上表 4-3 中可以歸納出，各層左右對稱的排列種類數公式為：$3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$

故可知：當我們將$P_{n,1}$固定為其中一種顏色的色球時，逆推排列種類數量為：$\dfrac{3^{n-1}+3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{2}$種；但當不限制$P_{n,1}$的顏色以後，第 $n$ 層會有 3 種可能，即上述的公式乘以 3，

也就是：$\dfrac{3^{n-1}+3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{2} \times 3 = \dfrac{3^{n}+3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{2}$

從上述中，更可以發現：**不管正推或逆推，都能推得相同的排列種類數量。**

公式一：$n$ 層的排列方式有 $\dfrac{3^{n}+3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{2}$ 種

(三)特殊排列法----有序排列

這是一次研究中得到的小插曲，雖然對於接下來的研究並沒有產生太大的影響，但它的規律有趣且特殊，仍值得我們為它記上一筆。

1. 僅用兩種顏色的色球交錯排列

不管層數 $n$ 值為何，當第一列僅使用兩種顏色的色球，且此兩種顏色的色球交錯出現時，其結果必為首列未使用到的第三種色球。

B R B<br>G G<br>G

▲圖 4-5

G R G R<br>B B B<br>B B<br>B

▲圖 4-6

G B G B G B<br>R R R R R<br>R R R R<br>R R R<br>R R<br>R

▲圖 4-7

2. 使用三種色球依序排列

依據上述兩種色球的立論可以發現，若將第一列改用 3 種色球，且此 3 種色球依一定順序排列時，其結果會呈現另一種有趣的週期性規律，即能透過第一列最左及最右兩色球得第 $n$ 列之結果。

R G B<br>B R<br>G

▲圖 4-8

R B G R<br>G R B<br>B G<br>R

▲圖 4-9

G R B G R B<br>B G R B G<br>R B G R<br>G R B<br>B G<br>R

▲圖 4-10

從以上，我們可以得到幾個結論：

(1) 兩色色球交錯排列必呈第三色。

(2) 三色色球依序排列時，可由第一列的兩側一步得解。

原先我們以為，只要完整歸納出各層的所有排列方式，便能找到那個 $n$ 層中的結果$P_{n,1}$，但直到很久很久之後，我們才發現這是一個美麗的錯誤，卻也讓我們對這個題目有了更深層的認識和了解。

## 二、找出 *n* 層的基本判斷法

但凡每一個複雜的多層數的組合，皆是由少層數的組合疊加而來。兩層的結果，已在題目中被定義，所以我們便以基本的三層、四層為研究方向，向快速判斷$P_{n,1}$邁進。

在我們的研究過程當中,我們希望能透過代數的方式來處理運算過程及運算步數,於是，我們針對我們的運算做出以下幾個基本公設：

當 $a$、$b$、$c \in \{R、G、B\}$，則：

公設(1) ：$a\oplus a=a$

公設(2) ：若 $a\neq b\neq c$，則 $a\oplus b=c$

公設(3) ：$a\oplus b= b\oplus a$

並在我們的研究過程中發現了一重要性質：

性質一：假設 $a$、$b$、$c \in \{R、G、B\}$，可得：

$$\boldsymbol{(a\oplus b)\oplus b=a}$$

**證明.：**

當 $a=b$ 時，

左式：$(a\oplus b)\oplus b$

$=a\oplus a$

$=a$

右式$=a$

左式=右式

當 $a\neq b\neq c$ 時，

左式：$(a\oplus b)\oplus b$

$=c\oplus b$

$=a$

右式$=a$

左式=右式

故得證 $(a\oplus b)\oplus b=a$

性質一對我們往後其他性質及公式的推導有很大的幫助。

### （一）三層公式

在尋找$P_{n,1}$速解法的過程中，我們從最簡單的三層開始，經過窮舉、觀察，我們發現：三層似乎可由特殊的規則得出答案。

依照原本的推算法，$P_{1,1}$先與$P_{1,2}$運算得出$P_{2,1}$，$P_{1,2}$與$P_{1,3}$運算得$P_{2,2}$，然後$P_{2,1}$與$P_{2,2}$再行運算得最終結果$P_{3,1}$。如此，所需的總運算步數共$1+1+1=3$次。

$$
\begin{aligned}
&(P_{1,1} \oplus P_{1,2}) \oplus (P_{1,2} \oplus P_{1,3}) \\
&= P_{2,1} \oplus P_{2,2} \\
&= P_{3,1}
\end{aligned}
$$

而我們發現若$P_{1,1}$先與$P_{1,3}$運算，所得的結果再與$P_{1,2}$運算，所得的結果與上述相同，因此我們研究出：

性質二：假設 $a$、$b$、$c$、$x \in \{R$、$G$、$B\}$，當固定 $a$、$b$，對任意 $x$ 可得：

$$\boldsymbol{(a\oplus x)\oplus(x\oplus b)=(a\oplus b)\oplus x}$$

**證明**：當 $a=b$ 時，

| | |
|---|---|
| 左式：$(a\oplus x)\oplus(x\oplus b)$ | 右式：$(a\oplus b)\oplus x$ |
| $=(a\oplus x)\oplus(x\oplus a)$ | $=(a\oplus a)\oplus x$ |
| $=(a\oplus x)$ | $=(a\oplus x)$ |

左式=右式

當 $a\neq b$ 時，若 $x=a$

| | |
|---|---|
| 左式：$(a\oplus x)\oplus(x\oplus b)$ | 右式：$(a\oplus b)\oplus x$ |
| $=(a\oplus a)\oplus(a\oplus b)$ | $=(a\oplus b)\oplus a$ |
| $=a\oplus(a\oplus b)$ | |

左式=右式

當 $a\neq b$ 時，若 $x=b$

| | |
|---|---|
| 左式：$(a\oplus x)\oplus(x\oplus b)$ | 右式：$(a\oplus b)\oplus x$ |
| $=(a\oplus b)\oplus(b\oplus b)$ | $=(a\oplus b)\oplus b$ |
| $=(a\oplus b)\oplus b$ | |

左式=右式

當 $a \neq b \neq x$，則 $x=c$

左式：$(a \oplus x) \oplus (x \oplus b)$

$=(a \oplus c) \oplus (c \oplus b)$

$= b \oplus a$

$=c$

右式$(a \oplus b) \oplus x$

$=(a \oplus b) \oplus c$

$=c \oplus c$

$=c$

左式=右式

由以上故得證 $(a \oplus x) \oplus (x \oplus b)=(a \oplus b) \oplus x$

從性質二我們可以發現，三層時可將共同項$P_{1,2}$提出，先運算$P_{1,1}$和$P_{1,3}$，再與$P_{1,2}$運算。則我們可以將步數減為$1+1=2$次

$$(P_{1,1} \oplus P_{1,2}) \oplus (P_{1,2} \oplus P_{1,3})$$
$$= P_{1,2} \oplus (P_{1,1} \oplus P_{1,3})$$

$\boxed{R}$ R $\boxed{R}$
R R
R

$\boxed{R}$ B $\boxed{R}$
G G
G

$\boxed{G}$ B $\boxed{B}$
R B
G

$\boxed{R}$ G $\boxed{B}$
B R
G

$\boxed{B}$ R $\boxed{G}$
G B
R

▲圖 4-11

定理一：三層可由首列兩側之值相運算後，再與首列中央的值進行運算，即可得解（共經過 2 次運算）。

## （二）四層公式

接下來我們要尋找四層第 1 列的速解法。依照原本的推算法，$P_{1,1}$先與$P_{1,2}$運算得出$P_{2,1}$，$P_{1,2}$與$P_{1,3}$運算得$P_{2,2}$，$P_{1,3}$與$P_{1,4}$運算得$P_{2,3}$，然後$P_{2,1}$與$P_{2,2}$、$P_{2,2}$與$P_{2,3}$分別運算得出$P_{3,1}$、$P_{3,2}$，$P_{3,1}$與$P_{3,2}$再運算得最終結果$P_{4,1}$。如此，所需的總運算步數共$1+1+1+1+1+1=6$次。但經過我們的窮舉、觀察、研究，我們也發現了四層的特殊判斷法。

我們發現，不論是何種組合，四層皆可由首列的左右兩個色球相運算後得解。

$\boxed{R}$ B G $\boxed{B}$
G R R
B R
G

▲圖 4-12

為了驗證此發現，我們研究出性質三：

性質三：假設 $a$、$b$、$c$、$x$、$y$ ∈｛$R$、$G$、$B$｝，當固定 $a$、$b$，對任意 $x$、$y$ 可得：

$$[(a\oplus x)\oplus y]\oplus[(b\oplus y)\oplus x]=a\oplus b$$

**證明：**

當 $a=b$ 時，

左式：$[(a\oplus x)\oplus y]\oplus[(b\oplus y)\oplus x]$

利用性質二 $=[(a\oplus y)\oplus(x\oplus y)]\oplus[(b\oplus x)\oplus(x\oplus y)]$

$=[(a\oplus y)\oplus(b\oplus x)]\oplus(x\oplus y)$

$=[(a\oplus y)\oplus(a\oplus x)]\oplus(x\oplus y)$

$=[(x\oplus y)\oplus a]\oplus(x\oplus y)$

利用性質一 $=[(x\oplus y)\oplus a]\oplus(x\oplus y)$

$=a$

右式：$a\oplus b= a\oplus a= a$

左式=右式

當 $a\neq b$、$x=y$ 時，

左式：$[(a\oplus x)\oplus y]\oplus[(b\oplus y)\oplus x]$

利用性質二 $=[(a\oplus y)\oplus(x\oplus y)]\oplus[(b\oplus x)\ \oplus(x\oplus y)]$

$=[(a\oplus y)\oplus(b\oplus x)]\oplus(x\oplus y)$

$=[(a\oplus x)\oplus(b\oplus x)]\oplus(x\oplus x)$

$=[(a\oplus b)\oplus x]\oplus x$

利用性質一 $=a\oplus b$

當 $a\neq b$、$x\neq y$ 時，

令 $x=a$

左式：$[(a\oplus x)\oplus y]\oplus[(b\oplus y)\oplus x]$

$=[(a\oplus a)\oplus y]\oplus[(b\oplus y)\oplus a]$

利用性質二 $=[(a\oplus y)\oplus(a\oplus y)]\oplus[(b\oplus a)\oplus(a\oplus y)]$

$=[(a\oplus y)\oplus(a\oplus b)]\oplus(a\oplus y)$

利用性質一 $= a\oplus b$

令 $y=a$

左式：$[(a\oplus x)\oplus y]\oplus[(b\oplus y)\oplus x]$

$=[(a\oplus x)\oplus a]\oplus[(b\oplus a)\oplus x]$

利用性質二 $=[(a\oplus a)\oplus(x\oplus a)]\oplus[(b\oplus x)\oplus(x\oplus a)]$

$=[a\oplus(a\oplus x)]\oplus[\ (b\oplus x)\oplus(a\oplus x)]$

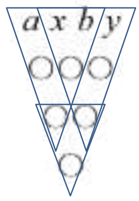
$=(a\oplus x)\ [a\oplus(b\oplus x)]$

利用定理（2）$\rightarrow(x\oplus a)\oplus[(a\oplus b)\oplus(x\oplus a)]$

$=\ (x\oplus a)\oplus[(a\oplus b)\oplus(x\oplus a)]$

$= a\oplus b$

由以上故得證 $[(a\oplus x)\oplus y]\oplus[(b\oplus y)\oplus x]=a\oplus b$




▲圖 4-13

我們可將四層的運算看成兩個三層運算所得到，如圖 4-13，而由性質三知可由左右兩個色球相運算後得解，因此可得底下定理二。

定理二：四層可由首列兩側之值相運算，即可得解（共經過 1 次運算）。

而同時我們可以瞭解到，這樣的規則是和兩層相同的。

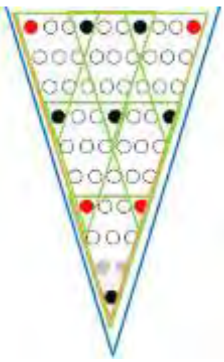
## 三、$n$ 層的最少步數及系統化

一般來說，若要求第一列到第 $n$ 列的步數，從第一列開始，要得出第二層需計算$(n-1)$步，得出第三層需要需$(n-2)$ ... ...依此類推。因此我們可以知道，要得出 $n$ 層的解共需計算$(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ 次，也就是$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$次。於是，我們為了減少運算的步數，以達到快速求解的目的，開啟了下面的研究。

### (一) 兩層公式系統（兩側規律）

由於我們發現，2 層和 4 層皆可以使用最左及最右兩顆色球即可得出最後一層的解。我們猜測，應該有其他層數也能使用這樣的規則，於是我們將符合這樣規則的層數稱為「兩層公式系統」。

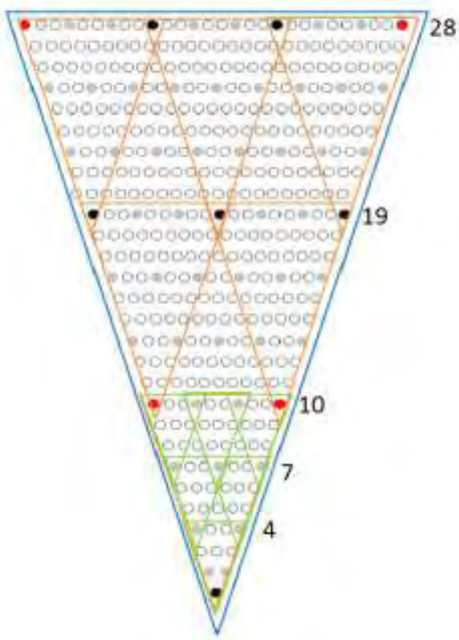
為了尋找其他符合這樣規律的層數，我們將 4 層圖形當作基本圖形，繼續向上延伸找出其他符合這樣規律的層數。



▲圖 4-14

由於 2 層推至 4 層時由兩層再往上推兩次來得出 4 層，於是我們就依照相同的方式將 4 層向上推展兩次，如圖 4-14 所示，將 4 層往上推兩次以後得到層數=10。我們將十層中每個 4 層黑色的點視為「大 4 層」，以兩層公式系統方式來得其解，因此我們可以知道，10 層也可如 4 層一般利用最左及最右兩色球來得知最後結果。

同理，我們也可以將 10 層向上推展兩次，如圖 4-15 所示，得出下一個層數為 28 層。接著將其 10 層的黑點部分看為「大 4 層」，也就是說，28 層也可以利用兩層公式系統方式來得出其結果。令可以由左右兩顆決定最後一列顏色的最小層數 2 為$a_1$、4 為$a_2$、10 為$a_3$、28 為$a_4$ ... ...第 $n$ 個層數為$a_m$。




▲圖 4-15

因為每一個層數皆是由其前一個層數向上推展兩次來得出，且每推展一次就會有一層重疊，於是我們可以寫出關係式：

$a_m = a_{m-1} + (a_{m-1} - 1) + (a_{m-1} - 1)$

$= 3a_{m-1} - (3 - 1)$

$= 3\left(3a_{m-2} - (3 - 1)\right) - (3 - 1)$

$= 3^2 a_{m-2} - (3^2 - 1)$

$\vdots$

$= 3^{m-1} a_1 - 3^{m-1} + 1$

$= 2 \times 3^{m-1} - 3^{m-1} + 1 \quad = 3^{m-1} + 1$

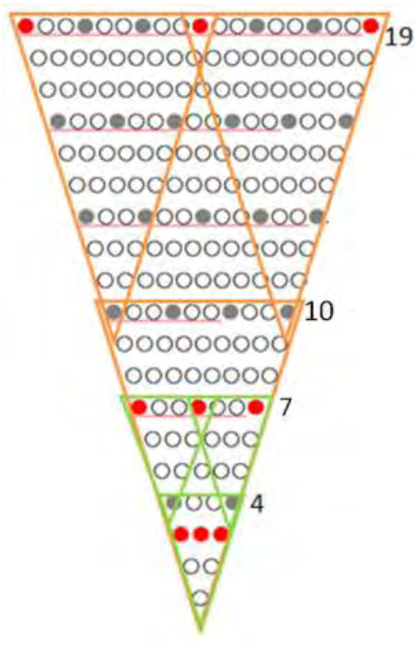
經由上述過程，我們可以得出

**公式二：若$a_m = 3^{m-1} + 1$層，則$a_m$符合「兩層公式系統」，只需利用最左及最右兩色球即可得知其結果。**

### （二） 三層公式系統

當我們研究了兩層公式系統以後，我們又推測，是不是也能同樣在三的規則中找出一套系統，來減少我們的運算次數呢？於是我們開始了我們的研究。

在尋找三層公式系統時，我們先以土法煉鋼的方式，一層一層尋找可以使用三層規則來運算的層數。我們發現 7 層及 19 層都能使用三層的公式來得出結果。在我們將 7 層和 19 層化成和兩層公式系統一樣的圓點圖後，我們發現(如右圖 4-16) 7 層就是由 3 個四層所組合而成的「大三層」，而 19 層同時也是由 3 個 10 層所組合而成的「大三層」。因此，我們可以知道三層公式系統皆是由 3 個兩層公式系統層數所組成。



▲圖 4-16

接著，我們再向上推導，得出三層公式系統第四項為 55 層，我們從這四項中發現，它們之間的差亦會形成公比為 3 的等比數列：分別是 4、12、36，於是我們開始尋找三層公式系統層數公式。

我們將差 4、12、36 分別設為$p_1$、$p_2$、$p_3$、差的總和為$S_m$、公比 $r$=3

將三層公式系統 3、7、19、55 分別設為$b_1$、$b_2$、$b_3$、$b_4$

將數值帶入等比級數公式 $\frac{p_1(1-r^m)}{1-r}$中： $S_m = \frac{4(1-3^m)}{1-3} = \frac{4(1-3^m)}{-2} = 2\times 3^m - 2$

因為上述公式僅為三層公式系統各層數間的公差，所以還要在式子中加上$b_1$ 得

$$2\times 3^m - 2 + q_1 = 2\times 3^m - 2 + 3 = 2\times 3^m + 1$$

在我們加上$q_1$後，由於三層公式系統第一個層數已經包含在內，且第一項不需要加上公差，因此，我們將差的次方數減一，也就是： $2\times 3^{m-1}+1$

$$\text{又 } 2\times 3^{m-1}+1 = 2(3^{m-1})+1 = 2(3^{m-1}+1)-1 = \boldsymbol{2a_m - 1}$$

經由上述的推導，我們可以得出

**公式三：若$b_m = 2\times 3^{m-1}+1$層，則$b_m$符合「三層公式系統」，先由最左及最右的色球進行運算，再與最中間的色球進行運算即可得出答案。**

## （三）最少步數的函數公式

### 1. 最少步數解法化為函數式

在研究過程中，我們發現，當我們要找第 $n$ 層的最少步數時，可以從二或三層公式系統中，找小於 $m$ 且最接近它的層數分解，依照這樣的規則，由大到小排列，來得出最少步數$f_{z_n}(n)$。為了方便有系統的研究，我們將 $n$ 層最少步數解法令為

$$f_{z_n}(n) = y_m f_{z_m}(x_m) + y_{m-1} f_{z_{m-1}}(x_{m-1}) + \ldots + y_1 f_{z_1}(x_1)$$

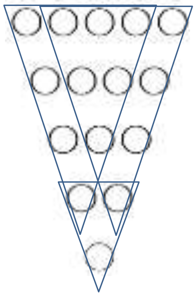
其中$x_m$代表分解過程中所用到二或三層公式系統的層數，$z_m$、$z_n$值代表該層得出最少步數所需要知道的色球顆數，$y_m$代表該層數在分解運算中所使用的次數，也就等於$y_{m-1}\times z_{m-1}$。$z_n$則代表所求層數所要知道的顆數，也就等於$y_m \times z_m$。

舉例來說：

當層數為 2 層時，我們得出解所需要使用的層數為一個 2 層，所以需知道的色球數為 2 個，因此$z_1 = 2$、$y_1 = 1$，$z_n = 1\times 2$且運算次數為 1 次，因此我們寫成的函數式為

$$f_2(2) = 1f_2(2) = 1$$

當層數為 5 層（如圖 4-17）時，我們得出解所需要使用的層數為 4 層及 2 層，因為兩層所要知道的色球為 2 個，且係數為 1，所以$z_1 = 2$且$y_1 = 1$，由此我們可以知道$y_2 = 2$，運算次數為$2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$，因此我們寫成的函數式為 $f_4(5) = 2f_2(4)+f_2(2) = 3$



▲圖 4-17

當層數為十五層時，我們得出解所需要使用的層數為 10 層及 6 層，而 6 層又可以拆成 4 層及 3 層。因為 3 層所要知道的色球為 3 顆，且係數為 1，所以$z_1 = 3$且$y_1 = 1$，由此我們可以知道$y_2 = 3$，而$z_2 = 2$，所以可以知道$y_3 = 6$，運算次數為$1 \times 2 + 3 \times 1 + 6 \times 1 = 11$，因此我們寫成的函數式為

$$f_{12}(15) = 6f_2(10)+3f_2(4)+f_3(3) = 11(步)$$

為了方便研究及找出更多的特性，我們做了 2~60 層的分解並將分解式做成下列的表格：

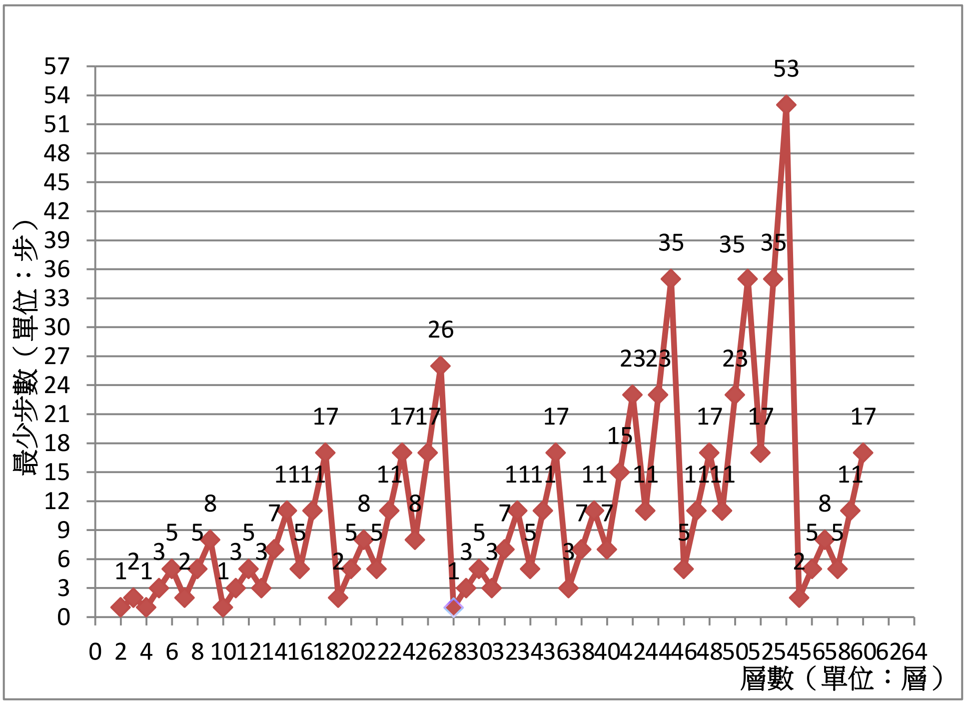
▼表 4-4

| 層數 | 函數式 | 已知最少步數（步） |
|---|---|---|
| 2 | $f_2(2) = f_2(2)$ | 1 |
| 3 | $f_3(3) = f_3(3)$ | 2 |
| 4 | $f_2(4) = f_2(4)$ | 1 |
| 5 | $f_4(5) = 2f_2(4)+f_2(2)$ | $2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$ |
| 6 | $f_6(6) = 3f_2(4)+f_3(3)$ | $3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ |
| 7 | $f_3(7) = f_3(7)$ | 2 |
| 8 | $f_6(8) = 2f_3(7)+f_2(2)$ | $2 \times 2 + 1 \times 1 = 5$ |
| 9 | $f_9(9) = 3f_3(7)+f_3(3)$ | $3 \times 2 + 1 \times 2 = 8$ |
| 10 | $f_2(10) = f_2(10)$ | 1 |
| 11 | $f_4(11) = 2f_2(10)+f_2(2)$ | $2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$ |
| 12 | $f_6(12) = 3f_2(10)+f_3(3)$ | $3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ |
| 13 | $f_4(13) = 2f_2(10)+f_2(4)$ | $2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$ |
| 14 | $f_8(14) = 4f_2(10)+2f_2(4)+f_2(2)$ | $4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 7$ |
| 15 | $f_{12}(15) = 6f_2(10)+3f_2(4)+f_3(3)$ | $6 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 2 = 11$ |
| 16 | $f_6(16) = 3f_2(10)+f_3(7)$ | $3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ |
| 17 | $f_{12}(17) = 6f_2(10)+2f_3(7)+f_2(2)$ | $6 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 11$ |
| 18 | $f_{18}(18) = 9f_2(10)+3f_3(7)+f_3(3)$ | $9 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 17$ |
| 19 | $f_3(19) = f_3(19)$ | 2 |
| 20 | $f_6(20) = 2f_3(19)+f_2(2)$ | $2 \times 2 + 1 \times 1 = 5$ |

| | | |
|---|---|---|
| 21 | $f_9(21) = 3f_3(19)+f_3(3)$ | $3 \times 2 + 1 \times 2 = 8$ |
| 22 | $f_6(22) = 2f_3(19)+f_2(4)$ | $2 \times 2 + 1 \times 1 = 5$ |
| 23 | $f_{12}(23) = 4f_3(19)+2f_2(4)+f_2(2)$ | $4 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 11$ |
| 24 | $f_{18}(24) = 6f_3(19)+3f_2(4)+f_3(3)$ | $6 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 2 = 17$ |
| 25 | $f_9(25) = 3f_3(19)+f_3(7)$ | $3 \times 2 + 1 \times 2 = 8$ |
| 26 | $f_{18}(26) = 6f_3(19)+2f_3(7)+f_2(2)$ | $6 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 17$ |
| 27 | $f_{27}(27) = 9f_3(19)+3f_3(7)+f_3(3)$ | $9 \times 2 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 26$ |
| 28 | $f_2(28) = f_2(28)$ | 1 |
| 29 | $f_4(29) = 2f_2(28)+f_2(2)$ | $2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$ |
| 30 | $f_6(30) = 3f_2(28)+f_3(3)$ | $3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ |
| 31 | $f_4(31) = 2f_2(28)+f_2(4)$ | $2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$ |
| 32 | $f_8(32) = 4f_2(28)+2f_2(4)+f_2(2)$ | $4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 7$ |
| 33 | $f_{12}(33) = 6f_2(28)+3f_2(4)+f_3(3)$ | $6 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 2 = 11$ |
| 34 | $f_6(34) = 3f_2(28)+f_3(7)$ | $3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ |
| 35 | $f_{12}(35) = 6f_2(28)+2f_3(7)+f_2(2)$ | $6 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 11$ |
| 36 | $f_{18}(36) = 9f_2(28)+3f_3(7)+f_3(3)$ | $9 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 17$ |
| 37 | $f_4(37) = 2f_2(28)+f_2(10)$ | $2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$ |
| 38 | $f_8(38) = 4f_2(28)+2f_2(10)+f_2(2)$ | $4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 7$ |
| 39 | $f_{12}(39) = 6f_2(28)+3f_2(10)+f_3(3)$ | $6 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 2 = 11$ |
| 40 | $f_8(40) = 4f_2(28)+2f_2(10)+f_2(4)$ | $4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 7$ |
| 41 | $f_{16}(41) = 8f_2(28)+4f_2(10)+2f_2(4)+f_2(2)$ | $8 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 15$ |
| 42 | $f_{24}(42) = 12f_2(28)+6f_2(10)+3f_2(4)+f_3(3)$ | $12 \times 1 + 6 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 2 = 23$ |
| 43 | $f_{12}(43) = 6f_2(28)+3f_2(10)+f_3(7)$ | $6 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 2 = 11$ |
| 44 | $f_{24}(44) = 12f_2(28)+6f_2(10)+2f_3(7)+f_2(2)$ | $12 \times 1 + 6 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 23$ |
| 45 | $f_{36}(45) = 18f_2(28)+9f_2(10)+3f_3(7)+f_3(3)$ | $18 \times 1 + 9 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 35$ |
| 46 | $f_6(46) = 3f_2(28)+f_3(19)$ | $3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ |
| 47 | $f_{12}(47) = 6f_2(28)+2f_3(19)+f_2(2)$ | $6 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 11$ |
| 48 | $f_{18}(48) = 9f_2(28)+3f_3(19)+f_3(3)$ | $9 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 17$ |
| 49 | $f_{12}(49) = 6f_2(28)+2f_3(19)+f_2(4)$ | $6 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 11$ |
| 50 | $f_{24}(50) = 12f_2(28)+4f_3(19)+2f_2(4)+f_2(2)$ | $12 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 23$ |
| 51 | $f_{36}(51) = 18f_2(28)+6f_3(19)+3f_2(4)+f_3(3)$ | $18 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 2 = 35$ |
| 52 | $f_{18}(52) = 9f_2(28)+3f_3(19)+f_3(7)$ | $9 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 17$ |

| | | |
|---|---|---|
| 53 | $f_{36}(53)=18f_2(28)+6f_3(19)+2f_3(7)+f_2(2)$ | $18\times1+6\times2+2\times2+1\times1=35$ |
| 54 | $f_{54}(54)=27f_2(28)+9f_3(19)+3f_3(7)+f_3(3)$ | $27\times1+9\times2+3\times2+1\times2=53$ |
| 55 | $f_3(55)=f_3(55)$ | 2 |
| 56 | $f_6(56)=2f_3(55)+f_2(2)$ | $2\times2+1\times1=5$ |
| 57 | $f_9(57)=3f_3(55)+f_3(3)$ | $3\times2+1\times2=8$ |
| 58 | $f_6(58)=2f_3(55)+f_2(4)$ | $2\times2+1\times1=5$ |
| 59 | $f_{12}(59)=4f_3(55)+2f_2(4)+f_2(2)$ | $4\times2+2\times1+1\times1=11$ |
| 60 | $f_{18}(60)=6f_3(55)+3f_2(4)+f_3(3)$ | $6\times2+3\times1+1\times2=17$ |

接著，在研究的過程中，為了方便觀察，我們將上列最少步數及層數的關係繪製成折線圖。




▲圖 4-18 已知最少步數與層數關係折線圖

從表 4-4 及圖 4-18 中，我們得到了幾項重要的發現：

(1)每一項的係數皆是由前一項的係數乘上要知道的顆數來得出

(2)每將層數分解一次，由於各層運算之間會有一層重疊，所以我們就要扣除重疊的層數，也就是當我們將$f(n)$分為 $f(x_m)+f(x_{m-1})+\cdots+f(x_2)+f(x_1)$所以我們可以得出

$$\sum_{m=1}^{j} x_m-(j-1)=n$$

舉$n=38$為例，$f_8(38)=4f_2(28)+2f_2(10)+f_2(2)$，則 $\mathrm{J}=3$

所以可以得知：$28+10+2-(3-1)=40-3+1=38$

(3) 因為我們的函數式僅僅使用二及三層公式系統，且二及三層公式系統皆是兩層數差呈現公比為 3 的等比數列，所以函數之間，每三個、三個會分成一組。

(4)並且我們也發現：每一組第二個函數，其解法會是第一個函數的 2 倍加$f_2(2)$，也因為如此，它的$\mathrm{z}_n$值和 $y$ 值會是第一個函數的兩倍；第三個函數，其解法會是第一個函數的 3 倍加$f_3(3)$，它的$\mathrm{z}_n$值和 $y$ 值也會是第一個函數的三倍，也因此函數可以 3 個、3 個或 9 個、9 個分為一組。

當 $m$、$m+1$、$m+2$ 在同一組中時，

$$2f_z(m)+f_2(2)=f_{2z}(m+1)$$

$$3f_z(m)+f_3(3)=f_{3z}(m+2)$$

(5)另外，我們還可以歸納出，$n$ 層的最少步數值= $z_n-1$（步）

**2. 三進位表格**

在將層數系統化的過程中，我們將兩層公式系統和三層公式系統中，同項次的層數視為我們在函數運算運算方法的大系統中的同一位數（如下表 4-5）。我們發現在同項次中，每一個三層公式系統的層數都是由 3 個同項次兩層公式系統的層數所組合而成。我們發覺，這樣的概念與數學中的「三進位法」似曾相識，於是我們就將我們的系統和三進位法加以統整，創造出一套新的三進位法。

▼表 4-5

| 三進位位數 | 第 5 位 | 第 4 位 | 第 3 位 | 第 2 位 | 第 1 位 |
|---|---|---|---|---|---|
| 兩層公式系統 | 82<br>$3^4+1$ | 28<br>$3^3+1$ | 10<br>$3^2+1$ | 4<br>$3^1+1$ | 2<br>$3^0+1$ |
| 三層公式系統 | 163<br>$2\times3^4+1$ | 55<br>$2\times3^3+1$ | 19<br>$2\times3^2+1$ | 7<br>$2\times3^1+1$ | 3<br>$2\times3^0+1$ |

在這個新的三進位法上，**我們同樣也將二和三層公式系統中的同項次的層數視為同一個位數**，因為兩層公式系統的層數所需的最少步數均為 1 步，於是我們將符合兩層公式系統的層數定位為數字 1；因為三層公式系統的層數所需的最少步數均為 2 步，所以我們把符合三層公式系統的層數定位為數字 2。也就是說，當分解後，數字為 1 時，就使用該項次中兩層公式系統層數；當分解後，數字為 2 時，就使用該項次中三層公式系統層數；當分解後，數字為 0 時，我們就跳過該項次所有的層數，不使用該項次進行分解。

**同時，因為在題目當中，層數為 1 時不用進行運算、使用不到我們的系統，所以十進位數字 1 的地方對應的層數為 2 層，也就是說，<u>十進位數字為其對應的三進位層數減 1</u>。**

▼表 4-6

| 十進位數字 | 對應層數 | 163 | 82 | 55 | 28 | 19 | 10 | 7 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | | | | | | | | | | 1 |
| **2** | 3 | | | | | | | | | 2 | |
| **3** | 4 | | | | | | | | 1 | | 0 |
| **4** | 5 | | | | | | | | 1 | | 1 |
| **5** | 6 | | | | | | | | 1 | 2 | |
| **6** | 7 | | | | | | | 2 | | | 0 |
| **7** | 8 | | | | | | | 2 | | | 1 |
| **8** | 9 | | | | | | | 2 | | 2 | |
| **9** | 10 | | | | | | 1 | | 0 | | 0 |
| **10** | 11 | | | | | | 1 | | 0 | | 1 |
| **11** | 12 | | | | | | 1 | | 0 | 2 | |
| **12** | 13 | | | | | | 1 | | 1 | | 0 |
| **13** | 14 | | | | | | 1 | | 1 | | 1 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **14** | 15 | | | | | | 1 | | 1 | 2 | |
| **15** | 16 | | | | | | 1 | 2 | | | 0 |
| **16** | 17 | | | | | | 1 | 2 | | | 1 |
| **17** | 18 | | | | | | 1 | 2 | | 2 | |
| **18** | 19 | | | | | 2 | | | 0 | | 0 |
| 19 | 20 | | | | | 2 | | | 0 | | 1 |
| 20 | 21 | | | | | 2 | | | 0 | 2 | |
| 21 | 22 | | | | | 2 | | | 1 | | 0 |
| 22 | 23 | | | | | 2 | | | 1 | | 1 |

在我們將各層數分解為三進位表示法，進而延伸到三進位表格後，我們開始將同一位數中的 1、2 分為兩排紀錄，於是我們就可以根據它所呈現的數字與在表格中的位置，找出它的三進位值與解法。

舉例來說：當層數=12，所對應到的是十進位數字中的 11，其三進位表示法即為(1 0 2)，於是，我們就可以知道解 12 層時，所需使用到的層數為兩層公式系統第三項的 10 層及三層公式系統第一項的 3 層，亦即$f_6(12)=3f_2(10)+f_3(3)$ 。

再以 38 層為例，其所對應到的十進位數字為 37、三進位式為(1 1 0 1)，所以我們可以知道，當我們要解 38 層時，所需使用到的層數為兩層公式系統第四、第二及第一項的 28 層、4 層和 2 層。

關於三進位表格中的結果，我們都可以由前一節的最少步數解法化為函數式的表格中得到驗證，所以找到這個方法，無疑是我們此次研究中的一大突破。

**3. 函數公式**

在列出以上函數式後，我們希望不要以由後往前推的方式來求得係數並列出其函數式，而是以最快的方式來尋找其中的規律，甚至是使用公式來取代，於是開始了以下的研究

經過上一部分解說，將十進位層數轉成三進位式後，我們可以令由右到左的第一位為$a_1$（並令$a_0=0$），第二位$a_2$，再來是$a_3$、$a_4\cdots\cdots a_i$，而函數式中各項次系統層數所使用的次數由右到左(依照項次)分別為$b_1$、$b_2$、$b_3$、$b_4\cdots\cdots b_i$

「函數式中前面的係數都是由其上一個的係數來決定的」這個看似簡單的定理卻是對推導出公式的重要關鍵」。

例如：

$f_8(38)=4f_2(28)+2f_2(10)+f_2(2)$將其化為函數式：38 層的三進位表示法(1 1 0 1)。

其中依照三進位表示法分別令： $a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=1$，$a_4=1$

並依照函數式的係數分別令： $b_1=1$，$b_2=0$，$b_3=2$，$b_4=4$

由$b_4$=$b_3(a_3+1)=2\times(1+1)$所以由此推得原系統的係數等於其下一個系統所使用的次數乘上其三進位所對應的數字加 1，因此我們可以得到此關係

$$b_4=b_3(a_3+1)=b_2(a_2+1)(a_3+1)=b_1(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)$$

不過

當$b_{i-1}\neq 0$時， $b_i=b_{i-1}(a_{i-1}+1)(a_{i-2}+1)(a_{i-3}+1)\cdots\cdots$以此類推

當$b_{i-1}=0$時，我們將$b_j$定義為離$b_i$最近，且不等於零的系統次數，於是

$$b_4=b_j(a_j+1)=b_{j-1}(a_{j-1}+1)\cdots\cdots\text{以此類推}$$

所以由其系統係數所得出的係數公式算法$\prod_{j=0}^{i-1}(a_j+1)$其中 $i$，$k$ 為常數。

繼續觀察其對應的三進位，我們發現其系統所要知道的字符數等於其三進位所對應的數字加一，可得$f_{a_i+1}$。

之後是括弧內的系統數字其內容決定於$a_n$，以再由函數表格中的系統對應的數字 1、2 中得到各個所使用到的系統：2 為$1\times3^0+1$，3 為 $2\times3^0+1$，4 為$1\times3^1+1$，7 為$2\times3^1+1$以此類推。所以我們可以從 2 推得其表示法為$a_1\times3^{1-1}+1$得

$$(a_i3^{i-1}+1)$$

最後我們可以推得：前面的使用字符數等於系統使用次數乘上其系統所要知道的字符數，例如：

$$f_8(38)=4f_2(28)+2f_2(10)+f_2(2)$$

其$f_8(38)$中的係數 8 為$4f_2(28)$中 28 所要知道的色球乘上其所使用的次數，所以我們可

以得其公式：$f_{\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)}(x)$其中 $i$、$k$為常數，$x$ 為待求數，其最少步數為

$4\times1+2\times1+1\times1=7$，所以最少步數為$\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{b_i}\times\mathrm{a_i})$

例如：我們要如何知道 38 層的函數式以及其最少步數？

從三進位表格中可知 38 層的三進位表示法為(1 1 0 1)，故$a_1$=1，$a_2$=0，$a_3$=1，$a_4$=1

將其代入左式$\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)$中可得 $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)$

$=2\times1\times2\times2$

$=8$

再代入右式$\sum_{i=1}^{k}\left[\prod_{j=0}^{i-1}(a_j+1)\right]f_{a_i+1}(a_i3^{i-1}+1)$中可得下列四式

當 i=1 時：$(a_0+1)f_{a_1+1}(a_1\times3^0+1)\ \rightarrow f_2(2)$

當 i=2 時：$(a_0+1)(a_1+1)f_{a_2+1}(a_2\times3^1+1)$ →因$a_2=0$故此式不成立

當 i=3 時：$(a_0+1)(a_1+1)(a_2+1)f_{a_3+1}(a_3\times3^2+1)\ \rightarrow 2f_2(10)$

當 i=4 時：$(a_0+1)(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)f_{a_4+1}(a_4\times3^3+1)\ \rightarrow 4f_2(28)$

在以上式子中加上$4f_2(28)$+$2f_2(10)$+$f_2(2)$ 則與原式相符

其最少步數為$4\times1+2\times1+1\times1=7$，所以最少步數為$\sum_{i=1}^{k}(b_i\times a_i)$

再綜合所有運算得：

$$f_8(38)=4f_2(28)+2f_2(10)+f_2(2)$$ →抑與原式相同

所以總結以上的過程我們得到一個超乎想像的一個公式：

這個公式可以快速求出一整個函數式

$$f_{\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)}(x)=\sum_{i=1}^{k}\left[\prod_{j=0}^{i-1}(a_j+1)\right]f_{a_i+1}(a_i3^{i-1}+1)$$

其實，這個公式並沒有想像中的龐雜，我們以 1000 層為例，如果使用最原始的方法—一步一步推算，需要運算

999+998+997+…+5+4+3+2+1=499500(次)

但若使用我們的運算公式和法則，則 1000 層會被分解成

$4f_2(730)+2f_2(244)+f_2(28)$（因為 1000 的三進位表示為 1101000）

所以我們可以知道：

$$f_8(1000) = 4f_2(730)+2f_2(244)+f_2(28)$$

也就是說，若要求 1000 層的解，只需要知道第一列特定 8 個色球的顏色，就可以在 ***7 步***之中完成。這可比原先少了不只千倍、萬倍地輕鬆啊！

## 四、求第 *i* 列第 *j* 個

在得知所有層數的函數解法以後，我們在想，我們得到最後的運算能不能不只是求出最後一層，而是每一列的每一個都可以快速求出呢？於是我們開始了這個研究。

為了這個主題，我們設計出了一套座標系統，我們令所要求的色球座標為$P(i，j)$，其中i值為我們所要求出的色球由上到下所對應的列數，$j$ 值為我們所要求出的色球由左到右所對應的顆數。另外我們也將我們已知的列數設為第 *1* 列，作為我們求解的依據。

當我們要知道$P(i，j)$時。可以從$P(i，j)$倒推至第一列來得出解。因此只要知道，我們所要知道的第一列色球起始點$P(1，j)$，$P(1，j+1)$，$P(1，j+2)$，……，$P(1，i+j-1)$，再利用前一節的方法，就可以得到最少步數，並發現 $P(i，j)$的最少步數即為$i$層的最少步數。

以圖 4-19 為例，若我們已知的列數為第二列，且要找出其中的色球 *P(4，2)*。我們將 *i*=4、*j*=2、*m*=1 帶入座標系統中，我們就可以知道，要找出其解就需往上推從$P(1，2)$到 $P(1，1+5-1)$這四顆色球來得出解。可使用$P(1，2)$和P(1，5)並用四層公式 $P(4，2)= P(1，2)\oplus P(1，5)$，只用一次步數即可求得 $P(4，2)$。得其 *i* 值為 4

R R B G R B<br>
R G R B G<br>
B B G R<br>
B R B<br>
G G<br>
G

▲圖 4-19

因此得出：

**公式四：欲求出 *P(i，j)*，可從 *P(1，j)*到 *P(1，i+j−1)*之中求出解，且其最少步數為 *i* 層之最少步數。**

# 伍、結論

**(一) *n* 層有排列方式有** $\dfrac{3^n+3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{2}$ 種

(二)當層數$\boldsymbol{a_m}=\ \mathbf{2\times 3^{m-1}+1}$、$\boldsymbol{m}\geq\mathbf{1}$時，可以以第一層最首、最末項進行運算，再與第$\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$項進行運算，得最少步數解為 **2** 次

(三)當層數$\boldsymbol{b_m}=\mathbf{3^{m-1}+1}$、$\boldsymbol{m}\geq\mathbf{1}$時，可以以第一層最首、最末項進行運算，得最少步數解為 **1** 次

(四)若$\boldsymbol{x_m}$代表分解過程中所用到二或三層公式系統的層數，且將十進位層數轉成三進位式後，我們令由右到左分別為$\boldsymbol{a_1}$、$\boldsymbol{a_2}$、……、$\boldsymbol{a_i}$(令$\boldsymbol{a_0}=\mathbf{0}$)，而函數式中各項次系統層數所使用的次數由右到左**(**依照項次**)**分別為$\boldsymbol{b_1}$、$\boldsymbol{b_2}$、……、$\boldsymbol{b_i}$。原本由第一列求到第 ***n*** 列需要運算$\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$步，但經過我們的研究，我們得到已知的最少步數為$\sum_{i=1}^{k}\left(b_i\times a_i\right)$

(五)我們將各層數化為函數式，並以

$$f_{z_n}(n)=y_m f_{z_m}(x_m)+y_{m-1}f_{z_{m-1}}(x_{m-1})+\ldots+y_1 f_{z_1}(x_1)$$

來表示。

(六)發現每一個三層公式系統的層數皆是由 **3** 個同項次兩層公式系統的層數所組合而成。我們還發現這個與三進位十分相似，並以上述二、三層公式系統所使用的步數 **1**、**2** 來表示三進位。

(七)總結三進位表示法及函數式，將其化成函數公式：

$$f_{\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)}(x)=\sum_{i=1}^{k}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(a_j+1\right)\right]f_{a_i+1\left(a_i 3^{i-1}+1\right)}$$

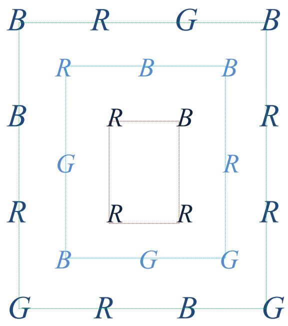
(八)最後，我們還發現不單是第 ***n*** 層有快速解法而已，任一列、任一個都可以快速求出其解。從 ***P*(*1*，*j*)**到 ***P*(*1*，*i*+*j*-*1*)**，再以其所求出的層數進行運算求得 ***P*(*i*，*j*)**

# 陸、未來展望

在研究過程中，我們將原規則稍做更動，定義出下列兩種新規則：

### （一）環狀排列收斂

以 $p$ 個 $R$、$G$、$B$ 三色球各若干個為頂點，作一正 $p$ 邊形，再取兩頂點之中點，並將相鄰兩中點連接，形成一個略小的 $p$ 邊形，如此反覆進行相同的動作，直到內側 $p$ 邊形與最外圈有相同的排列。




▲圖 6-1

### （二）金字塔型

共 $q$ 個 $R$、$G$、$B$ 三色球各若干個排成一行，再以相同總數的色球排列，形成一中空正方形。在此正方形中插入一邊長為 $q-1$ 個色球的中空正方形形成第二圈……以此類推到第三圈，直到內側為

$2\times2$ 排列之中空正方形。

從第二圈起，圖形的形狀由其外側 2 個或 3 個色球來決定。若其外側有三色球，則兩不相鄰色球先行運算（若相同則得出相同色球，不同

則得出第三種色球），再與中間色球運算；若其外側有兩色球，則兩色球

依照原規則運算後即可得解。

但因為我們尚無法完整定義出真正的「金字塔型」，仍不能更進一步進行探討和研究，所以這將是我們未來發展的重點項目之一。

# 柒、參考文獻


**1.** 游森棚。十二個課堂遊戲探索問題。科學研習月刊。國立台灣科學教育館。2015 年 4 月，$p$.48。

2. 周家萱、詹雅涵、黃子恆，2016 年。〈神算〉。中華民國第 56 屆中小學科學展覽會國小組數學科最佳創意獎。

3. 高中數學第二冊 2-2 排列與組合 $p$.78~$p$.102　　　南一書局

## 【評語】030407

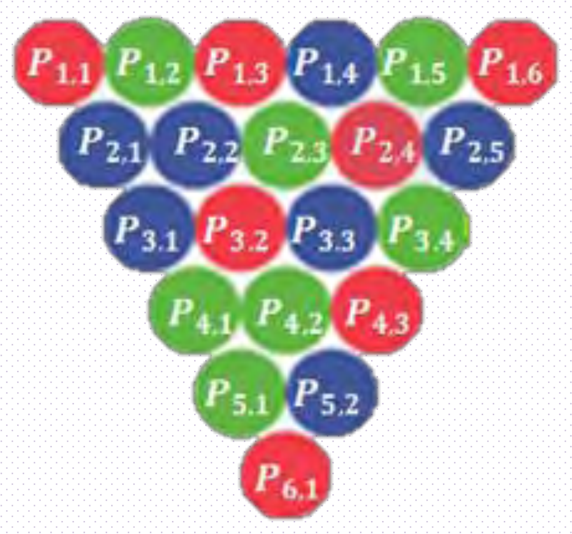
作者分析一個離散動態系統問題,考慮給定排成一列的紅、藍、綠三種顏色的 n 個色球，依特定規則衍生下一列 n-1 個色球，再依循同樣規則衍生下一列 n-2 個色球…直到剩餘一個色球（第 n 列）為止，如何快速判斷最後一顆球的顏色的問題。透過抽象的符號操作，作者們聰明的將問題轉換成簡單的代數計算問題，並藉由代數式化簡的結果，將題目轉換為算子運算來操作，導出簡化規則，說明清楚且有條理,過程詳細有其複雜性與難度,是一件精彩的作品。後半部關於最少計算步數的說明稍嫌簡略了些，最小步數的計算及一般式也應納入成為研究目的。部分符號交代得不夠清楚，且硬把演算法的概念寫成一個複雜公式是沒有必要的。如果能把這部分再稍做修正會更好（數學傳播近期會有與此問題相關的一篇文章，作者們到時也可以參考文章中所提的結果）。處理方法不俗，引進運算及三進位的想法令人驚艷，結論也頗漂亮，是相當具有數學味道的作品。

## 作品海報

# 遊戲規則及研究目的

一共 $n$ 個**紅**、**綠**、**藍**三種顏色的色球各若干個排成第一列，在下一列排$n-1$個色球（每個色球插空隙）成第二列，以此類推排第三列……直到最後一列只有一個色球。 但從第二列起，色球的顏色由其左上和右上決定。若左上右上不同色，則此球為第三種顏色；若左上右上同色，則此球也同色。

本作品主要在探討：




一、求出$n$層有多少種排列方式

二、找出$n$層的基本判斷法

三、$n$層的最少步數及系統化

四、速求第$i$層第$j$個之解

# 研究過程

## 一、$n$層第一列排列種類數

首先，我們將如$(R\ G)\Leftrightarrow(G\ R)$和$(R\ G\ B)\Leftrightarrow(B\ G\ R)$這類*左右交換*的組合，定義為「**左右不對稱的排列組合**」。

從我們的定義中可以知道，當層數為$n$，在正推的情況下，計算排列種類的方式為：$3^n -$「**左右不對稱的排列組數**」除上述方法外，排列種類數量也等於加上不重複的組合(左右對稱的組合)再除以2。因為在「左右對稱的排列種類」中，我們只需考慮第一列第$P_{1,1}$~$P_{1,\left[\frac{n+1}{2}\right]}$個色球，又每個位置均有$(R)$、$(G)$、$(B)$三種可能，於是，可知當層數為$n$時「左右對稱的排列種類」數應為：$3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$(種)　　註：$[x]$為高斯符號，代表小於等於x的最大整數。

由此我們可以推得，$n$層的**正推排列種類數量為：**$\dfrac{3^n+3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{2}$ **(種)**

接著，我們試著由$P_{n,1}$開始向上逆推第一列的排列種類數量。

依照我們原先的定義，每一個色球逆推上去會有2種可能(如第$n$列為$R$時，第$n-1$列可為$(R\ R)$、$(G\ B)$兩種)，又經由觀察可以發現，當逆推到2的倍數層的時候，就會多出$3^{n-1}$個「左右不對稱的排列組合」，因此當層數$n$為偶數時就必須減掉$3^{n-1}$種排列組合，而減掉$3^{n-1}$種組合，也等同於加上左右對稱的組合再除以2 。

下表中，我們將第$n$列固定為其中一種顏色的色球，於是就可以歸納出各層左右對稱的排列種類數公式為：$3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$

| | 一層 | 兩層 | 三層 | 四層 | 五層 | 六層 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **逆推中各層左右** | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 | 9 |
| **對稱的排列數** | $(3^0)$ | $(3^1-2\times3^0)$ | $(3^1)$ | $(3^2-2\times3^1)$ | $(3^2)$ | $(3^3-2\times3^2)$ |

可以知道：當我們將第$n$層固定為其中一種色球時，**逆推排列種類數量**為：$\dfrac{3^{n-1}+3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{2}$

但當不限制第$n$層的色球以後，第$n$層會有3種可能，即上述的公式乘以3，也就是：$\dfrac{3^{n-1}+3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{2}\times3=\dfrac{3^n+3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{2}$

***故可知：不管正推或逆推，排列種類數量均相同。***

> **公式一：$n$層的排列方式有** $\dfrac{3^n+3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{2}$ **種**

在排列方式的最後，我們研究了「有序排列」。有序排列又分為兩種：

> 發現一：當我們**僅用兩種色球交錯排列**時，$P_{n,1}$必為未使用到的*第三種色球*；
> 當我們**使用三種色球依序排列**，$P_{n,1}$只需透過第一列最左及最右兩色球便可得其結果。

## 二、$n$層的基本判斷法

進行判斷之前，我們首先做出了以下幾個基本公設：

若$a$、$b$、$c\in\{R$、$G$、$B\}$，則：

公設(1)：$a\oplus a=a$

公設(2)：若$a\neq b\neq c$，則 $a\oplus b=c$

公設(3)：$a\oplus b= b\oplus a$

由上述公設中我們可以推導出：

> 性質一：假設$a$、$b$、$c\in\{R$、$G$、$B\}$，可得：$\boldsymbol{(a\oplus b)\oplus b=a}$

（一）三層公式

在尋找第$n$列速解法的過程中，我們選擇從最簡單的三層開始窮舉、觀察，我們發現了三層似乎可由特殊的規則得出答案。

> 性質二：假設$a$、$b$、$c$、$x\in\{R$、$G$、$B\}$，當固定$a$、$b$，對任意$x$可得：$\boldsymbol{(a\oplus x)\oplus(x\oplus b)=(a\oplus b)\oplus x}$

經過性質二的證明可知：在三層中我們可以將共同項$P_{1,2}$提出，先運算$P_{1,1}$和$P_{1,3}$，再與$P_{1,2}$運算，於是，我們就可以把運算步驟數由原來的3次減為$1+1=2$次。

$$\begin{aligned}&(P_{1,1}\oplus P_{1,2})\oplus(P_{1,2}\oplus P_{1,3})\\=\ &P_{1,2}\oplus(P_{1,1}\oplus P_{1,3})\end{aligned}$$

> 定理一：三層可由首列*兩側之值相運算後*，再與首列中央的值進行運算，即可得解。

（二）四層公式

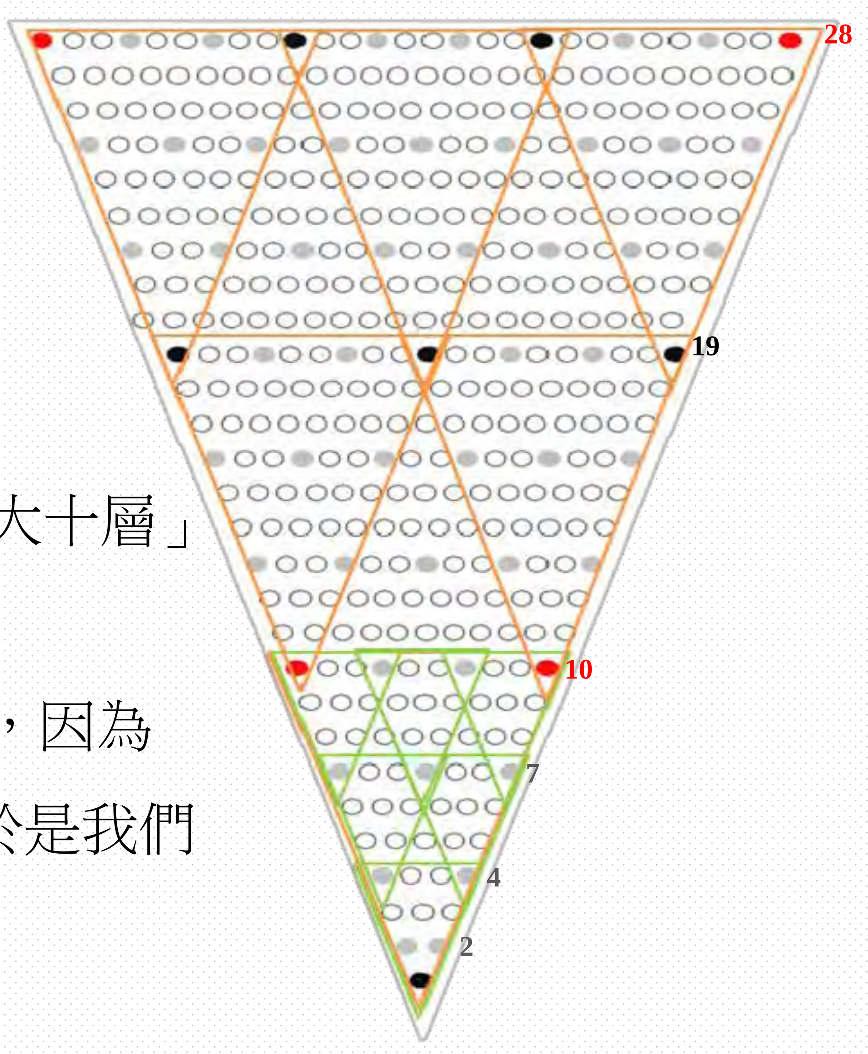
依照原本的推算法，四層所需的總運算步數共$1+1+1+1+1+1=6$次。但經過窮舉、觀察、研究，我們也發現了四層的特殊判斷法。

性質三：假設$a$、$b$、$c$、$x$、$y \in \{R、G、B\}$，當固定$a$、$b$，對任意$x$、$y$可得：$[(a\oplus x)\oplus y]\oplus[(b\oplus y)\oplus x]=a\oplus b$

透過性質三的證明可知，不論何種組合，四層皆可由首列的左右兩個色球相運算後得解，所需運算步數也可以從6次減成1次。同時，我們還可以瞭解到，這樣的規則和兩層是相同的。

定理二：四層可由首列兩側之值相運算，即可得解。

## 三、*n*層的最少步數及系統化




一般來說，要求得第$n$列的解共需計算$(n-1)+(n-2)+\cdots+1$次，也就是$\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$次，我們為了減少運算的步數，開啟了下面的研究。

透過定理一、定理二，我們可以分別延伸出**兩層公式系統**及**三層公式系統**。

### （一）兩層公式系統

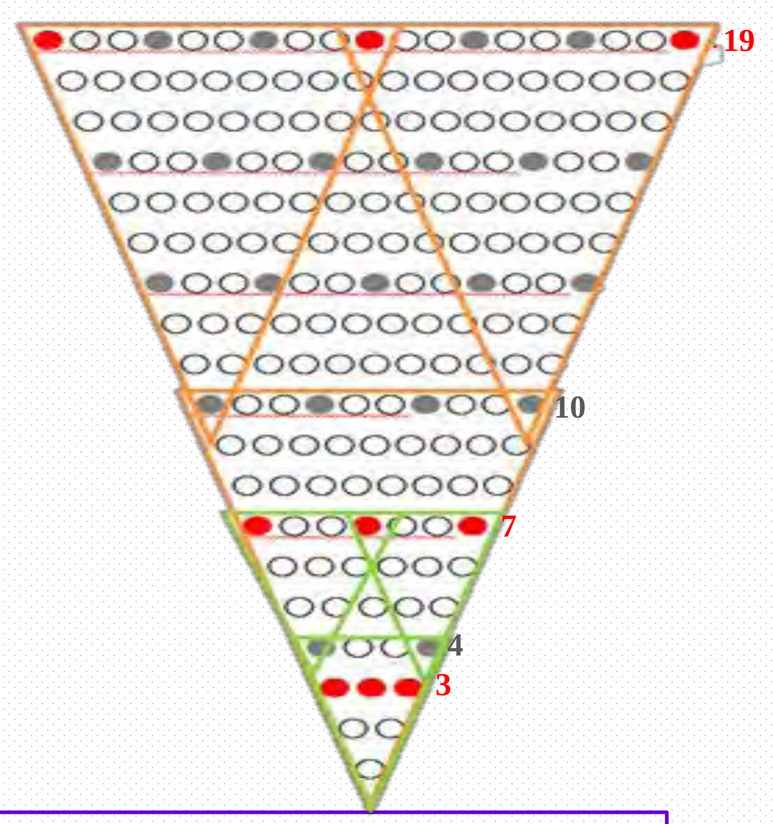
我們先以四層為基本圖。經過類推可以發現：10層可視為「大四層」、28層可看作「大十層」，且二者皆能利用最左及最右兩色球得知其結果 (均符合兩層公式系統)。

令符合兩層公式系統的最小層數2為$a_1$、4為$a_2$、10為$a_3$、28為$a_4$……第$n$個層數為$a_m$，因為每一個層數皆是由其前一個層數向上推展兩次來得出，且每推展一次就會有一層重疊，於是我們可以寫出關係式：$a_m=a_{m-1}+(a_{m-1}-1)+(a_{m-1}-1)$

最後，我們可以得到：

**公式二：若$a_m=3^{m-1}+1$層，則$a_m$符合「兩層公式系統」，只需利用最左及最右兩色球即可得知其結果。**

### （二）三層公式系統




以三層圖型作為基本圖，我們可以發現： 7層是由3個四層所組合而成的「大三層」，而19層亦是由3個十層所組合而成的「大三層」，所以均符合**三層公式系統**。

(除此之外，我們還可以知道，三層公式系統是由3個兩層公式系統層數所組成。)

我們由3層向上反覆推導，發現層數之間的差會形成**公比為3的等比數列** 4，12，36……

我們將各數值代入等比級數公式中，即可得出三層系統的層數公式。

**公式三：若 $b_m=2\times3^{m-1}+1$層，則$b_m$符合「三層公式系統」，先由最左及最右的色球進行運算，再與最中間的色球進行運算，即可得出答案。**

接著，利用公式二、公式三，我們將$n$層化為函數式

$$f_{z_n}(n)=y_m f_{z_m}(x_m)+y_{m-1}f_{z_{m-1}}(x_{m-1})+\ldots+y_1 f_{z_1}(x_1)$$

其中$x_m$代表分解過程中所用到二或三的系統的層數，$z_n$、$z_m$值代表該層得出最少步數所需要知道的色球顆數。

為了方便研究及找出更多的特性，我們製作了下列的表格：

| 層數 | 函數式 | 已知最少步數（步） |
|---|---|---|
| 2 | $f_2(2)=f_2(2)$ | 1 |
| 3 | $f_3(3)=f_3(3)$ | 2 |
| 4 | $f_2(4)=f_2(4)$ | 1 |
| 5 | $f_4(5)=2f_2(4)+f_2(2)$ | $2\times1+1\times1=3$ |
| 6 | $f_6(6)=3f_2(4)+f_3(3)$ | $3\times1+1\times2=5$ |
| 7 | $f_3(7)=f_3(7)$ | 2 |
| 8 | $f_6(8)=2f_3(7)+f_2(2)$ | $2\times2+1\times1=5$ |
| 9 | $f_9(9)=3f_3(7)+f_3(3)$ | $3\times2+1\times2=8$ |
| 10 | $f_2(10)=f_2(10)$ | 1 |
| 11 | $f_4(11)=2f_2(10)+f_2(2)$ | $2\times1+1\times1=3$ |
| 12 | $f_6(12)=3f_2(10)+f_3(3)$ | $3\times1+1\times2=5$ |
| 13 | $f_4(13)=2f_2(10)+f_2(4)$ | $2\times1+1\times1=3$ |
| 14 | $f_8(14)=4f_2(10)+2f_2(4)+f_2(2)$ | $4\times1+2\times1+1\times1=7$ |
| 15 | $f_{12}(15)=6f_2(10)+3f_2(4)+f_3(3)$ | $6\times1+3\times1+1\times2=11$ |
| 16 | $f_6(16)=3f_2(10)+f_3(7)$ | $3\times1+1\times2=5$ |
| 17 | $f_{12}(17)=6f_2(10)+2f_3(7)+f_2(2)$ | $6\times1+2\times2+1\times1=11$ |
| 18 | $f_{18}(18)=9f_2(10)+3f_3(7)+f_3(3)$ | $9\times1+3\times2+1\times2=17$ |
| 19 | $f_3(19)=f_3(19)$ | 2 |
| 20 | $f_6(20)=2f_3(19)+f_2(2)$ | $2\times2+1\times1=5$ |

從表格中，我們得到了幾項重要的發現：

◎每一項的係數皆是由前一項的係數乘上要知道的顆數來得出

◎每將層數分解一次，由於各層運算之間會有一層重疊，所以我們將$f(n)$分解為$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{m-1})+f(x_m)$，可以得出$\sum_{m=1}^{j} x_m-(j-1)=n$

◎函數之間，每三個、三個會分成一組。

◎當$m$、$m+1$、$m+2$在同一組中時，$2f_z(m)+f_2(2)=f_{2z}(m+1)$，$3f_z(m)+f_3(3)=f_{3z}(m+2)$

◎**$n$層的最少步數值$=z_n-1$**（步）

我們發現在同項次中，每一個三層公式系統的層數都是由3個同項次兩層公式系統的層數所組合而成，於是我們將各層數整理排列，將原本十進位的層數，化為三進位式，並將此三進位式代入我們的三進位表格中。對照上列函數表，可以發現它會呈現出所對應的函數式結果。

| 十進位數字 | 對應層數 | 163 | 82 | 55 | 28 | 19 | 10 | 7 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | | | | | | 1 |
| 2 | 3 | | | | | | | | | 2 | |
| 3 | 4 | | | | | | | | 1 | | 0 |
| 4 | 5 | | | | | | | | 1 | | 1 |
| 5 | 6 | | | | | | | | 1 | 2 | |
| 6 | 7 | | | | | | | 2 | | | 0 |
| 7 | 8 | | | | | | | 2 | | | 1 |
| 8 | 9 | | | | | | | 2 | | 2 | |
| 9 | 10 | | | | | | 1 | | 0 | | 0 |
| 10 | 11 | | | | | | 1 | | 0 | | 1 |
| 11 | 12 | | | | | | 1 | | 0 | 2 | |
| 12 | 13 | | | | | | 1 | | 1 | | 0 |
| 13 | 14 | | | | | | 1 | | 1 | | 1 |
| 14 | 15 | | | | | | 1 | | 1 | 2 | |

將十進位層數轉換成三進位的函數式之後，我們再令第一位為$a_1$（並令$a_0=0$），第二位$a_2$，再來是$a_3$、$a_4$……而函數式所使用到的系統次數由右到左記為$b_1$、$b_2$、$b_3$、$b_4$

因為前一個系統的係數等於其下一個系統所使用的次數乘上其三進位所對應的數字加一，所以我們可以得到**係數公式算法** $\prod_{j=0}^{i-1}(a_j+1)$，其中$i$、$k$為常數。

藉由觀察與先前的研究，我們可以推導出：在前面使用的字符數會等於該系統使用的次數乘上該系統第一列所須知道的色球數。於是，我們可以得到公式：**$f_{\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)}(x)$，其中$i$、$k$為常數，$x$為待求數，最少步數為** $\sum_{i=1}^{k}(b_i\times a_i)$

最後，總結上述，得：

> 公式四：**$n$層最少步數函數解法為$f_{\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)}(x)=\sum_{i=1}^{k}[\prod_{j=0}^{i-1}(a_j+1)]\,f_{a_i+1}(a_i3^{i-1}+1)$**

## 四、*n*層中求第*i*列第*j*個

接下來，我們把所要求的色球座標令為$P(i,j)$。由於我們已求出$P_{n,1}$的最少步數及函數解法，我們就可以將$P(i,j)$視為某一層數中的$P_{n,1}$，我們只需要再知道第一層中的$P(1,x)$到$P(1,y)$的色球顏色，便可得解。

由於是從$P(i,j)$推至第1列來得出解，因此可知，我們所需知道第1列的起始色球座標為$P(1,j)$。接著我們可以推出，所要知道的第1列最末色球的座標為$P(1,i+j-1)$。同時，因為我們已知的層數為第一層，且要求出的解$P(i,j)$位在第$i$列，所以得出$P(i,j)$的最少步數即為$i$層的最少步數。

以右圖為例，若我們已知的列數為第一列，且要找出其中的色球$P(4,2)$。我們將$i=4$、$j=2$、$m=1$帶入座標系統中，我們就可以知道，要找出其解就需往上推從$P(1,2)$到$P(1,1+5-1)$這四顆色球來得出解。也就是使用$P(1,2)=R$、$P(1,5)=R$ 並用四層公式求得其解$P(4,2)=R$

由於$i$值為4，因此可得知它的最少步數為4層的*1*次。

*R R B G R B*
*R G R B G*
*B B G R*
*B R B*
*G G*
*G*

> 公式五：**欲求出$P(i,j)$，可從$P(1,j)$到$P(1,i+j-1)$之中求出解，且其最少步數為$i$層之最少步數。**

## 結論

(一) **$n$層排列方式有 $\dfrac{3^n+3^{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}}{2}$ 種**

**(二)當層數$a_m=3^{m-1}+1$、$m\geq 1$時，可以以第一層最首、最末項進行運算，得最少步數解為1次**

**(三)當層數$b_m=2\times 3^{m-1}+1$、$m\geq 1$時，可以以第一層最首、最末項進行運算，再與第$[\frac{n+1}{2}]$項進行運算，得最少步數解為2次**

**(四)原本由第一列求到第$n$列需要運算 $\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$ 次，但經過我們的研究，我們得到已知的最少步數為 $\sum_{i=1}^{k}(b_i\times a_i)$**

**(五)我們將各層數化為函數式，並以 $f_{z_n}(n)=y_mf_{z_m}(x_m)+y_{m-1}f_{z_{m-1}}(x_{m-1})+\ldots+y_1f_{z_1}(x_1)$表示。**

**(六)發現每一個三層公式系統的層數皆是由3個同項次兩層公式系統的層數所組合而成，且此函數與三進位十分相似，並以上述二、三層公式系統所使用的步數1、2來表示三進位。**

**(七)總結三進位表示法及函數式，將其化成函數公式：$f_{\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)}(x)=\sum_{i=1}^{k}\left[\prod_{j=0}^{i-1}(a_j+1)\right]f_{a_i+1}(a_i3^{i-1}+1)$**

**(八)找出任一列任一個的快速解法通式：從$P(1,j)$到$P(1,i+j-1)$，再以其所求出的層數進行運算後，便可得解。**