中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

030406

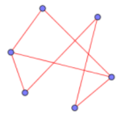
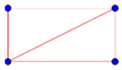
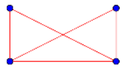
§雙三角‧終結者§

學校名稱：桃園市立平興國民中學

作者：	指導老師：
國二 邱曉慧 國二 陳嘉妘	林慧欣

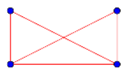
關鍵詞：圖形學、組合

摘要

雙三角終結者是一種兩人對戰遊戲，兩人輪流在數個點之間連線  ，直到其中一方畫出終止圖形  、  (兩個三角形共邊)，此人即成為輸家。在進行這個遊戲時，依照不同的型態進行排列組合及歸納，發展出不同的公式，經由公式我們可以預先知道最終條數。若結果不利我方，可以利用一些應對的方法來改變最後結果，進而取得勝利。也就是說從公式的角度出發，我們不用再一條一條的試畫便能直接找到最終連線數。不只便利更能迅速算出結果，甚至有些只要用看的就能得到答案。當點數過大時，用公式算比自已畫來得準確。

除此之外我們還發現了另一種簡便的『三角形觀察法』，此種方式就不需要分成上下來討論，在畫的時候也比較容易畫線，而且可以避免終止圖形的產生。

壹、 研究動機

一開始我們原本是想找有關”拈”這個數學遊戲的資料做為科展題目，但發現我們所能發展出的內容不多。幸虧天無絕人之路，我們在國立台灣科學教育館所出版的科學研習月刊中[游森棚(2016)•六邊形對抗賽•科學研習，No.55-09，P64。]，六邊形對抗賽這個遊戲是給定 6 個點其中任三點不共線，雙方輪流把兩點連一條線，直到雙方當中有一人畫出終止圖形  、  (兩個三角形共邊)，則此人即成為輸家。六邊形對抗賽有點類似”拈”的遊戲，再加上國中課程剛好上到多邊形的對角線個數，也是因為剛學過於是我們便開始著手研究繪製圖形並把點數擴充去尋找一般式。但我們發現當點數越大，圖形會變得很複雜以至於很難去尋找可以連線的地方，甚至有時候我們都已經連出終止圖形卻不知道。所以希望能透過不同的方式去找出規律並歸納出容易進行畫圖的方法，期待能發展出一套策略來讓自己成為獲勝的一方。以下我們展開一連串的研究。

貳、 研究目的

一、探討『終止圖形』的特性。

二、畫出四點、五點、六點、和七點的『完勝圖形 』，並且把點移動成上下兩群的圖形，以便觀察討論。

三、“完勝圖形”如何移動成“上下分點後進行連線的圖形 ” 。

四、 採“上下分點後進行連線的圖形 ”找出任意三點不共線時，n 個點的最多、最少的可連線數。

五、 從“上下分點後進行連線的圖形 ”找出的公式中，研擬出雙三角終結者的對戰策略，並改變雙三角終結者的結局。

六、 在對戰中，如果圖形連出很多三角形，我們也可以用『三角形觀察法』來簡易判斷圖形還有多少連線可能，以便作為決策的依據。

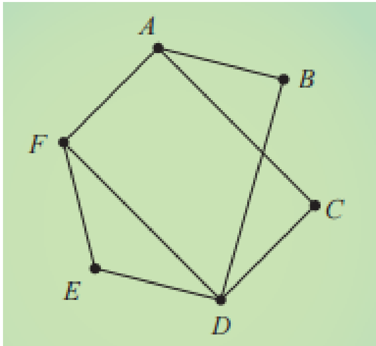
參、 研究設備及器材： 電腦(GeoGebra)、紙、筆。

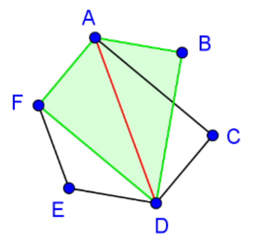
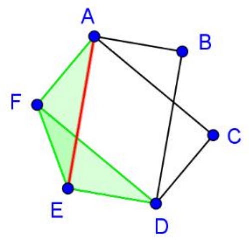
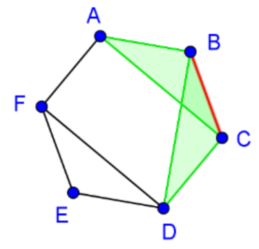
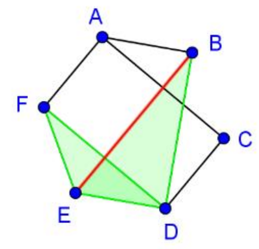
肆、 研究過程

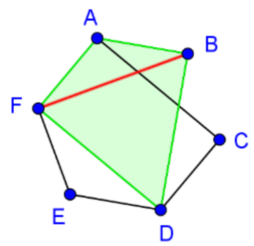
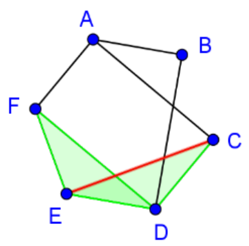
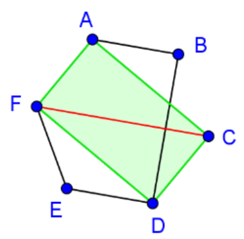
$\boxed{\text{題目}}$：小志和小定玩一個遊戲，一開始有正六邊形的六個頂點，然後兩人輪流畫邊或對角線(也就是任意兩點去連線)，直到畫出四點之間的連線狀況是右圖兩種圖形的任一種，而畫出這些圖形的人就算輸了，比賽也結束了。此兩種圖形我們稱之為『終止圖形』。

終止圖形一　　終止圖形二

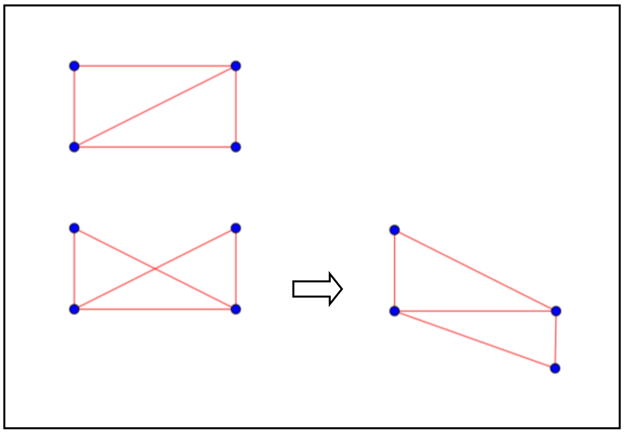
例如：當兩人開始遊戲，互相連線到右圖這個階段，我們會發現接下來的人已不能再繼續畫(參考下列七個圖表的畫法)，因為不管連接哪一條線，一定會出現上面兩種終止圖形，所以比賽到此結束，而原本要接下去畫的人因為不能再畫，而成為輸家。像右圖這種不能再繼續畫的圖形，我們稱之為『完勝圖形 』。



 連接 $\overline{AD}$，畫出終止圖形一	 連接 $\overline{AE}$，畫出終止圖形二	 連接 $\overline{BD}$，畫出終止圖形二	 連接$\overline{BE}$，畫出終止圖形一

 連接 $\overline{BF}$，畫出終止圖形一	 連接 $\overline{CE}$，畫出終止圖形二	 連接 $\overline{CF}$，畫出終止圖形一

一、從點數少的開始探討終止圖形的特性：

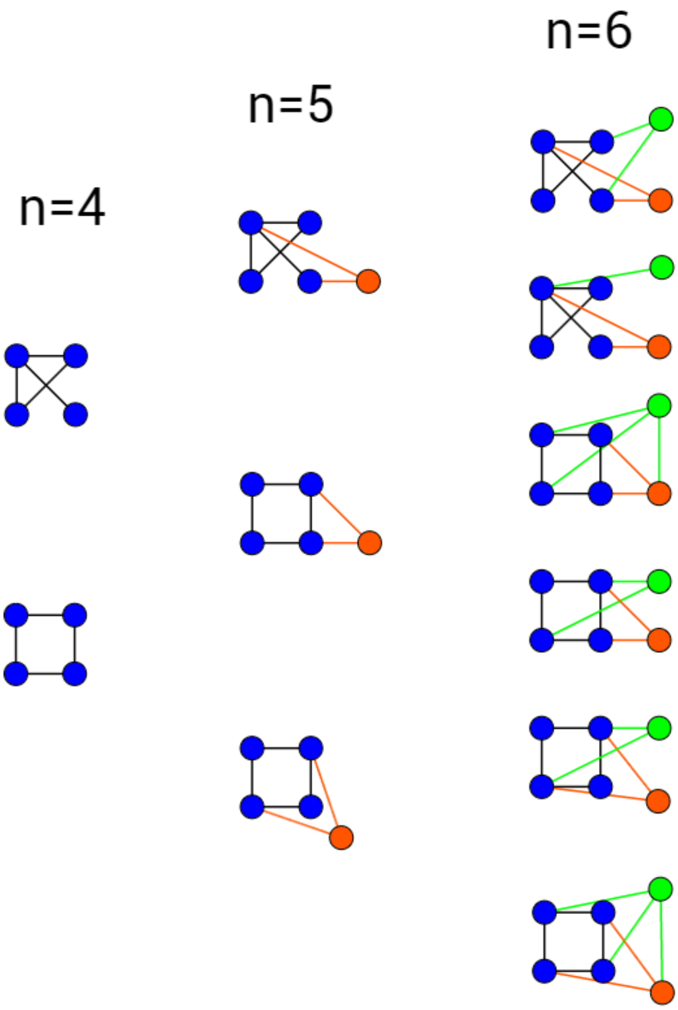


如左圖，

我們發現兩種終止圖形都可以移動成如圖中箭頭所指的圖形(出現兩個三角形有共邊)，

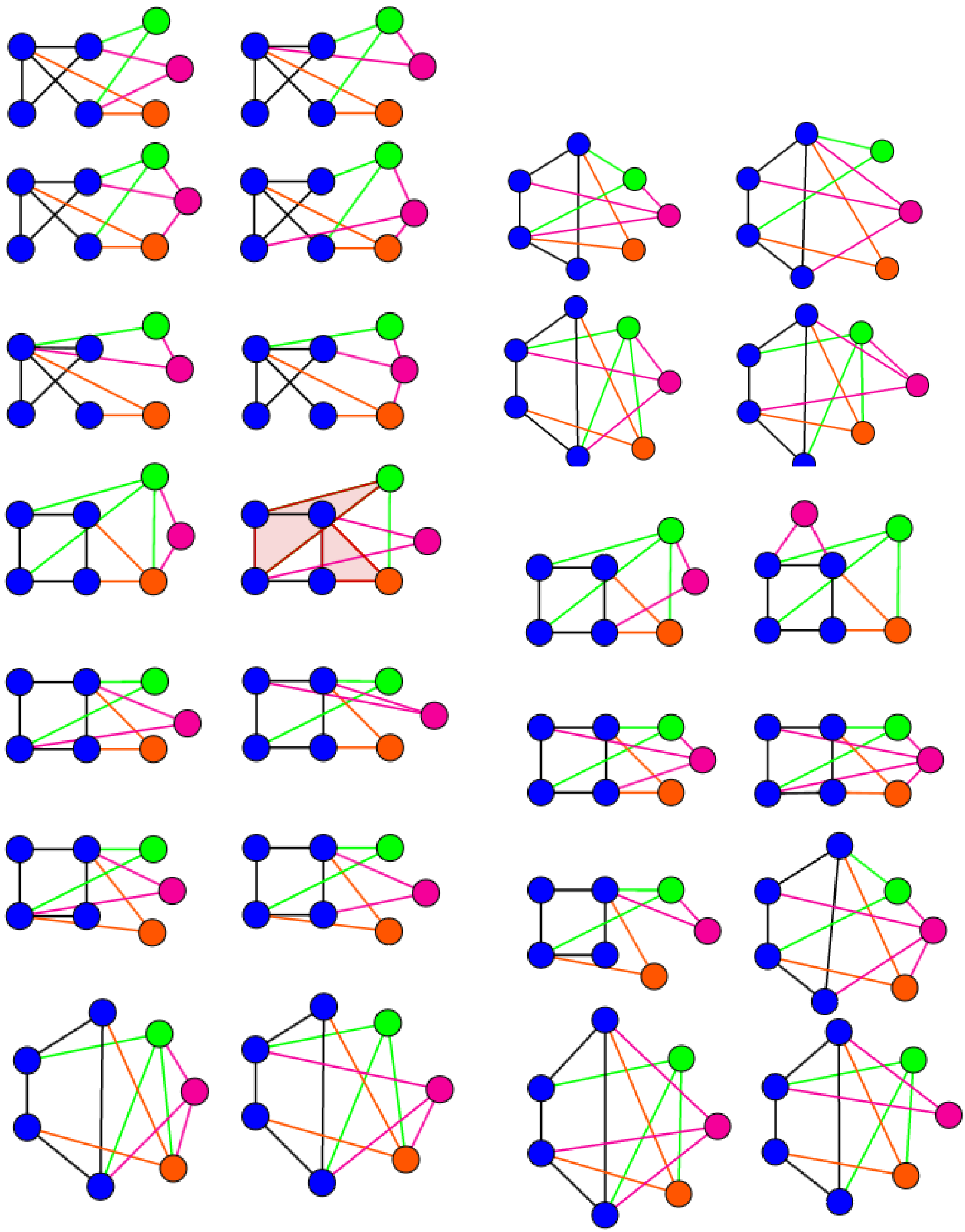
所以我們要避免兩個三角形出現共邊。

二、從點數少的開始畫出所有的『完勝圖形 』(從 4 個點慢慢增加到 7 個點)：



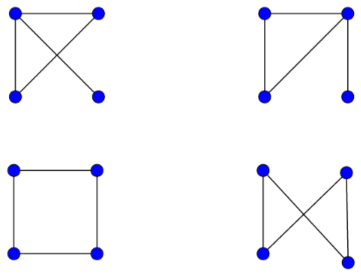
我們從原本四點增加一點變成五點，把所有可能畫出來並刪掉重複的圖形。(因為有些圖形頂點經過移動後會一模一樣，所以我們在 GeoGebra 畫圖，並透過移動來確認圖形的相同程度)

n=7

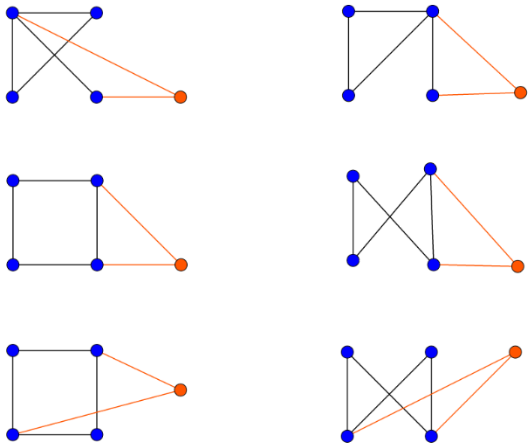


三、

(一) **討論：**我們發現“完勝圖形”經過移動後同構“上下分成兩群後進行連線的圖形”。



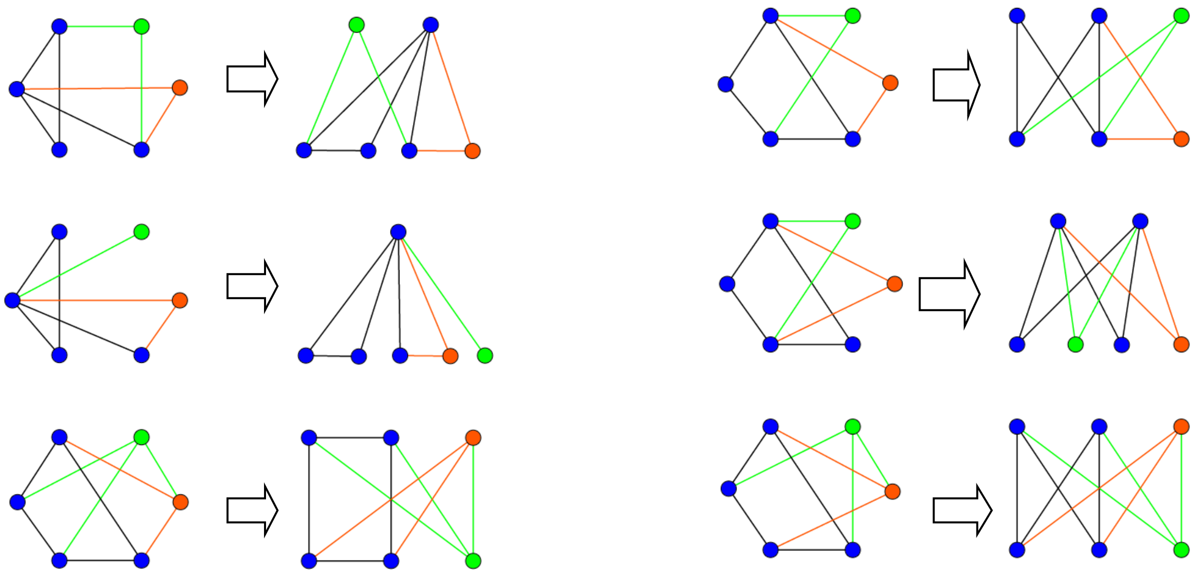
<圖一>



<圖二>

<圖一>為四點時所有的完勝圖形，經移動後會變成右邊的圖形。

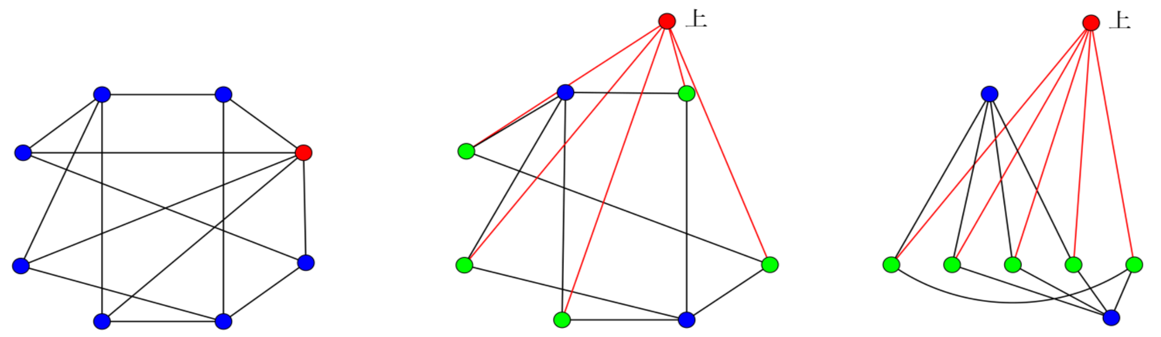
<圖二>為五點時所有的完勝圖形經，移動後會變成右邊的圖形。



<圖三>

<圖三>兩張圖的左邊皆為六點時所有的完勝圖形，經移動後都會變成右邊的圖形。

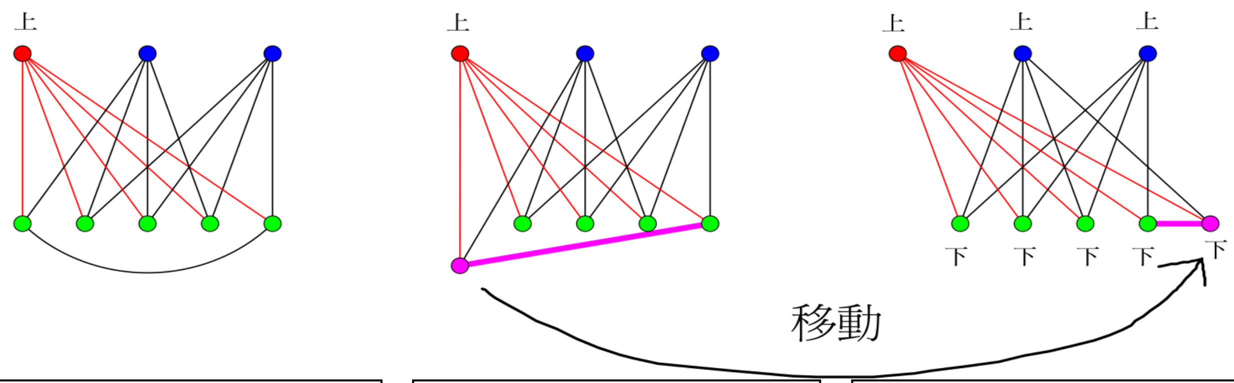
(二) **討論：**“完勝圖形”如何移動成“上下分點後進行連線的圖形 ”？



先選取一點當上點**(選擇連接數比較多的，比較容易分)**，所以這邊選擇紅點當作一開始的上點。

把紅點拉出來看，則連接的點(綠點)先暫時選為下點，所以目前有 5 個下點。

把綠點(暫時的下點)移動到下面，移動時會發現這些點都剛好接到剩餘的兩個藍點，則藍點就可以當上點。

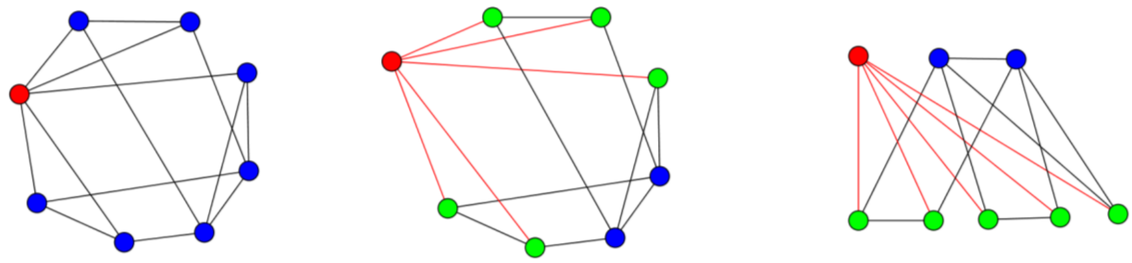


將上下點移動後，如果各個上點之間(或下點)沒有連線的很複雜，則這樣的分法就不用再更動了。

其中，我們發現有一條連線是下連下，我們改用紫色標記出來，並將它移動到連接點的旁邊。

透過分上下點，我們發現原本圖形會同構分上下兩群去連線的樣子。

Ex：再舉一個圖形來看



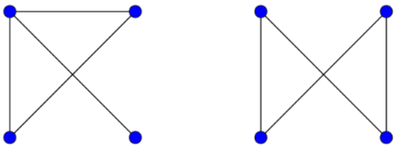
注意：分法不只一種，但每個圖形都可以移動成上下兩群，然後在上下連線的樣子。

四、 採“上下分點後進行連線的圖形 ”找出任意三點不共線時，*n* 個點的最多、最少的可連線數。

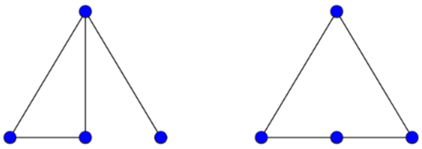
(一) **討論**：如果我們採用上下分成兩群再上下連線去討論所有“完勝圖形”的連線數，是否能討論出 n 點時，最多的連線數目？

1. **n=4** ⇨ **以四個點來說，所有“完勝圖形”都是 4 條連線數。**

上2下2

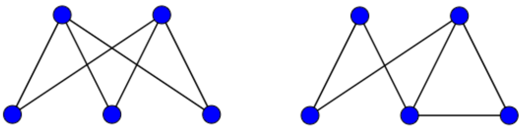


上1下3

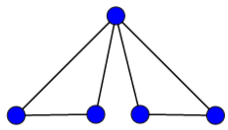


2. **n=5** ⇨ **以五個點來說，所有“完勝圖形”都是 6 條連線數。**

上2下3

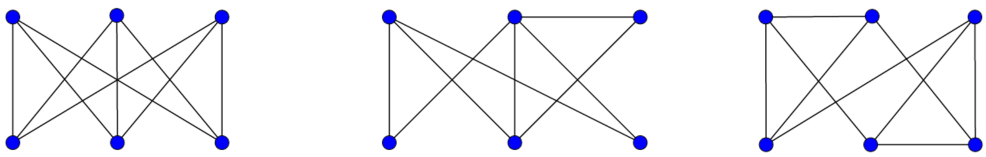


上1下4

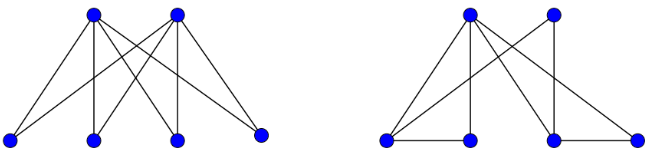


3. **n=6** ⇨ **六個點，我們發現總條數可能為 7、8、9 條，而分成數目最接近的上面三點、下面三點(上不連上；下不連下)，有最多的連線數 $3 \times 3 = 9$ 條。**

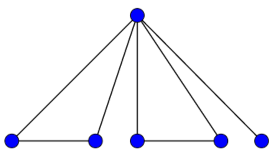
上3下3



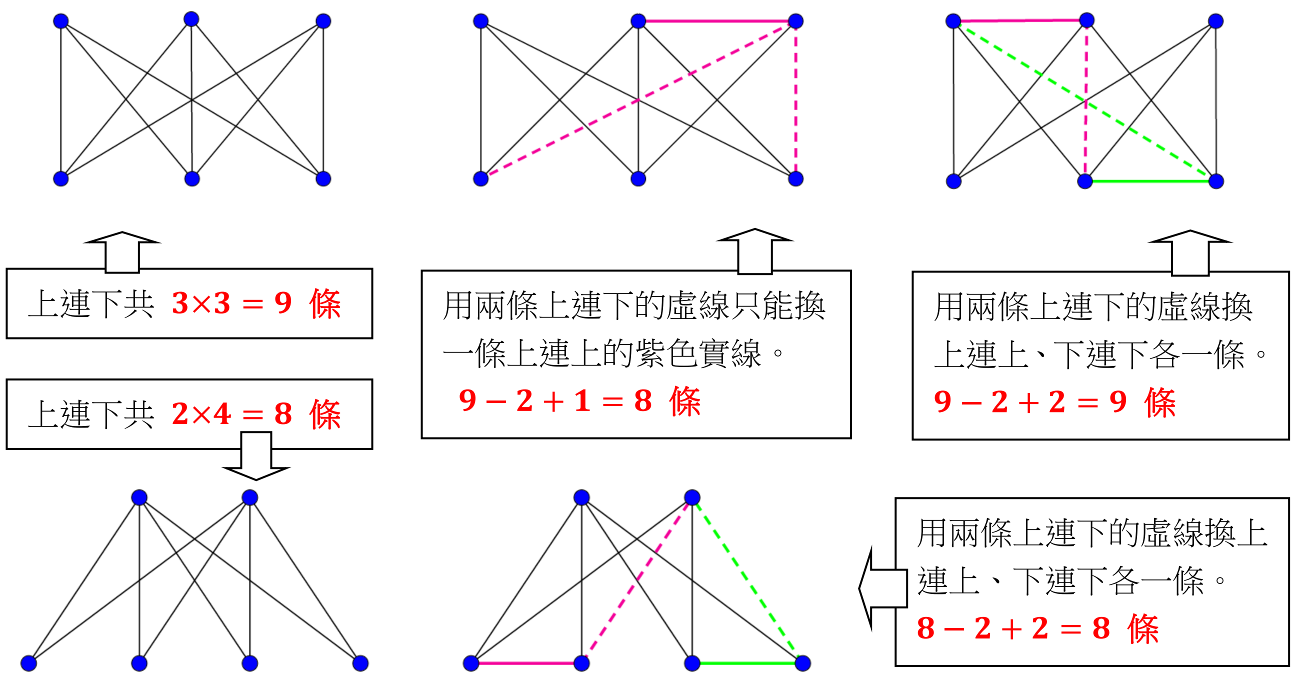
上2下4



上1下5



(二) **討論**：n=6 分上 3 下 3 有三種不同圖形，而分上 2 下 4 有兩種不同的圖形，而這些不同的“完勝圖形”為何有條數上的差異，則可以利用下面分解圖形說明：



(三) **討論**：從上面的完勝圖形我們大膽猜測：**當點數 n 為偶數點時，分成均分的兩群(例如：6 點分成 33；8 點分成 44)；而當點數 $n(n>4)$為奇數點時，分成接近均分的兩群(例如：5 點分成 23；7 點分成 34)這樣的上下連線會是最多的畫法。**

而這樣的畫法都不會畫出三角形，所以也不會形成終止圖形。下面我們給出證明：

定義:

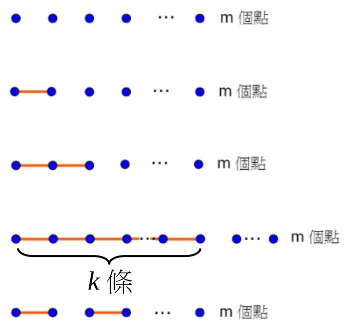
$m(0)$　代表 m 個點中，不先連線。

$m(1)$　代表 m 個點中，先連一條線。

$m(2)$　代表 m 個點中，先連出兩條**相連**的線。

$m(k)$　代表 m 個點中，先連出 k 條**相連**的線。

$m(1,1)$　代表 m 個點中，先連出兩條**分開**的線。

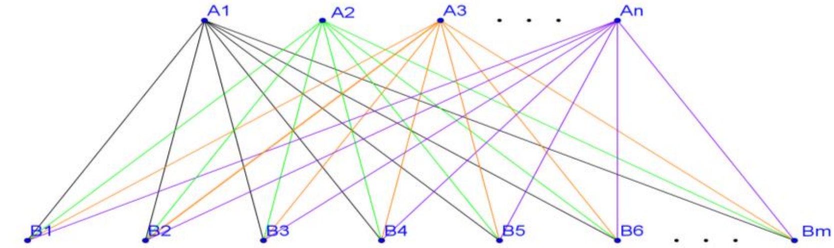


$n(1)\cdot m(0)$ 代表把點數分成**上 n、下 m** 後，上面 n 點先連一條線再上下連線，最後連成完勝圖形的所有總連線數。

命題一：**當總點數為$n+m$ 時($n+m\geq 4$)，若分成上 n、下 m 後，在上面的點不各自連線、下面的點也不各自連線的狀態下，只上下連線。此時畫出來的完勝圖形總連線數 $n\times m$ 為最多的連線數量。**

證明：

1. 討論 **$n(0)$、$m(0)$**的狀況

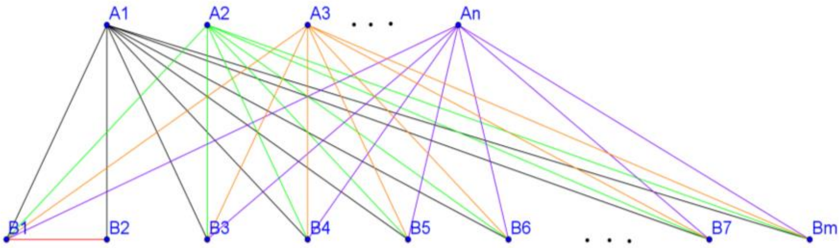


上下每點皆可互連

總連線數：

$n(0)\cdot m(0)=\boldsymbol{n\times m}$

2. 討論 **$n(0)$、$m(1)$**的狀況

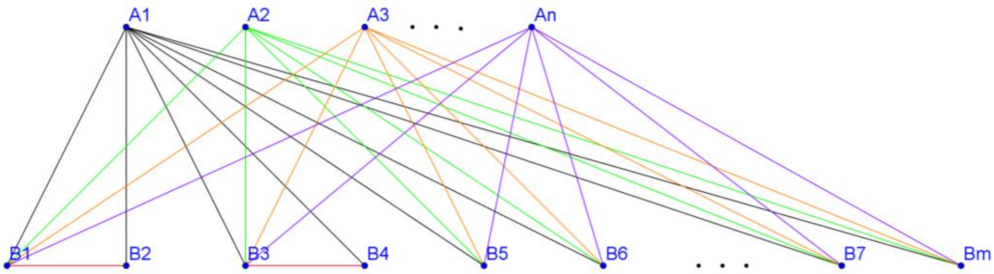


因為已經形成$\Delta A_1B_1B_2$，所以 A_2~A_n 都只能在 B_1 跟 B_2 間選一點來連，會減少 **$n-1$** 條。

$n(0)\cdot m(1)=\boldsymbol{n\times m-(n-1)+1}$

所以，下面有連一條線的圖形，總條數不會超過 $n\times m$ 條。

3. 討論 **$n(0)$、$m(1,1)$**的狀況



因為已經形成$\Delta A_1B_1B_2$和$\Delta A_1B_3B_4$，所以 A_2~A_n 都只能在 B_1 跟 B_2 間、B_3 跟 B_4 間選一點來連，會減少 **$2(n-1)$**條。$n(0)\cdot m(1,1)=\boldsymbol{n\times m-2(n-1)+2}$

所以，下面有連分開兩條線的圖形，總條數仍不會超過 $n\times m$ 條。

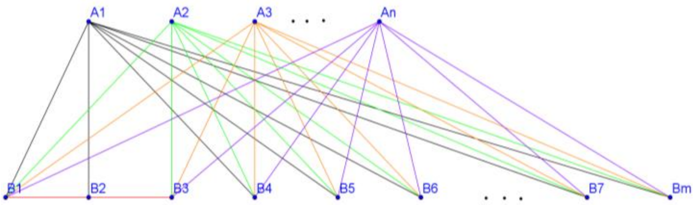
我們發現當把點數分成上 n、下 m 兩群(單獨一邊多連幾條不相連的線)，都會造成可連接條數的減少，而減少的條數會使得總條數都不會超過 $n\times m$，也就是當分成上 n、下 m 兩群(單獨一邊都沒有連線)的總條數 。

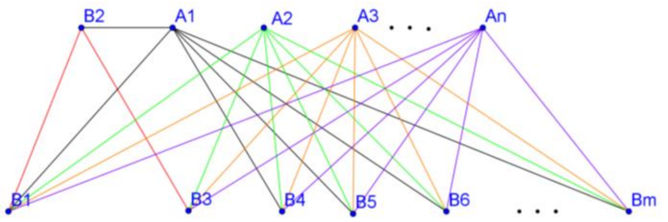
於是我們好奇如果改成同一方連續互相連線，總條數是否也會減少？

4. 討論 ***n*(0)、*m*(2)**的狀況

$n(0)$、$m(2)$ 的連線狀況會因為先連誰而有不同的連線數，分為下面三種。

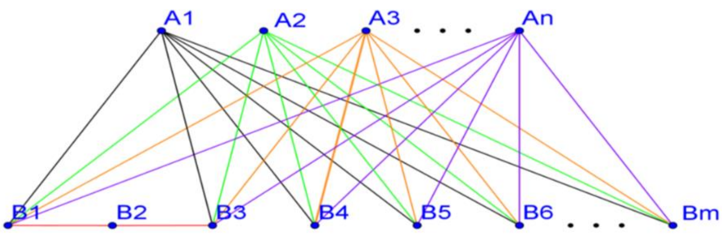
(1)【第一種】A_1 先連 B_2



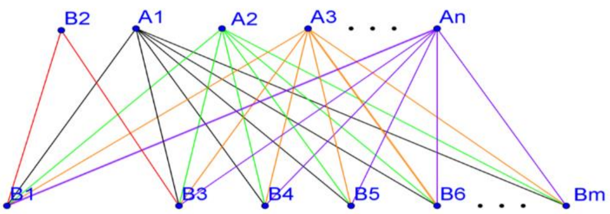


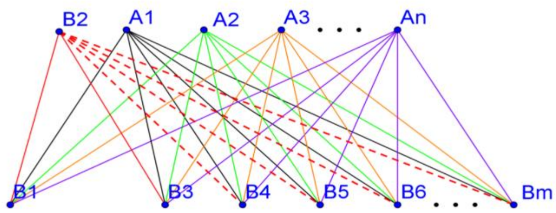
我們發現 B_2 可以往上移，成為 **$n+1(1)$、$m-1$ (0)**，且不可再畫任何一條線。(如右下圖)

(2)【第二種】A_1~A_n 不連 B_2，連 B_3



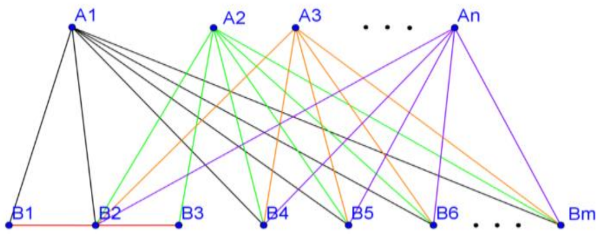
A_1~A_n 除了 B_2 不連，其餘的點都可以連接，所以每點皆可連 $m-1$ 條。

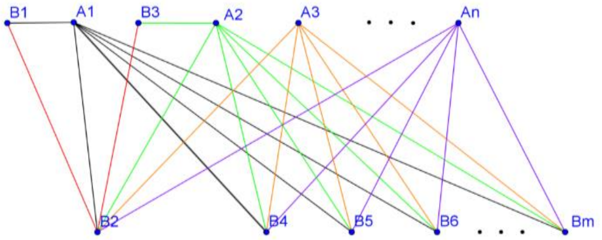




接著我們發現 B_2 可以往上移，讓原本的圖變成 **$n+1(0)$、$m-1(0)$**，而且移動後仍可繼續畫線，

(3)【第三種】A_1~A_n都連 B_2

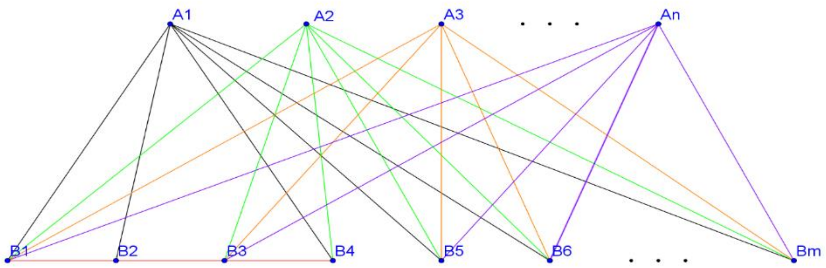




A_1 ~ A_n 都連 B_2、和 B_4 ~ B_m，所以每點皆可連 $m-2$ 個。只有 A_1、A_3 可以各自多連 B_1、B_3，之後，我們發現 B_1、B_3 可以往上移，成為 $n+2(1,1)\cdot m-2\ (0)$，且不可再畫任何一條線。

> 如上**【第一種】~【第三種】**所述，我們發現都可以轉變成第 1~3 點的樣貌。
>
> 而根據上面的結果可以確認此種的連線方式，不會超過的總條數$(n+2)(m-2)$，也就是經移動所分成上$(n+2)$、下$(m-2)$兩群(單獨一邊都沒有連線)的總條數。

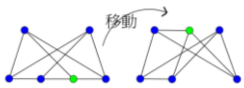
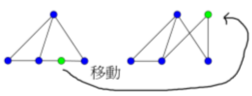
5. 討論 ***n*(0)、*m*(3)**的狀況



A_1除了 B_3 以外，其他線都可以連， A_2除了 B_2 以外，其他線都可以連，所以共 $2(m-1)$條線

A_3~A_n 除了 B_2、B_3 以外的線都可以連，所以每點皆可連 $m-2$ 條線

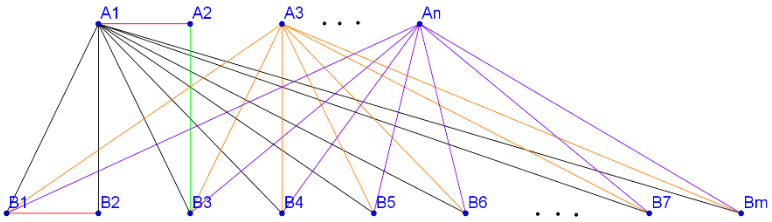
總連線數： $n(0)\cdot m(3)=m-1+m-1+(n-2)(m-2)+3=$ $\mathbf{n(m-2)+5}$

> 如上所述，**我們發現當 $n>\frac{5}{2}$ 時的連線方式會比分成 *n*、*m* 兩群再上下連線的少。**
>
> 當 $n=2$ 時，可以移動成$n=3$ 的狀況  此時條數不會超過$3\times3=9$
>
>
>
> 當 $n=1$ 時，可以移動成$n=2$ 的狀況  此時條數不會超過$2\times3=6$
>
>

6. 討論 **$n(1)$、$m(1)$**的狀況

在上連上、下連下都有的情況下，我們發現不只連出三角形也有可能連出四邊形，所以這邊我們分開討論：

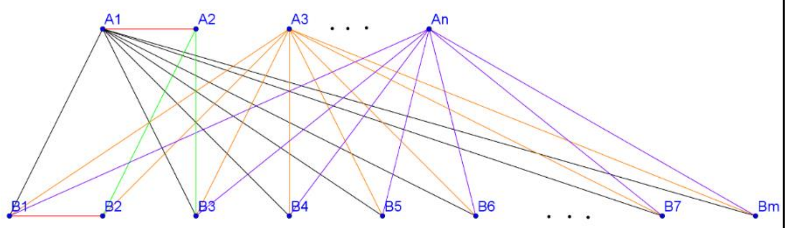
(1)【製造三角形】



A_1 和 B_1、B_2 先連成三角形，所以 A_1 可以連 B_1~B_m 共 m 條。A_2 只能在 B_3~B_m 選一個點連接共 1 條。A_3~A_n 除了 B_2 都可以連接，所以每點皆可連 $m-1$ 條。

總連線數：三角形 $n(1)\cdot m(1)=m+1+(n-2)(m-1)+2=$ **$(n-1)(m-1)+4$**

(2)【製造四邊形】



連成四邊形 $A_1A_2B_1B_2$，A_1 不能形成三角形，所以連 $m-1$ 條

A_2 為了製造出四邊形，所以只連 B_2 和 B_3，A_3 都可以連接，共 m 條，A_4~A_n 除了 B_2 以外的點都可以連接，所以每點皆可連 m-1 條

總連線數：四邊形 $n(1)\cdot m(1)=m-1+2+(n-3)(m-1)+m+2=$ **$(n-1)(m-1)+5$**

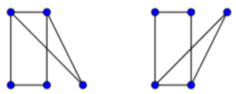
(1)【製造三角形】 $n(1)\cdot m(1)=(n-1)(m-1)$**$+4$**

當 $n+m>4$ 時，**(1)**所算出的總連線數比 $n\times m$ 的連線條數少。

當 $n+m=4$ 時，則 $n=2$ 、$m=2$ 總連線數剛好為 4 條，仍舊沒有超過 $n\times m$。

(2)【製造四邊形】 $n(1)\cdot m(1)=(n-1)(m-1)$**$+5$**

當 $n+m>5$ 時，**(2)** 所算出的總連線數比 $n\times m$ 的連線條數少。

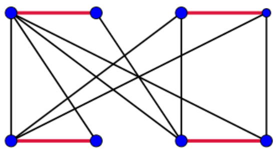
當 $n+m=5$ 時， 此時條數不會超過 $n\times m$。

當 $n+m=4$ 時，則 $n=2$ 、$m=2$ 總連線數剛好為 4 條，仍舊沒有超過 $n\times m$。

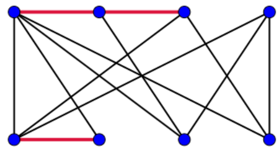
所以從上面的說明我們得知：

1. 如果在上連上、下連下都有的情況下，也會導致連線條數不超過只上下連線的總條數。
2. 連出四邊形仍會導致連接條數變少，但四邊形還是會比三角形擁有更多連線數。並且製造三角形的總連線數比製造四邊形的總連線數少一條線，我們會在 p20 為你們說明。

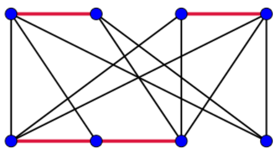
7. 討論 ***n*(*h*)、*m*(*k*)**的狀況



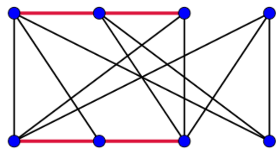
總條數：13



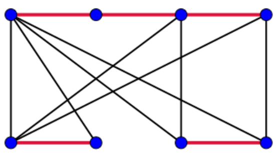
總條數：13



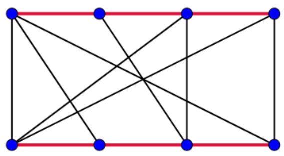
總條數：13



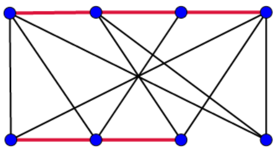
總條數：14



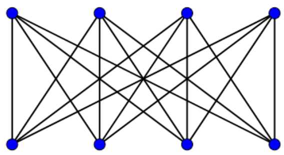
總條數：13



總條數：14

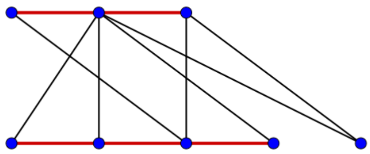


總條數：14

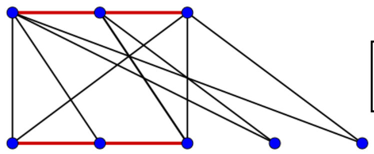


總條數：16

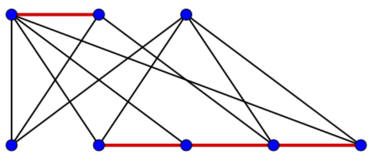
上圖為上 4 下 4 在不同情形下的完勝圖形，可以發現總條數最多為**4×4 ＝ 16** 條(右下圖)。



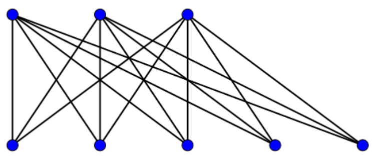
總條數：12



總條數：13



總條數：14



總條數：15

上圖為上 3 下 5 在不同情形下的完勝圖形，可以發現總條數最多為**3×5 ＝ 15** 條(右下圖)。

命題二：由命題一我們得知當總點數為 $\boldsymbol{n+m}$ 時($\boldsymbol{n+m \geq 4}$)，分成上 $\boldsymbol{n}$、下 $\boldsymbol{m}$ 後(上面的點不各自相連、下面的點也不各自相連)，只上下連線的完勝圖形的總連線數 $\boldsymbol{n\times m}$ 為最多的連線數量，而連線數 $\boldsymbol{n\times m}$ 最大值為

$$\begin{cases} \boldsymbol{k^2} & \boldsymbol{when} \quad \boldsymbol{n+m=2k} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathrm{Z}^+) \\ \boldsymbol{k(k-1)} & \boldsymbol{when} \quad \boldsymbol{n+m=2k-1} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathrm{Z}^+) \end{cases}$$ 。

證明：

(i) $when \quad n+m=2k \quad (n,m,k \in \mathrm{Z}^+)$

$let \quad m=2k-n$

$then \quad n\times m = n(2k-n) = -n^2+2kn = -(n^2-2kn) = -(n-k)^2+k^2$

when $\quad n=k \quad ,then \quad n\times m = -(k-k)^2+k^2 = k^2$

∴ when $\quad n=k \quad m=k \quad , \quad n\times m \ \ has \ \ maximum \quad \boldsymbol{k^2}$

(ii) $when \quad n+m=2k-1 \quad (n,m,k \in \mathrm{Z}^+)$

$let \quad m=2k-1-n$

$then \quad n\times m = n(2k-1-n) = -n^2+(2k-1)n = -[n^2-(2k-1)n]$

$$= -\left(n-\frac{2k-1}{2}\right)^2 + \frac{(2k-1)^2}{4}$$

when $\quad n=k \quad ,then \quad n\times m \quad = \quad -\left(k-\frac{2k-1}{2}\right)^2 + \frac{(2k-1)^2}{4}$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{(2k-1)^2}{4} = \frac{4k^2-4k}{4}$$

$$= k^2-k = \boldsymbol{k(k-1)}$$

∴ when $\quad n=k-1 \quad m=k \quad or \quad n=k \quad m=k-1$

$n\times m \quad has \quad maximum \quad \boldsymbol{k(k-1)}$

定理一：當總點數為$n+m$ 時$(n+m \geq 4)$，若分成上 n、下 m 後去畫出完勝圖形，則：

(a) 上面的點或下面的點有各自連線時的完勝圖形總連線數。 $\leq$ 上面的點沒有各自連線、下面的點也不各自連線，只上下連線。此時完勝圖形的總連線數為 $n \times m$ 條。

(b) 上面的點沒有各自連線、下面的點也不各自連線，只上下連線。此時完勝圖形的總連線數 $n \times m$。 $\leq$ 上面的點沒有各自連線、下面的點也不各自連線，只上下連線。此時完勝圖形的總連線數為 $n \times m$ 條。

(i) 當 $\boldsymbol{n+m=2k(k \in \mathbb{Z}^+)}$ 時，

$\boldsymbol{n=m}$ 的總連線數為 $\boldsymbol{k^2}$。

(ii) 當$\boldsymbol{n+m=2k-1(k \in \mathbb{Z}^+)}$時，

$\boldsymbol{n=k, m=k-1}$ 或 $\boldsymbol{n=k-1, m=k}$

的總連線數 $\boldsymbol{k(k-1)}$。

(c)

上面的點或下面的點有各自連線時的總連線數。 $\leq$ 上面的點沒有各自連線、下面的點也不各自連線，只上下連線。
此時的總連線數 $n \times m$ $\leq$ 上面的點沒有各自連線、下面的點也不各自連線，只上下連線。此時完勝圖形的總連線數為 $n \times m$ 條。

(i) 當$\boldsymbol{n+m=2k(k \in \mathbb{Z}^+)}$時，

$\boldsymbol{n=m}$ 的總連線數 $\boldsymbol{k^2}$。

(ii) 當$\boldsymbol{n+m=2k-1(k \in \mathbb{Z}^+)}$ 時，

$\boldsymbol{n=k, m=k-1}$ 或

$\boldsymbol{n=k-1, m=k}$ 的總連線數。

證明：

(a) 由命題一可得知，

(b) 由命題二可得知，

(c)由命題一和命題二根據遞移律可得。

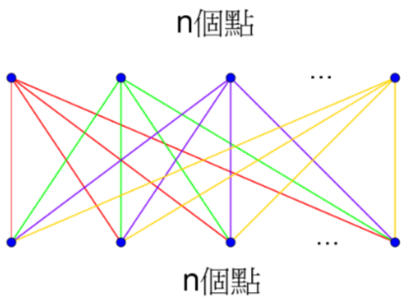
(四) 由上面的定理一，我們可以得到以下結果：

1. 總點數為 $2n$ $(n \in \mathrm{Z}^+)$

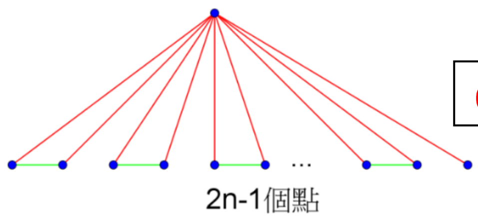
最多連線型態：上面 n 個點都可連接下面 n 點，所以總連線數為 $\boldsymbol{n \times n = n^2}$。**(圖一)**

最少連線型態：上面唯一的一點可連接下面$2n-1$個點，而下面$2n-1$個點又可以兩兩連，可連出$n-1$條線(需間隔開，否則會形成終止圖形)，所以總連線數為

$\boldsymbol{1 \times (2n-1) + (n-1) = 3n-2}$ **(圖二)**



(圖一)



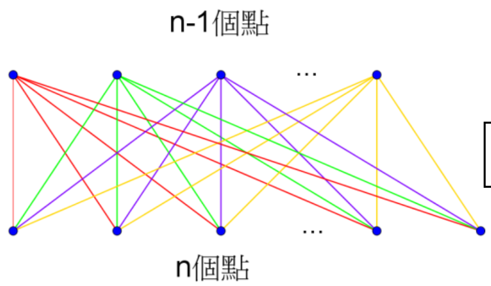
(圖二)

2. 總點數為 $2n-1$ $(n \in \mathrm{Z}^+)$

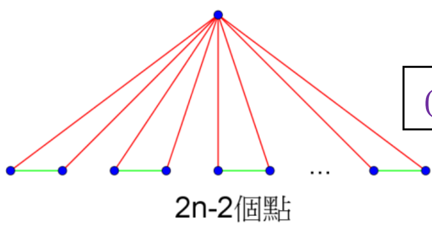
最多連線型態：上面每個點都可連接下面 n 點，所以總連線數為$\boldsymbol{n(n-1) = n^2 - n}$**(圖三)**

最少連線型態：唯一的一點可連接下面$2n-2$個點，而下面$2n-2$點又可以兩兩連，可連出 $n-1$ 線(需間隔開，否則會形成終止圖形)，所以總連線數為

$\boldsymbol{1 \times (2n-2) + (n-1) = 3n-3}$ **(圖四)**



(圖三)



(圖四)

結論： (1) 若總點數為 $2n$ $(n \in \mathrm{Z}^+)$，

則所有完勝圖形的最多總連線為 $\boldsymbol{n \times n = n^2}$ 條，

最少總連線為 $\boldsymbol{1 \times (2n-1) + (n-1) = 3n-2}$ 條。

(2) 若總點數為 $2n-1$ $(n \in \mathrm{Z}^+)$，

則所有完勝圖形的最多總連線為 $\boldsymbol{n(n-1) = n^2 - n}$ 條，

最少總連線為 $\boldsymbol{1 \times (2n-2) + (n-1) = 3n-3}$ 條。

五、研擬出雙三角終結者的對戰策略：

[策略一]：從上面我們發現隨著分上、下點數不同，或者有連上上和下下的情形，皆會改變最後完勝圖形的總連線條數。所以我們利用這點當成策略來影響完勝圖形的最後總條數，以改變雙三角終結者對戰遊戲中的最後贏家。

(一) 假設一開始有十個點，經過雙方幾次的連線後，我們大致可以決定上下點的個數，而這些數字會影響對戰的總連線數(例如：分成上 5 下 5，則只單純上下連的完勝圖形總連線數為 25 條)，所以先者後者此時所採取的方式就會有分別，所以一開始我們分為先、後者來進行討論。

先連者

↓

希望完勝圖形的總連線數為**奇數條**，此時先連者為勝方。所以先連者必定希望把點數分成上下皆為奇數。
例如： 5x5、3x7、1x9

後連者

↓

希望完勝圖形的總連線數為**偶數條**，此時後連者為必勝方。所以後連者必定希望把點數分成上下皆為偶數。
例如： 4x6 、 2x8

(二) 若分組的狀況對自身不利，則可採取**上連上**或**下連下**去改變完勝圖形的總連線數，下面討論總點數有 $n+m$ 點，拆成上 n 下 m 不同的樣子去討論完勝圖形的總條數：

$\boxed{\text{定義}}$：

$m(0)$ 代表 m 個點中，不先連線。

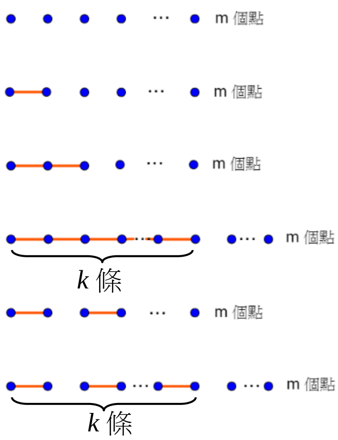
$m(1)$ 代表 m 個點中，先連一條線。

$m(2)$ 代表 m 個點中，先連出兩條**相連**的線。

$m(k)$ 代表 m 個點中，先連出 k 條**相連**的線。

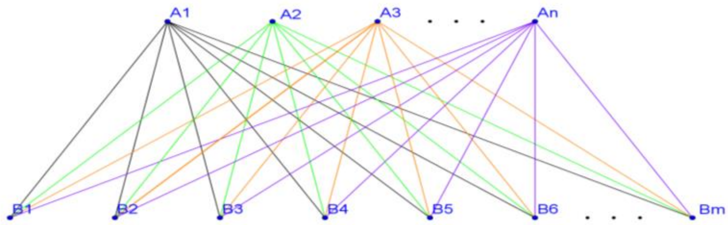
$m(1,1)$ 代表 m 個點中，先連出兩條**分開**的線。

$m(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k\text{ 條}})$ 代表 m 個點中，先連出兩條**分開**的線。



$n(1)\cdot m(0)$ 代表把點數分成**上 n、下 m** 後， 上面 n 點先連一條線再上下連線，最後連成完勝圖形的所有總連線數。

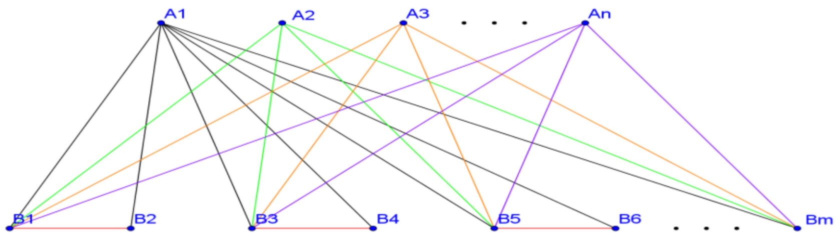
1. 討論 ***n*(0)、*m*(0)**的狀況



$A_1 \sim A_n$ 皆可以連 $B_1 \sim B_m$，所以每點皆可連 m 條。

總連線數： $n(0) \cdot m(0) = m \times n = \mathbf{n \times m}$

2. 討論 $\boldsymbol{n(0)、m(\underbrace{1,1,\cdots 1}_{b\text{ 個}})}$的狀況



假設下面的預先連線共有 b 條(皆分開)， A_1 每一條線都可以連所以共 m 條

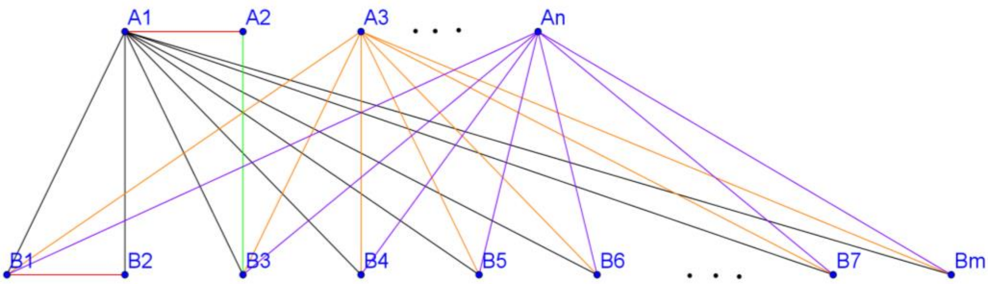
而之後的 $A_2 \sim An$ 因為有下面的紅線連著，而紅線已跟黑線形成三角形，所以只能在紅線的兩端選擇一點連線，共 $m-b$ 條。最後再加上紅線 b 條

總連線數： $n(0) \cdot m(\underbrace{1,1,\cdots 1}_{b\text{ 個}}) = m+(m-b)(n-1)+b = \mathbf{n(m-b)+2b}$

3. 討論 ***n*(1)、*m*(1)**的狀況

$n(1)$、$m(1)$ 的狀況共有兩種，分為一開始就製造三角形或是四邊形，因為我們發現製造三角形的比製造四邊形的能連的少一條線，所以我們將它分為兩個部分來討論。

(1)【製造三角形】



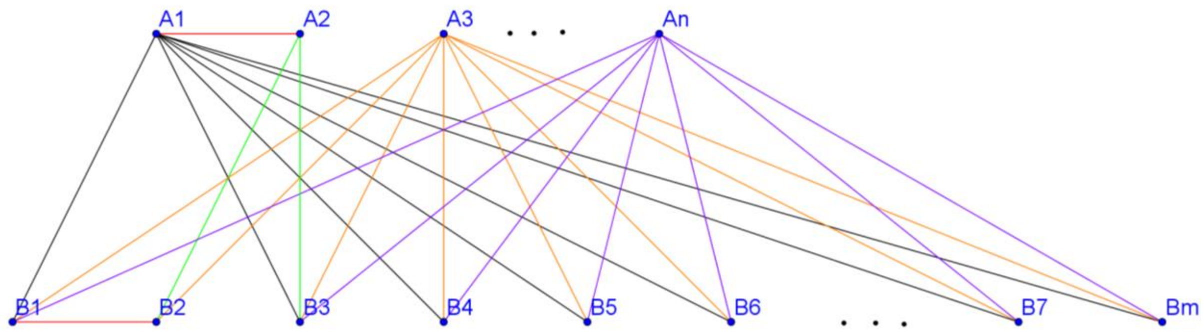
(1) **A_1** 和 B_1、B_2 之間先連成三角形，所以 A_1 可以連 B_1~B_m **共 m 條**

(2)**A_2** 只能在 B_3~B_m 間選一個點連接**共 1 條**

(3)**A_3~A_n** 除了 B_2 都可以連接，所以每點皆可連 **$m-1$ 條**

總連線數：三角形 $n(1)\cdot m(1)=m+1+(n-2)(m-1)+2=$ **$(n-1)(m-1)+4$**

(2)【製造四邊形】



A_1、A_2 和 B_1、B_2 之間連成四邊形

(4) **A_1** 為了避免製造出三角形，所以不連 B_2，只連其餘的，所以共 **$m-1$ 條**

(5) **A_2** 為了製造出四邊形，所以只連 B_2。但後來連完發現 B_3 也可以連，所以共 **2 條**

(6) **A_3** 都可以連接，共 **m** 條，

(7) **A_4~A_n** 除了 B_2 以外的點都可以連接，所以每點皆可連 **m-1 條**

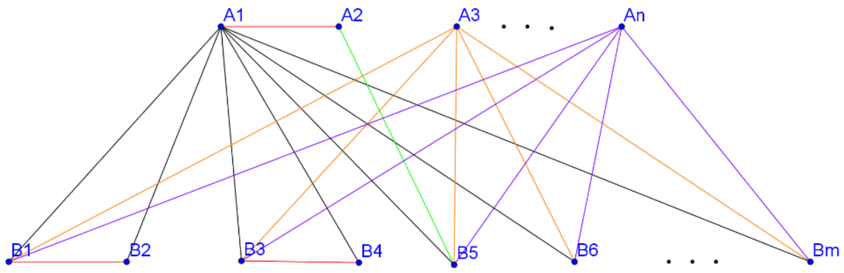
總連線數：四邊形 $n(1)\cdot m(1)=m-1+2+(n-3)(m-1)+m+2=$ **$(n-1)(m-1)+5$**

從(1)(2)(4)(5)我們可以發現到 A_1 和 A_2 合起來的條數一樣，所以只是在同樣的連線狀態下，分擔的條數不一樣，接著我們發現在(3)(6)(7)只有差在 A_3，(3)因為已經有△$A_1B_1B_2$ 了，所以為了避免共邊 A_3 只能在 B_1、B_2 中選一個連線。(6)因為沒有三角形共邊問題，所以 A_3 可以連 B_1、B_2 兩條線。**所以，每次上連上和下連下的連線，只要製造出一個四邊形都會比製造三角形多一條的連線。**

4. 討論 ***n*(1)、*m*(1,1)**的狀況

$n(1)$、$m(1,1)$的狀況共有三種(因為下面有兩條紅線)，分為一開始就製造兩個三角形或是兩個四邊形或一個三角形和一個四邊形，所以我們將它分為三個部分來討論。

(1)【兩個三角形】

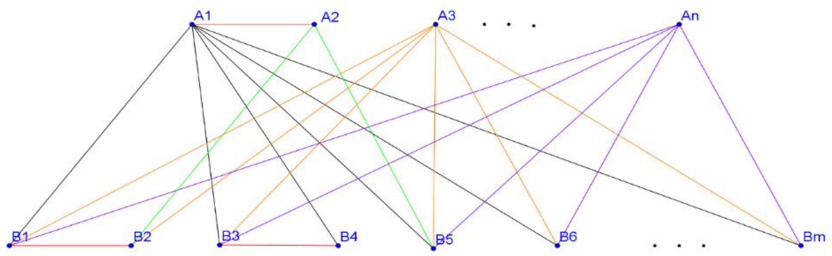


總連線數： $n(1)\cdot m(1,1)$

$= m+1+(n-2)(m-2)+3$

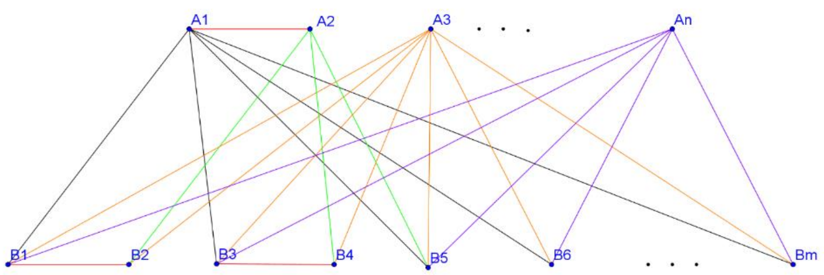
$= \mathbf{(n-1)(m-2)+6}$

(2)【一個三角形和一個四邊形】



總連線數： $n(1)\cdot m(1,1) = m-1+2+m-1+(n-3)(m-2)+3 = \mathbf{(n-1)(m-2)+6+1}$

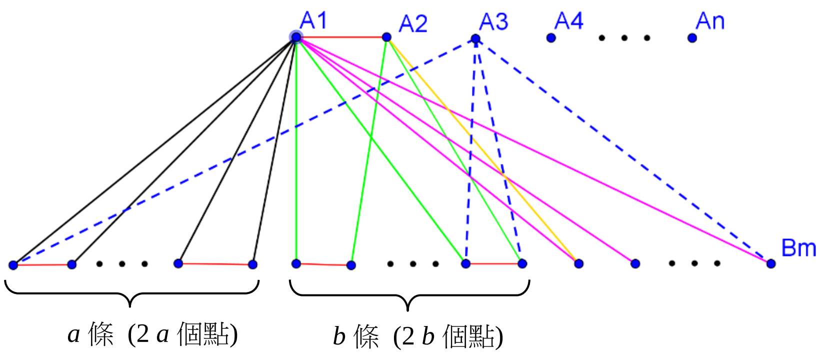
(3)【兩個四邊形】



總連線數： $n(1)\cdot m(1,1) = m-2+3+m+(n-3)(m-2)+3 = \mathbf{(n-1)(m-2)+6+}$

5. 討論 **$n(1)$、$m(\underbrace{1,1,\cdots1}_{a+b\text{ 個}})$**的狀況

【a 個三角形和 b 個四邊形】



A_1 除了做四邊形的底邊只能一點連之外，其他都可以連接，所以共 $m-b$ 條

A_2 可連四邊形的另一點，後來可再連一個空點，所以共 $b+1$ 條

A_3 前面三角形只能選一點連，其餘都可以連，所以共 $m-a$ 條

A_4~An 前面三角形以及四邊形只能選一點連，其餘都可以連，所以每點皆可連 $m-a-b$ 條

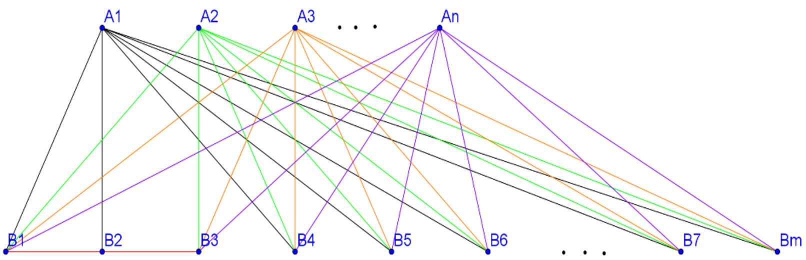
總連線數： $n(1)\cdot m(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{a+b\text{ 個}})=m-b+b+1+m-a+(n-3)(m-a-b)+a+b+1$

$$=\underbrace{(n-1)}_{n\text{點}-1\text{條}}\underbrace{(m-a-b)}_{m\text{ 點}-(a+b)\text{條}}+\underbrace{2(a+b+1)}_{\text{除了，上 1 下}(a+b)\text{條每一組可以再多連一條}}+\underbrace{b}_{b\text{ 個四邊形}}$$

6. 討論 **$n(0)$、$m(2)$**的狀況

$n(0)$、$m(2)$ 的連線狀況會因為先連誰而有不同的連線數，分為下面三種。

(1)【第一種】A_1 先連 B_2

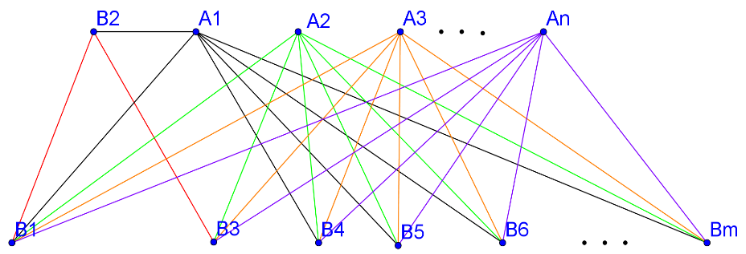


總連線數：

$n(0)\cdot m(2)=\mathbf{n(m-1)+2}$

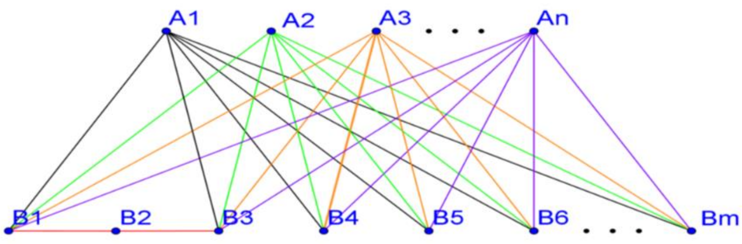
$\neq \mathbf{n(m-2)+4+(n-1)}$

(和第五點推出的想法不符)



之後，我們發現 B_2 可以往上移，成為 $n(1)$、$m(0)$，且不可再畫任何一條線，所以 **$n(0)$、$m(2)$ 和 $n+1(1)$、$m-1(0)$** 的狀況是一樣的。

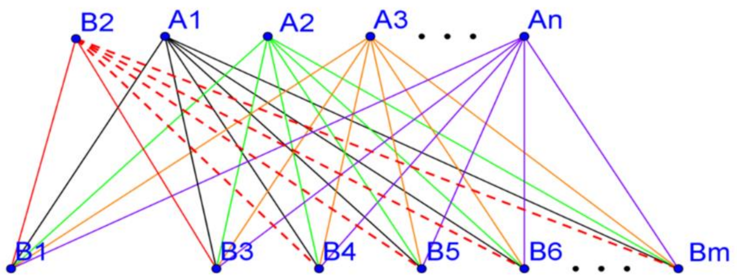
(2)【第二種】A_1~A_n 不連 B_2，連 B_3



總連線數：

$n(0)\cdot m(2)=$ **$n(m-1)+2$**

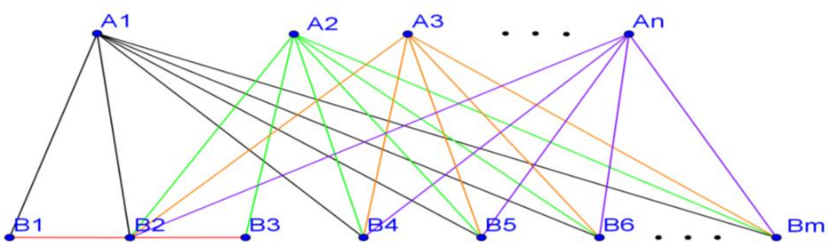
$\neq n(m-2)+4+n$(和第五點推出的想法不符)



之後，我們發現 B_2 可以往上移，會成為 $n(0)$、$m(0)$而且移動後仍可繼續畫線，如下圖。

所以 **$n(0)$、$m(2)$ 和 $n+1(0)$、$m-1(0)$** 的狀況是一樣的。

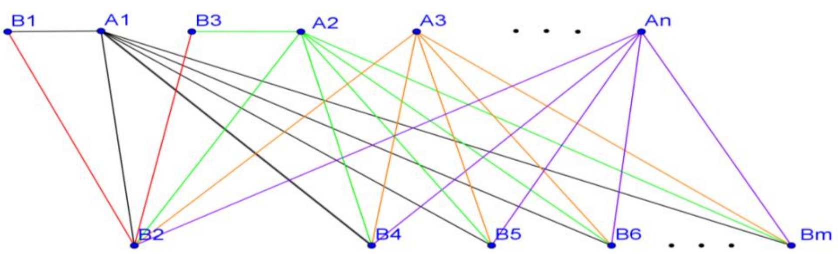
(3)【第三種】A_1~A_n 都連 B_2



總連線數：

$n(0)\cdot m(2)=$ **$n(m-2)+4$**

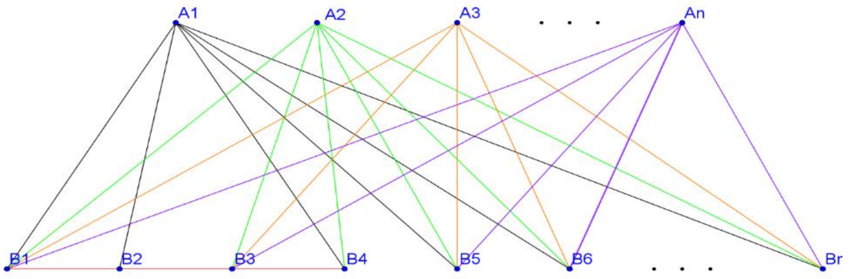
(和第五點推出的想法相符)



之後，我們發現 B_1、B_3 可以往上移，成為 $n(1,1)\cdot m(0)$，且不可再畫任何一條線，所以 **$n(0)$、$m(2)$ 和 $n+2(1,1)$、$m-2(0)$** 是一樣的。

最後，我們發現導致 $n(0)$、$m(2)$ 的討論情況會有這麼多種而且和**第五點推出的想法不太相符**，是因為下連下的紅線連接在一起，所以當選擇下面的點去做連接時，選中間或兩旁的點都會影響最後的係數，而每一種畫法最終帶來的結果，都不甚相同。所以 $\boldsymbol{n(0)}$**、**$\boldsymbol{m(2)}$ **在討論上有難度**，但我們發現**移動點**後皆可轉變成第 1~5 點的樣子**此時就和我們推想的結果相符**，所以在實際操作上，我們只需要改變上下點的點數，就可以變得比較簡單。

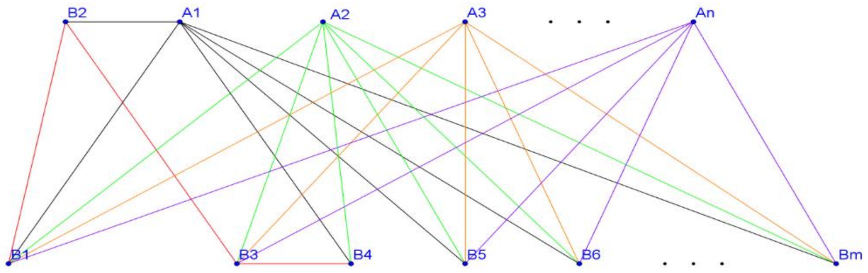
7. 討論 $\boldsymbol{n(0)}$**、**$\boldsymbol{m(3)}$的狀況



總連線數：

$n(0) \cdot m(3) = \boldsymbol{n(m-2)+5}$

$\neq \boldsymbol{n(m-3)+6+n}$



接著，我們將 B_2 向上移，發現圖變成了 $n(1)$、$m(1)$ 的狀況，且沒有可以再連的線，所以 $\boldsymbol{n(1) \cdot m(1)}$ **和** $\boldsymbol{n(0) \cdot m(3)}$ 的情況是一樣。

在 $n(0)$、$m(3)$ 的討論情形雖然不符第五點的想法但因為結果只有一種，所以我們仍可以使用這個結果。或者把點去做移動，也可轉變成 $n(1)$、$m(1)$ 的樣子。

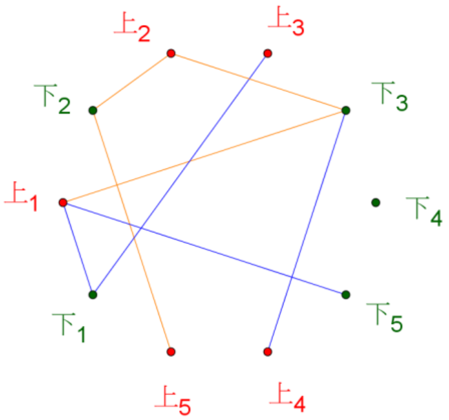
所以在實際操作上，我們會把 $m(2)$、$m(3)$、$m(4)\cdots$ 這些有連續連接在一起的情形，可以經移動改變上下點的點數讓它變成是 $m(1)$、$m(1,1)$、$m(1,1,\cdots1)$，如果有困難那我們會選擇保留 $m(3)$ 而不移動成 $m(2)$這樣較難討論的樣子。

(三) 從以上 1~7 點我們可以利用比較有規律的 1~5 和 7 的連線圖形及公式應用在對戰中，下面介紹如何把公式應用在對戰中：

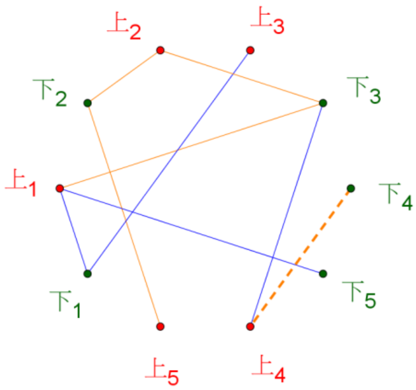
模擬對戰狀況(橘色代表<先者>，藍色代表<後者>，紫色為雙方)

設一開始有十個點

隨意連，但盡量避免一個點連太多條，然後連到所有的點都連過線後，開始劃分出上下點的形式。如下圖↓

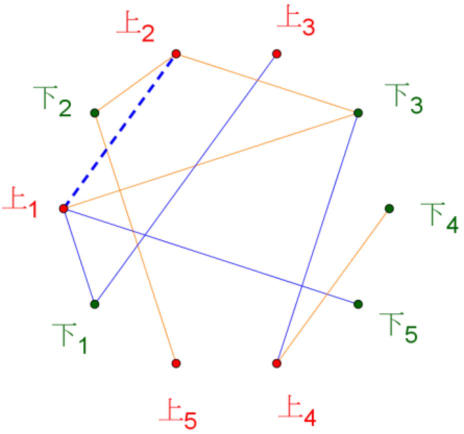


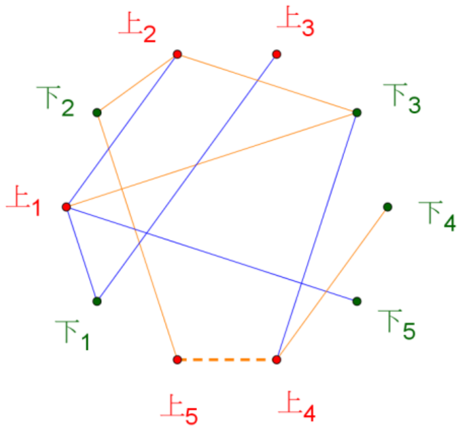
(先者) 目前沒有出現上連上下連下的情況，且是 5 • 5 的分法，為奇數型態。所以持續地上下連即可。如下圖↓



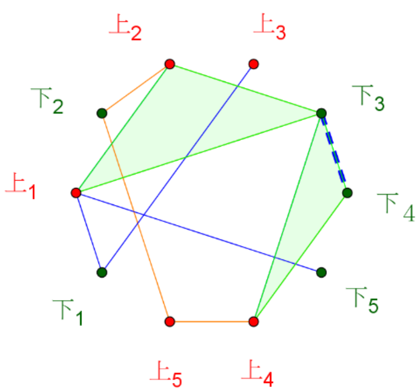
(後者) 奇數條對我不利，於是改成上連上，此時改變連線的條數，總條數變成(5－1)×5＋2=**22**。如下圖↓

(先者) 偶數條對我不利，此時再連一次上連上，但不能連接到之前的上連上的兩點。此時總條數變成(5－2)×5＋2×2=**19**。如下圖↓





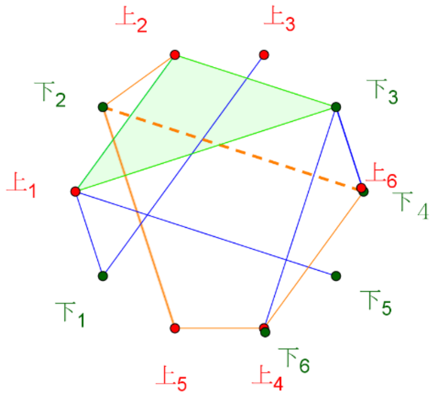
(後者)　因為變成奇數條，所以我們得再連一條下連下的線，才能將條數變回偶數。此時總條數變成(5－2)×(5－1)＋2×3＋(製造 0 個正方形)=**18**。
如右圖→



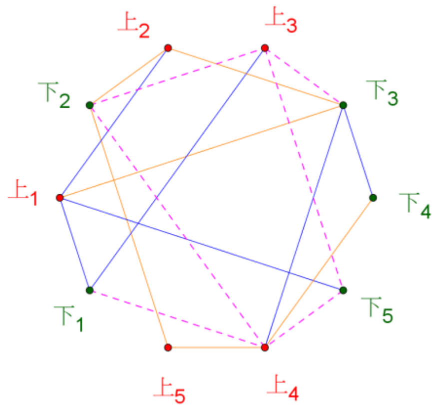
(先者) 這時我們試著模擬不同的連線狀況，並改變上下點的數量，最後發現總連線數皆為偶數，我方無法逆轉。如右圖→

$(5-1)\times(5-1)+2\times2+0=$ **20**。都是偶數

所以，不需要再改變。只須照著原本的形態上下連即可。



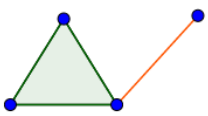
因為先者模擬的所有狀況都不能改變結果，所以我們繼續維持上一步後者走完的樣貌在往下連線，則根據公式最多可再連六條，一共 18 條，即結束此遊戲。這時勝負已定，**後者獲勝**。如右圖→



六、 在對戰中，如果圖形連出很多三角形，我們也可以用『三角形觀察法』來簡易判斷圖形還有多少連線可能，以便作為決策的依據。

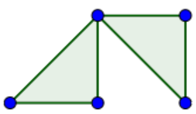
[策略二]：『三角形觀察法』

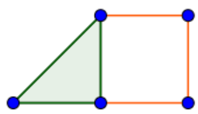
n=4



當點是沒連在三角形上，則這些點只能跟三角形連一條。

n=5

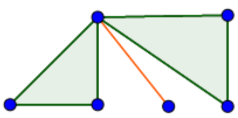


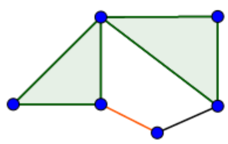


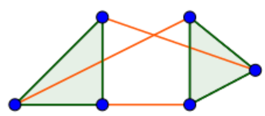
當兩個三角形相連時，這些點都無法再繼續連線。

當點是沒連在三角形上，則這些點每點都只能再跟三角形的其中一點連線，而這些點都可以互相連線。

n=6



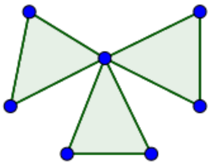




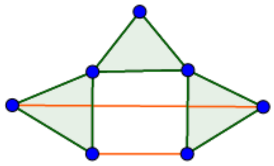
兩三角形相連時，還剩一點是沒連在三角形上，此點可以選擇連三角形的共點(此時只能連一條)，或者跟兩三角形各連一條(取不同點，則可連兩條)。

兩個分開的三角形，可以兩兩再連線，可再連三條。

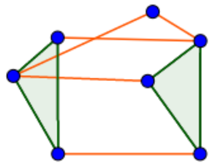
n=7



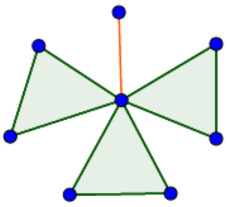
當三個三角形都相連同一點時，這些點都無法再繼續連線。



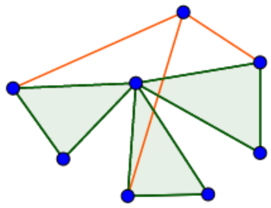
三個接續的三角形，只有頭尾兩個不相鄰三角形可以再連兩條(不選有連中間三角形的那兩點)，可再連兩條。



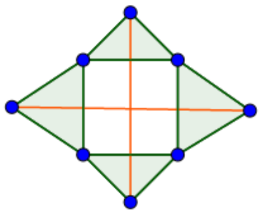
兩個分開的三角形，可以兩兩再連線，可再連三條。點沒連在三角形上，則這些點每點都只能再跟三角形的其中一點連線。



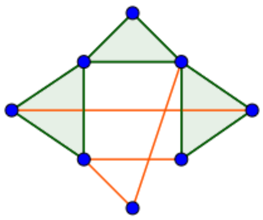
當點是沒連在三角形上，則此點連三角形的共點(此時只能連一條)。



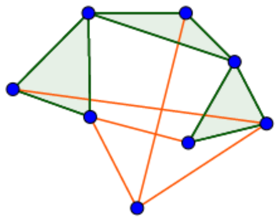
當點是沒連在三角形上，則此點每點都只能再跟三角形的其中一點連線。(不能連共點)



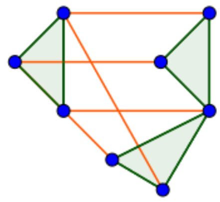
四個接續頭尾的三角形，只有不相鄰的三角形能再連一條(只能選不連接兩旁三角形的點)。



三個接續的三角形，只有頭尾兩個不相鄰的三角形可以再連兩條(不選有連中間三角形的那兩點)，可再連兩條。
當點是沒連在三角形上，則此點每點都只能再跟三角形連線(上圖因為有連到一個共點，所以本來應該連三條，卻變成只能連兩條)。



三個接續的三角形，只有頭尾兩個三角形可以再連兩條(不選有連中間三角形的那兩點)，可再連兩條。
當點是沒連在三角形上，則此點每點都只能再跟三角形連線(上圖因為沒有連到一個共點，所以本來連了三條)。



兩個相連的三角形無法再連。而另一個分開的三角形應該可以和兩個相連的三角形各連三條，但因為有一點是兩個三角形共點，所以會少一條(兩條為同一條)。

伍、 研究結果

一、 (一) 若總點數為 $2n$ $(n \in \mathrm{Z}^{+})$，

則所有完勝圖形的最多總連線為 $\boldsymbol{n \times n = n^2}$ 條，

最少總連線為 $\boldsymbol{1 \times (2n-1) + (n-1) = 3n-2}$ 條。

(二) 若總點數為 $2n-1$ $(n \in \mathrm{Z}^{+})$，

則所有完勝圖形的最多總連線為 $\boldsymbol{n(n-1) = n^2 - n}$ 條，

最少總連線為 $\boldsymbol{1 \times (2n-2) + (n-1) = 3n-3}$ 條。

二、 在進行雙三角終結者的對戰遊戲中，若總點數為$(n+m)$時，可依上下點數的不同以及連上上或下下的不同，都會導致完勝圖形總連線數的差別，因此我們可以整理出一些較有規律的公式，如下表：

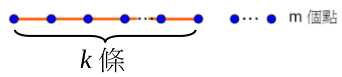
$\boxed{\text{定義}}$：

$m(0)$ 代表 m 個點中，不先連線。

$m(1)$ 代表 m 個點中，先連一條線。

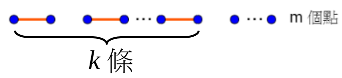
$m(2)$ 代表 m 個點中，先連出兩條**相連**的線。

$m(k)$ 代表 m 個點中，先連出 k 條**相連**的線。



$m(1,1)$ 代表 m 個點中，先連出兩條**分開**的線。

$m(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k\text{ 條}})$ 代表 m 個點中，先連出兩條**分開**的線。



$n(1) \cdot m(0)$ 代表把點數分成上 $\boldsymbol{n}$、下 $\boldsymbol{m}$ 後， 上面 n 點先連一條線再上下連線，最後連成完勝圖形的所有總連線數。

公式：(1) $n(0) \cdot m(0) = \boldsymbol{n \times m}$

(2) $n(0) \cdot m(\underbrace{1,1,\cdots 1}_{b\text{ 個}}) = \boldsymbol{n(m-b)+2b}$

(3) $n(1) \cdot m(\underbrace{1,1,\cdots 1}_{a+b\text{ 個}}) = \boldsymbol{(n-1)(m-a-b)+2(a+b+1)+b}$ (a 個三角形；b 個四邊形)

(4) $n(0) \cdot m(3) = \boldsymbol{n(m-2)+5}$

三、 $m(2)$、$m(3)$、$m(4)$⋯這種同邊連續相連 

，在討論上有難度，但我們發現經移動改變上下點的點數讓它變成是 $m(1)$、$m(1,1)$、$m(1,1,\cdots 1)$⋯的同構圖形，這樣就可以進行上面**結論二**的討論了。

四、若圖形連出很多三角形，我們也可以用『三角形觀察法』來判斷圖形還有多少連線可能，以便作為決策的依據。

陸、 討論

一、雙三角終結者的對戰策略，需要經過玩家互相連線觀察一段時間後，才能開始分成上下來討論，沒辦法在一開始討論。所以未來我們希望能夠再尋找出某些方式，讓我們更提前觀察出圖形的未來走勢。

二、我們也可以改變雙三角終結者的遊戲的規則，例如：每個人一次可連 1~3 條的連線，這樣會讓遊戲更公平。

三、未來可以開發成一套電腦軟體，變成 app 的對戰遊戲。

柒、 結論

一開始，我們以為雙三角終結者遊戲只是很單純的連線問題，就像對角線一樣全部畫完就可以。但是因為終止圖形的問題，我們必須討論可以畫幾條？如何畫？本來希望能用窮舉法把不同條數的所有可能連線全部畫出，但因為每一種連線數都有幾千幾萬種不同的畫法，導致我們沒辦法一一拿出來討論。如果改成討論每個點的連接數去看更難，因為必須考慮到不同的連接數要符合真的可以兩兩連線的樣子。所以討論起來也有很大的]難度。剛好在一次移動點的時候，我們發現圖形可以移動成上、下點去做相連線的樣子，才開啟了接下來的研究。我們透過不斷地畫圖、移動上下點、在連線與不能連線之中，我們更了解這些圖形的組合關係，透過有規律的連線關係我們終於找到一些公式，並透過公式研擬作戰策略，這段過程很辛苦但也很美好。突然記起老師上課所說，三角形是圖形裡面相對比較好探討的，此時真的深有同感。很感謝有這個機會，讓我們更認識點和點之間不同的連線情形，以及不讓三角形共邊所帶來的影響…種種問題，希望未來還能找出更多的方法，讓雙三角終結者的作戰策略能夠更好更快更完備。

捌、參考資料

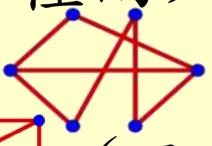
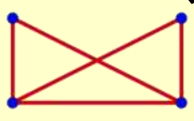
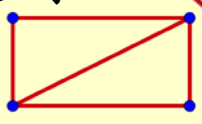
【期刊文章】
游森棚（2016）‧六邊形對抗賽‧*科學研習*，No.55-09，P64。

【評語】030406

此作品的目的是分析如下的雙人競賽遊戲：給平面上若干個點，兩人輪流連線，在限定不連出兩個相鄰三角形（兩三角形共邊）的條件下，採用何種策略才容易取勝（當有一方連接任兩點均會造出相鄰三角形時，此方落敗）的問題。這是科學研習月刊中介紹的一個問題。作者們針對最終圖形的最大與最小可能邊數作了討論。對於如何進行遊戲才能掌握優勢，也給出了一些想法。原始的問題應該是要問對於這樣的遊戲是否存在必勝策略，但在文中關於這部分沒有太多具體的結果。研究精神值得鼓勵，可惜的是仍然無法有一個有效快速的演算法來操作或判斷必勝的過程，是不足之處，如果能把重心放在這個部分會更好。

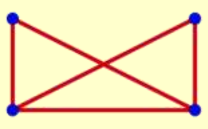
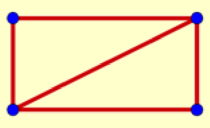
作品海報

摘要

雙三角終結者是一種兩人對戰遊戲，兩人輪流在數個點之間連線 ，直到其中一方畫出終止圖形  、（兩個三角形共邊），此人即成為輸家。在進行這個遊戲時，依照不同的型態進行排列組合及歸納，發展出不同的公式，經由公式我們可以預先知道最終條數。若結果不利我方，可以利用一些應對的方法來改變最後結果，進而取得勝利。也就是說從公式的角度出發，我們不用再一條一條的試畫便能直接找到最終連線數。不只便利更能迅速算出結果，甚至有些只要用看的就能得到答案。當點數過大時，用公式算比自已畫來得準確。

除此之外我們還發現了另一種簡便的『三角形觀察法』，此種方式就不需要分成上下來討論，在畫的時候也比較容易畫線，而且可以避免終止圖形的產生。

壹、研究動機

一開始原本是想找"抬"做為科展題目，但能發展的內容不多。又剛好在科學研習月刊中[游森棚（2016）•六邊形對抗賽•科學研習，No.55-09，P64。]發現這個小遊戲，而六邊形對抗賽是給定6個點(任三點不共線)，雙方輪流把兩點連一條線，直到有人畫出終止圖形  、 (兩個三角形共邊)，則此人即成為輸家。六邊形對抗賽有點類似"抬"的遊戲，再加上國中課程剛好學到多邊形的對角線個數，於是我們便開始著手研究繪製圖形並把點數擴充去尋找一般式。但點數越大，圖形會變得很複雜導致很難去尋找可以連線的地方，甚至沒發現連出了終止圖形。所以我們希望能透過不同的方式去找出規律並歸納出容易進行畫圖的方法，期待能發展出一套策略讓自己成為獲勝的一方。以下我們展開一連串的研究。

貳、研究目的

一、 探討**『終止圖形』**的特性。

二、 畫出四、五、六和七點的**『完勝圖形』**，並把點移動成上下兩群的圖形來觀察討論。

三、 **"完勝圖形"**如何移動成**"上下分點後進行連線的圖形"**的同構圖形。

四、 採"上下分點後進行連線的圖形"找出任意三點不共線時，***n* 個點的最多、最少的可連線數**。

五、 從"上下分點後進行連線的圖形"找出的公式中，研擬出雙三角終結者的**對戰策略**，並改變雙三角終結者的結局。

六、 在對戰中，如果圖形連出很多三角形，我們也可以用**『三角形觀察法』**來簡易判斷圖形還有多少連線可能，以便作為決策的依據。

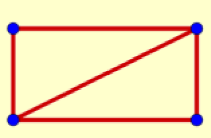
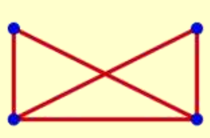
參、研究設備及器材

電腦(G.G.B.)、紙、筆。

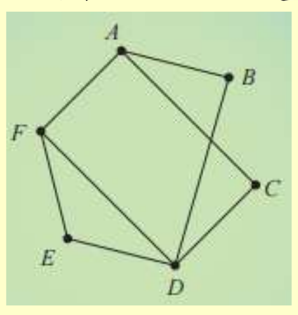
肆、研究過程

題目：

兩人輪流在六個頂點間畫一邊或對角線(任意兩點去連線)，直到畫出終止圖形(如下圖)，而畫出終止圖形的人就算輸了，比賽結束。

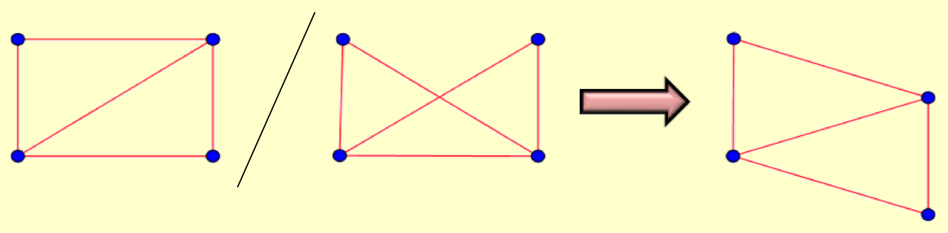
 

『終止圖形』

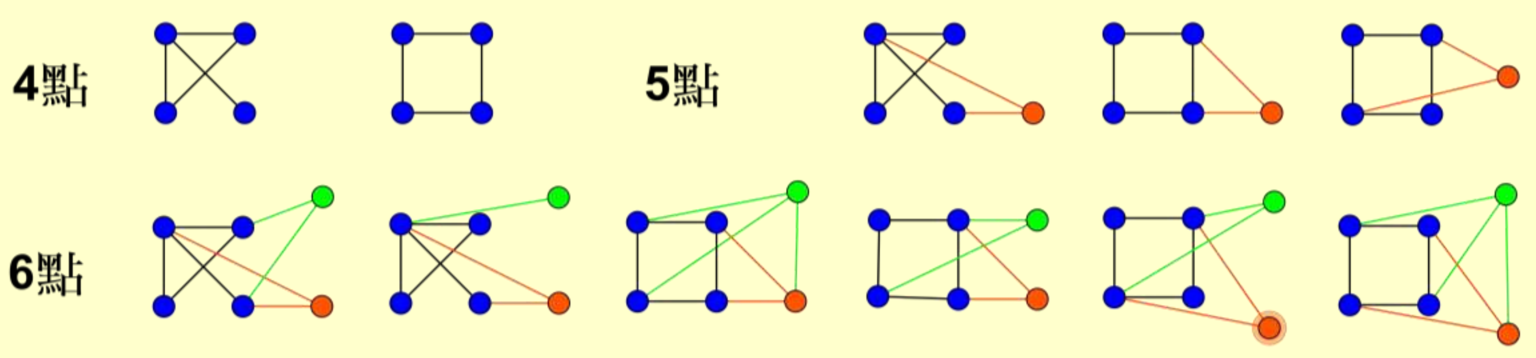


『完勝圖形 』

一、探討終止圖形的特性：

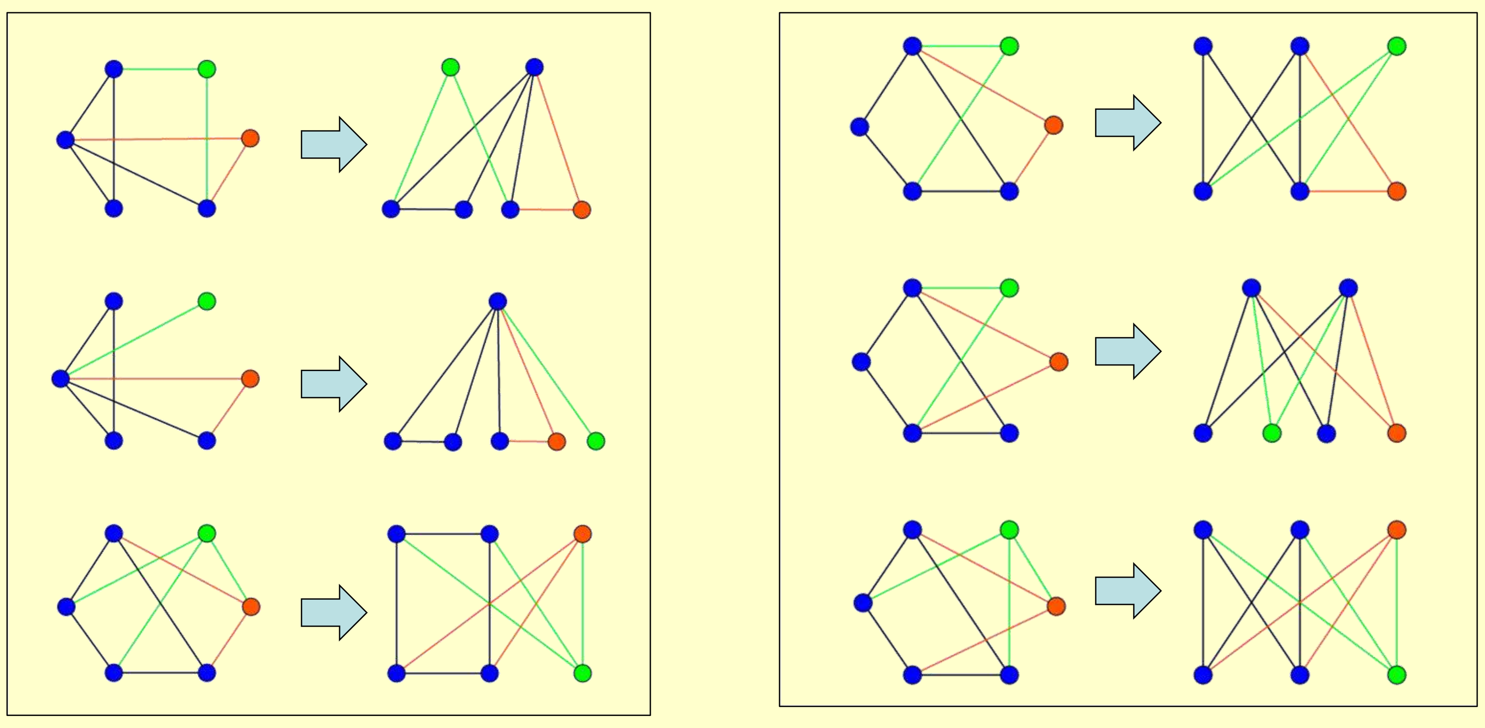


二、畫出所有的『完勝圖形 』(從4~6點)：

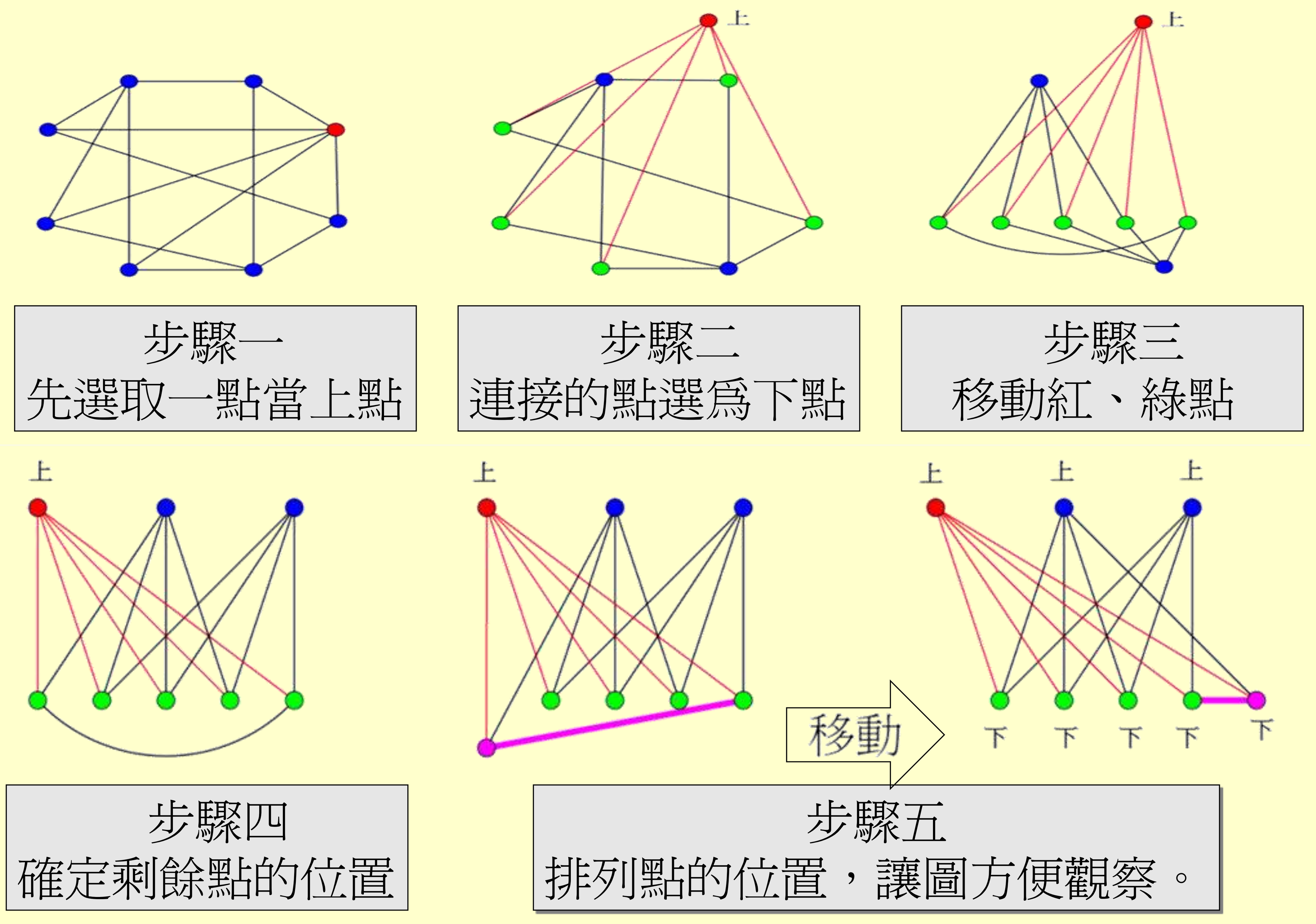


三、 "完勝圖形"的同構圖形：

(一) 完勝圖形經移動後同構**"上下分成點後進行連線的圖形"**。

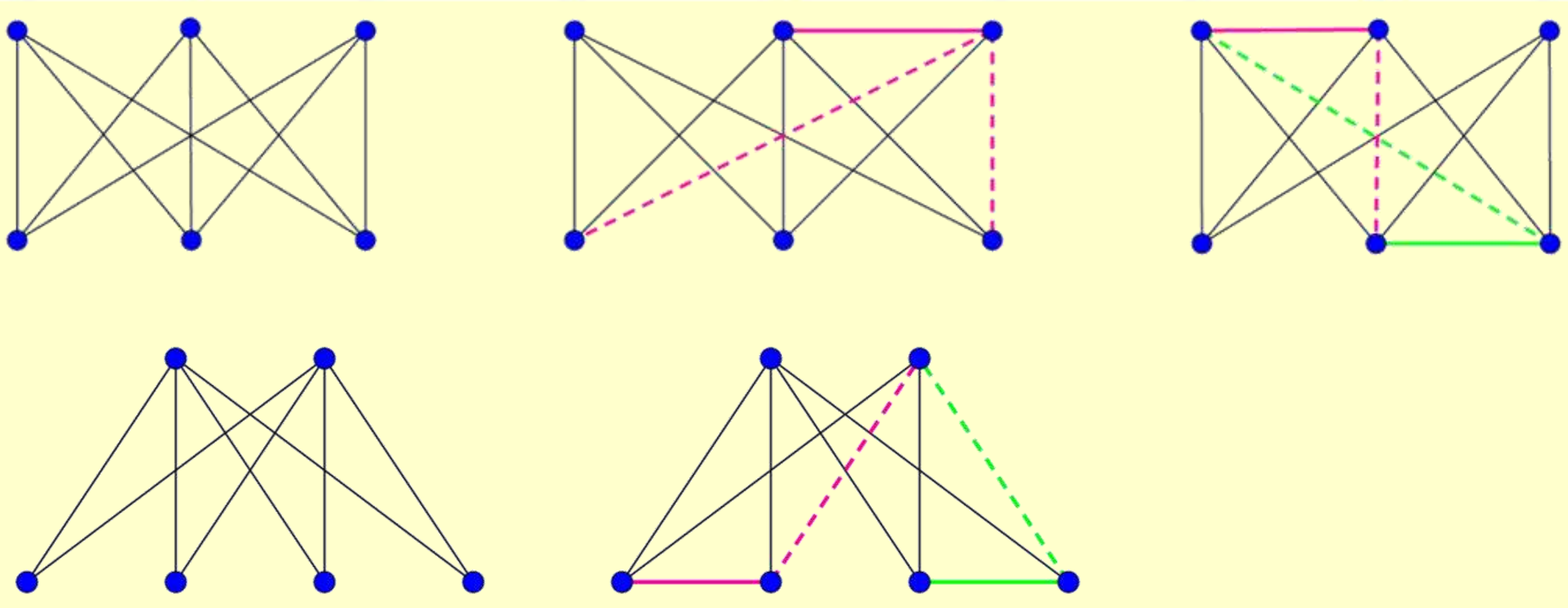


(二) "完勝圖形"如何移動成"上下分點後進行連線的圖形"？



當選的點不同，移動後的圖也會不同，分法並非唯一。

(三)不同的"完勝圖形"為何有條數上的差異：



命題一：

當總點數為 $n+m$ 時($n+m\geq 4$)，若分成上 n、下 m 後，上面有連線或下面有連線的完勝圖形總條數不會超過在上面的點不各自連線、下面的點也不各自連線的狀態下完勝圖形的總條數，此時**只上下連線畫出的完勝圖形總連線數 $n\times m$ 條為最多的連線數量。**

命題二：

由命題一得知當總點數為 $n+m$ 時($n+m\geq 4$)，分成上n、下m 後，只上下連線的完勝圖形的總連線數 $n\times m$ 為最多的連線數量，其中：

(i) 若 $n+m=2k$ $\left(k\in Z^{+}\right)$時，當$n=m=k$ 有最大值 k^2

(ii) 若 $n+m=2k-1$ $\left(k\in Z^{+}\right)$時，當$n=k-1$, $m=k$

或 $n=k, m=k-1$ 有最大值 $k(k-1)$

定理一：當總點數為 $n+m$ 時($n+m\geq 4$)，若分成**上n 、下m** 後去畫出完勝圖形，則：

上或下面的點**有**各自連線時，完勝圖形總連線數。	$\leq$	上面的點且下面的點**不**各自連線，只上下連線，此時完勝圖形的總連線數為 $n\times m$ 條。	$\leq$	在上面的點且下面的點**不**各自連線且**n、m的點數為一樣或接近均分**時，只上下連線。此時完勝圖形的總連線數為： (i) 當 $n+m=2k(k\in Z^+)$ $n=m$ 的總連線數為 k^2 (ii) 當 $n+m=2k-1(k\in Z^+)$ $n=k-1, m=k$ **或** $n=k, m=k-1$ 的總連線數 $k(k-1)$。

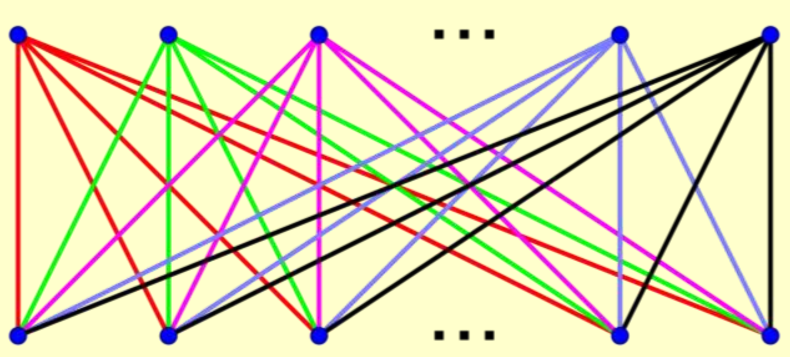
$\underbrace{\text{前兩項}}$ (a)由**命題一**可得知

$\underbrace{\text{後兩項}}$ (b)由**命題二**可得知

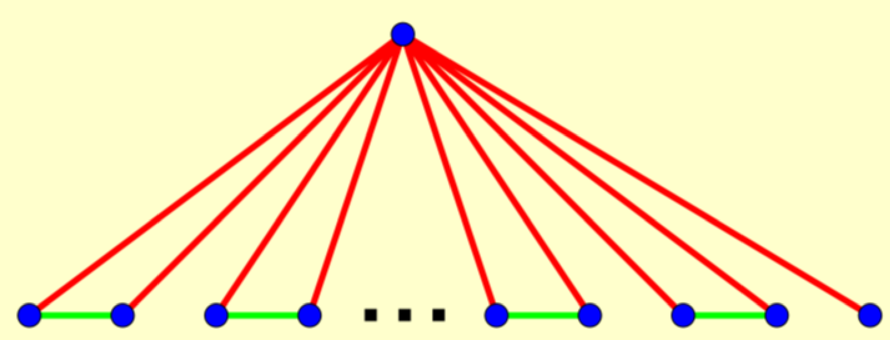
證明 ：由**命題一**和**命題二**根據遞移律可得。

（四）**由定理一，我們可以得到以下結果：**

1. 總點數為 $n+m=2k\ (k\in Z^+)$

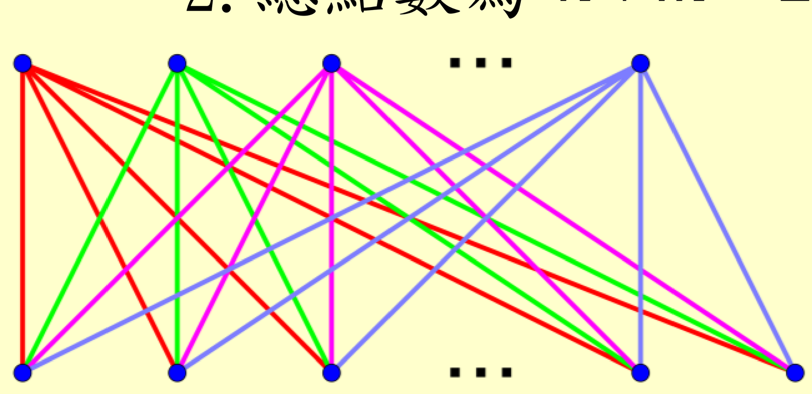


最多連線型態$n=m=k$

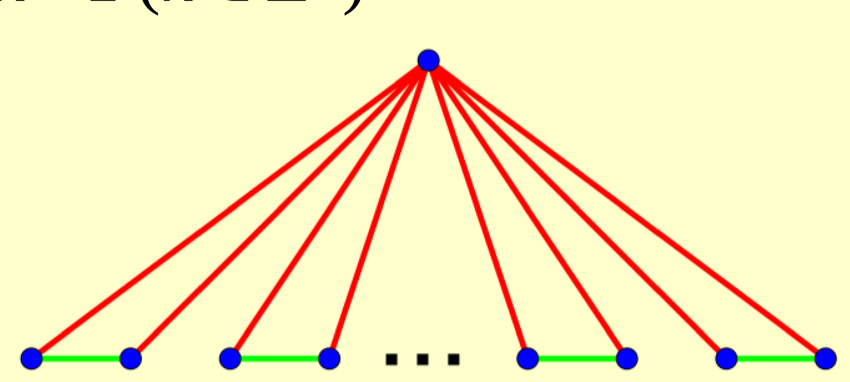


最少連線型態$n=1, m=2k-1$

2. 總點數為 $n+m=2k-1\ (k\in Z^+)$



最多連線型態 $n=k-1, m=k$



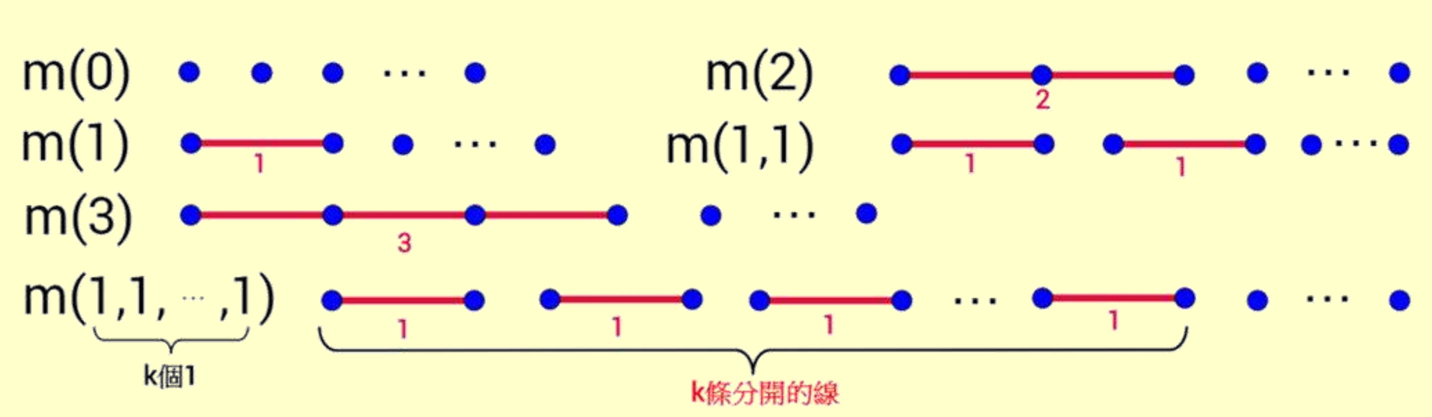
最少連線型態$n=1, m=2k-2$

五、研擬雙三角終結者的對戰策略：

【策略一】：上、下點數不同或有連上上和下下，皆會改變完勝圖形的總連線條數。

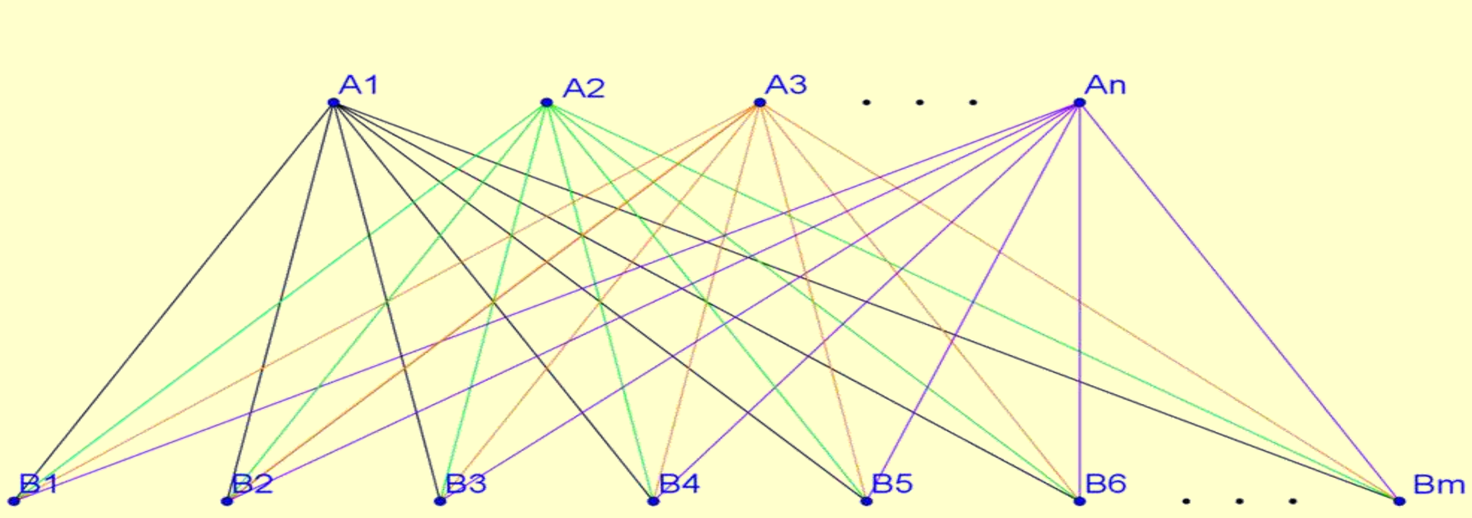
(一) 當上面點數為n點下面點數為m點時：

定義：



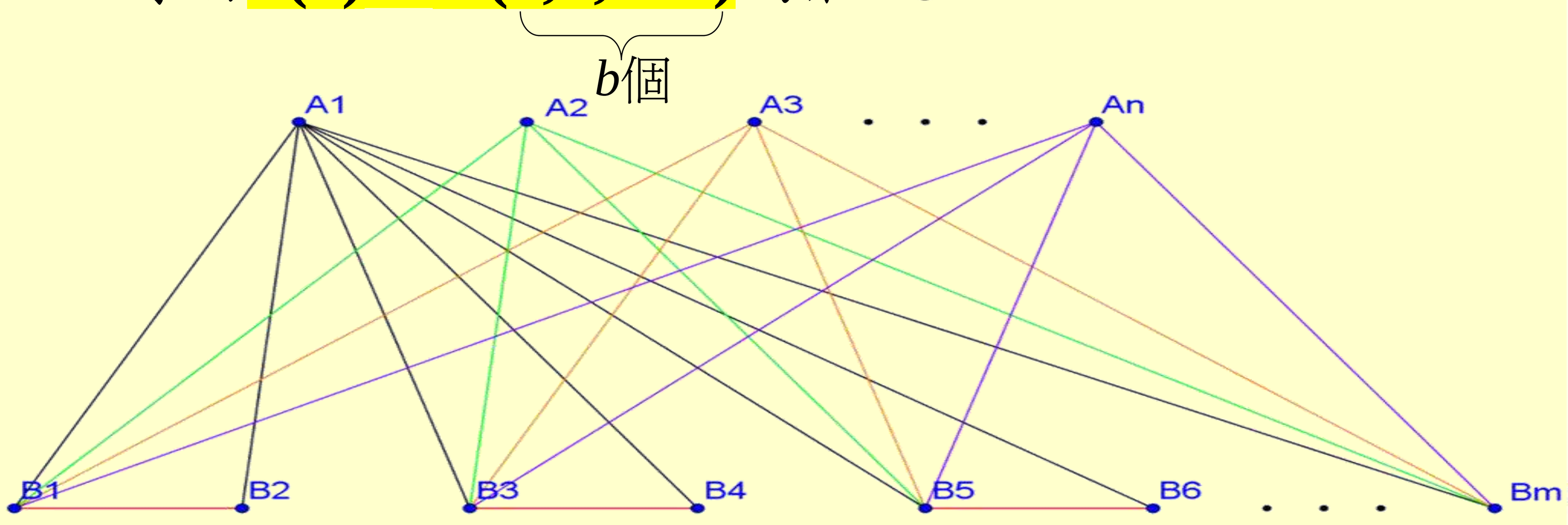
$n(1)\cdot m(0)$ 代表此種狀態下的完勝圖形總連線數

1. 討論**$n(0)$、$m(0)$**的狀況



總連線數： $n(0)\cdot m(0) = m\times n = $ **$n\times m$**

2. 討論**$n(0)$、$m\underbrace{(1,1,\ldots1)}_{b個}$**的狀況

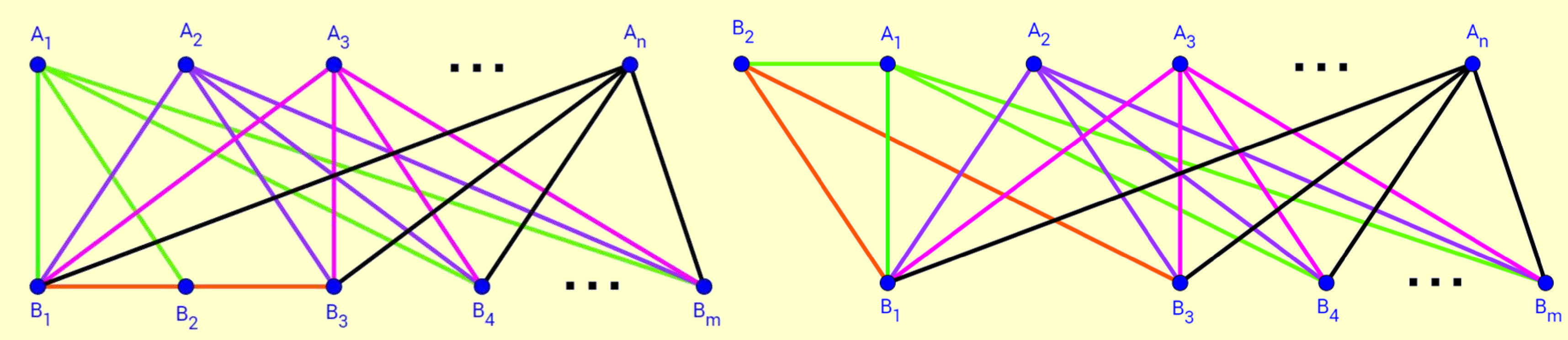


總連線數：$n(0)\cdot m\underbrace{(1,1,\ldots1)}_{b個}=$ **$n(m-b)+2b$**

3. 討論**$n(0)$、$m(2)$**的狀況：有四種不同的連線狀況

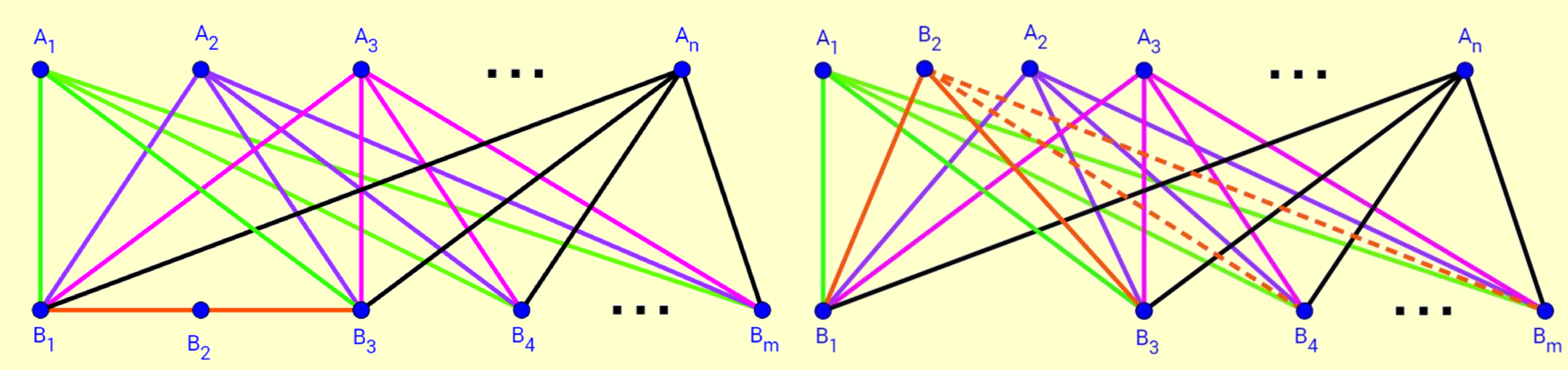
(1) 第一種：$n(0)\cdot m(2)=$ **$n(m-1)+2$ （和公式不符）**

但移動後可變成 **$n+1(1)$ ・ $m-1(0)$**就可以代入公式

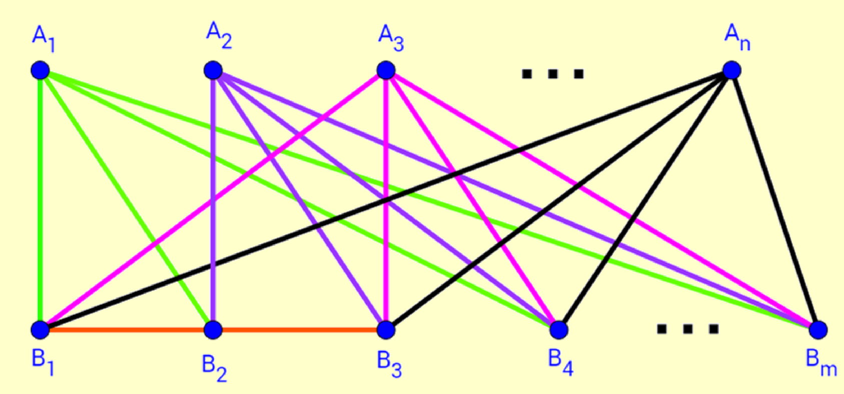


(2) 第二種：$n(0)\cdot m(2)=$ **$n(m-1)+2$ （和公式不符）**

但移動後可變成 **$n+1(0)$ ・ $m-1(0)$**就可以代入公式

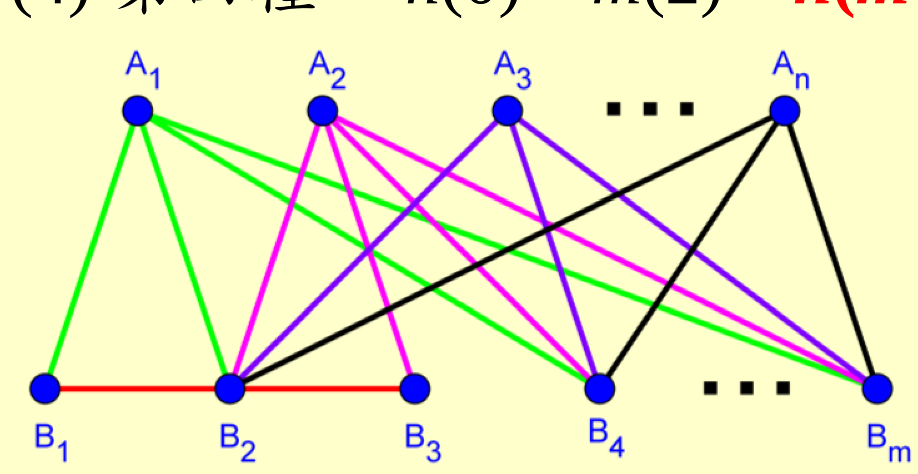


(3) 第三種： $n(0)\cdot m(2)=$ **$n(m-1)+2$ （可用公式）**



總連線數：$n(0)\cdot m(2)$ $=$**$n(m-2)+4+(n-2)$**

(4) 第四種： $n(0)\cdot m(2)=$ **$n(m-2)+4$ （可用公式）**



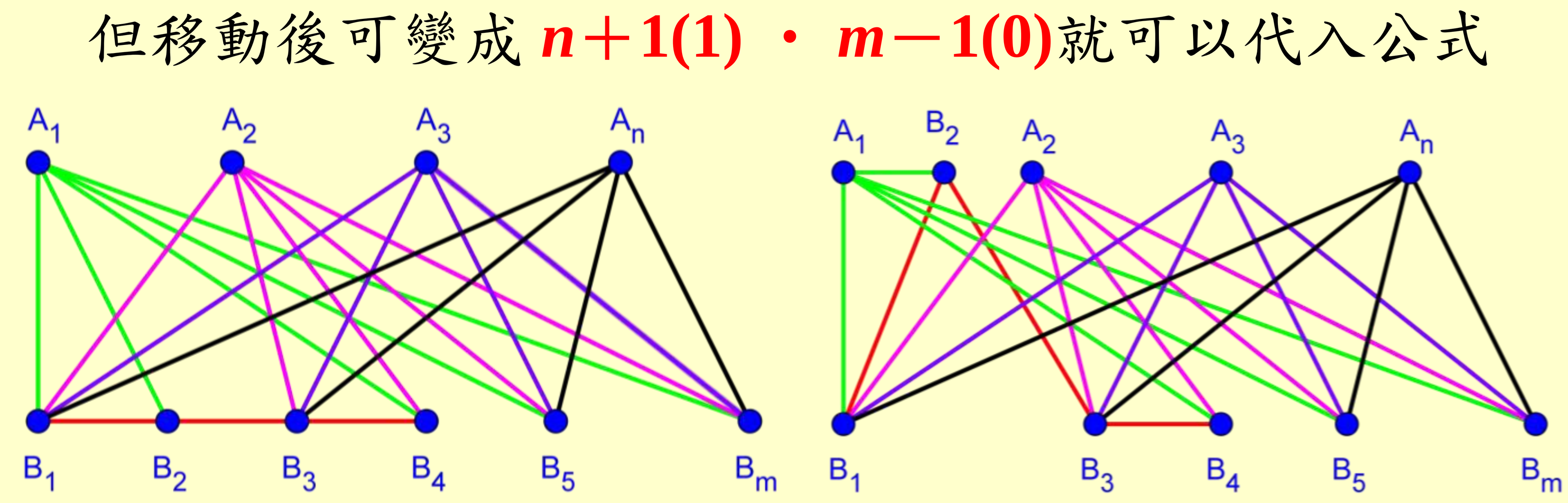
總連線數：$n(0)\cdot m(2)$ $=$**$n(m-2)+4$**

$n(0)$、$m(2)$的討論情況會有這麼多種，但我們發現**移動**後皆可用 公式，所以移動點就可以討論。

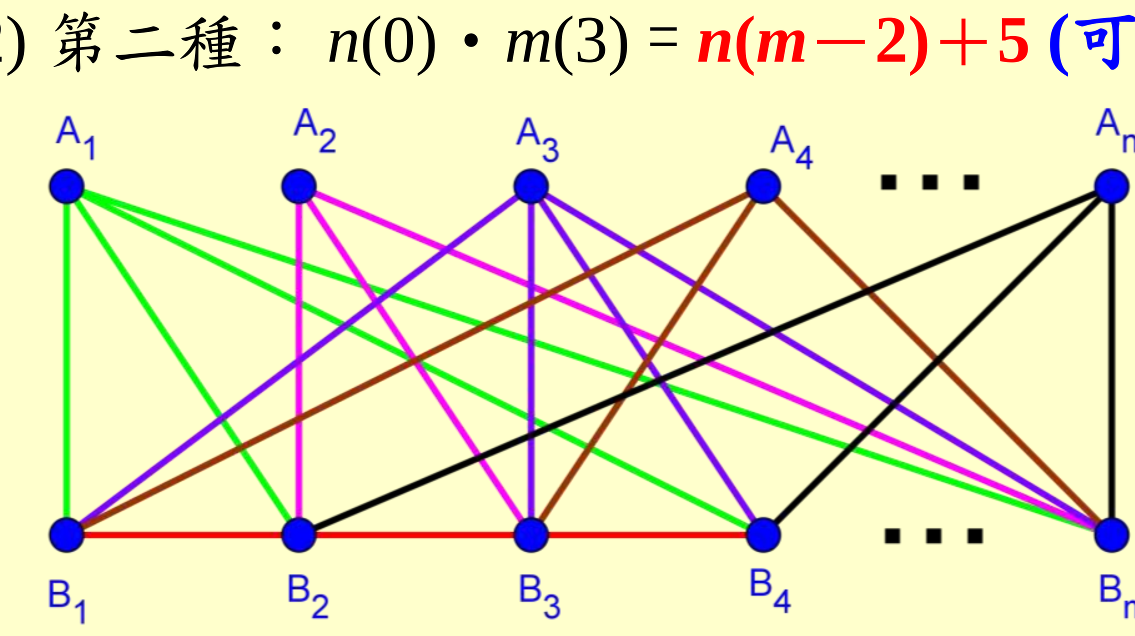
4. 討論**$n(0)$、$m(3)$**的狀況：有二種不同的連線狀況

(1) 第一種： $n(0)\cdot m(3) =$ **$n(m-2)+5$ （和公式不符）**

但移動後可變成 **$n+1(1)$ ・ $m-1(0)$**就可以代入公式



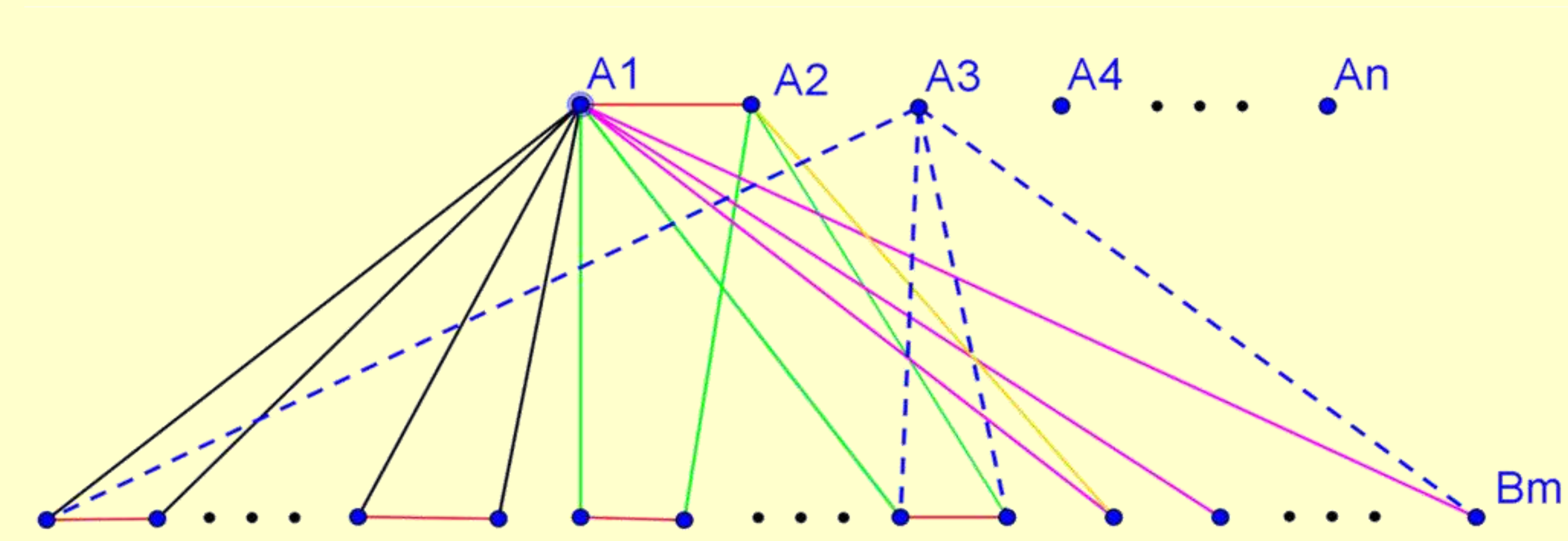
(2) 第二種： $n(0)\cdot m(3) =$ **$n(m-2)+5$ （可用公式）**



總連線數：$n(0)\cdot m(3)=$**$n(m-3)+6+(n-1)$**

5.討論**$n(1)$、$m\underbrace{(1,1,\ldots1)}_{a+b個}$**的狀況

【a個三角形和 b個四邊形】



總連線數：

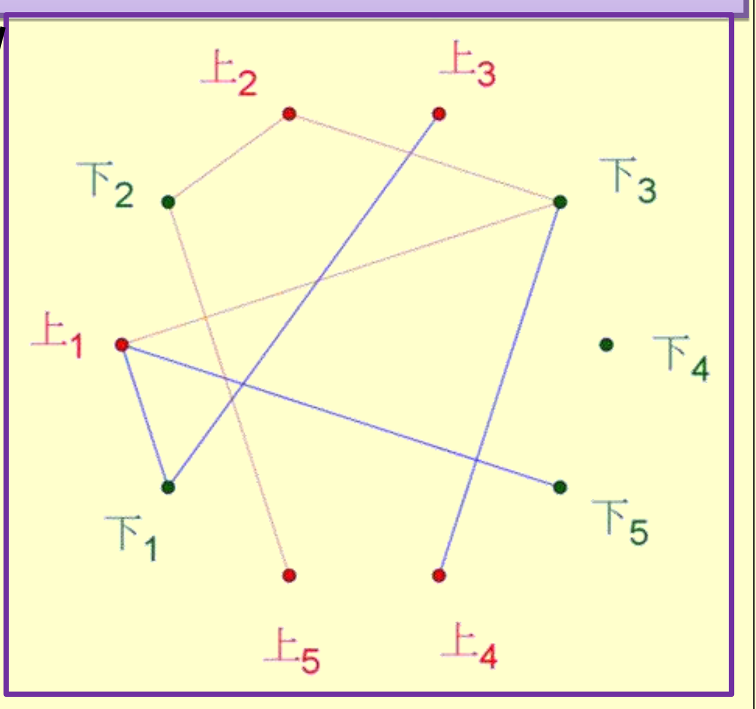
$n(1)\cdot m\underbrace{(1,1,\ldots1)}_{a+b個}=$**$(n-1)(m-a-b)+2(a+b+1)+b$**

(二)把公式應用在對戰中，模擬對戰狀況：

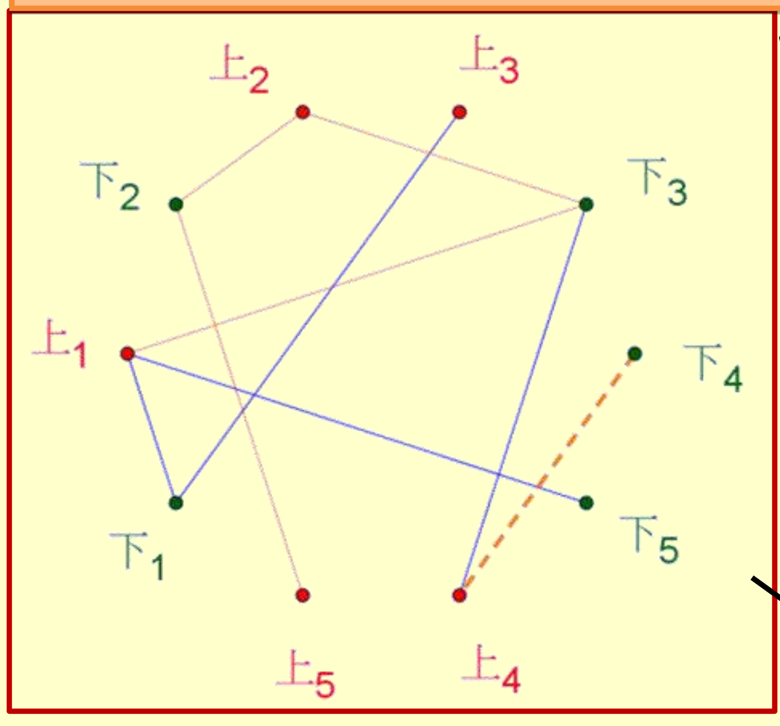
（橘代表<先者>，藍代表<後者>，紫為雙方）

設一開始有十個點

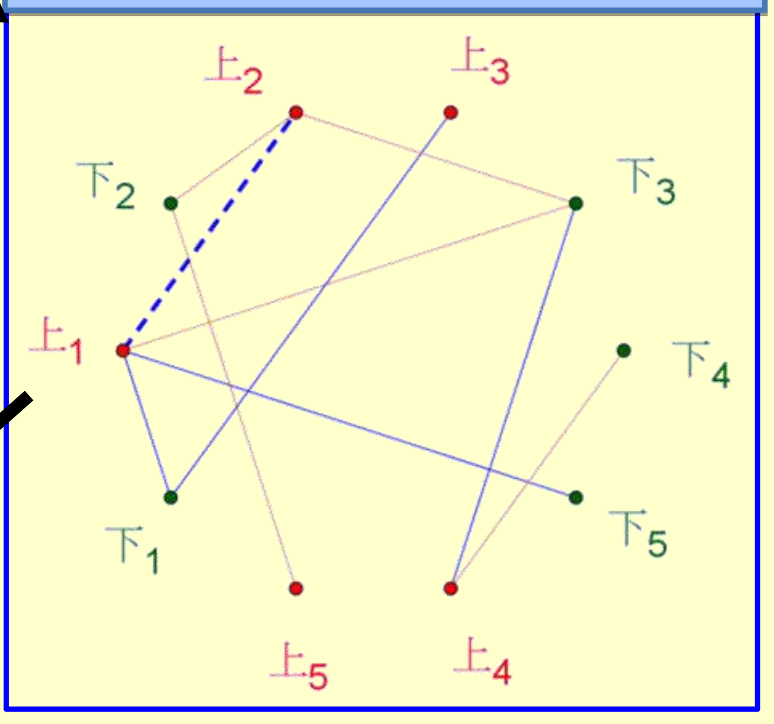
隨意連，但盡量避免一個點連太多條，然後連到所有的點都連過線後，開始劃分出上下點的形式。如下圖↓



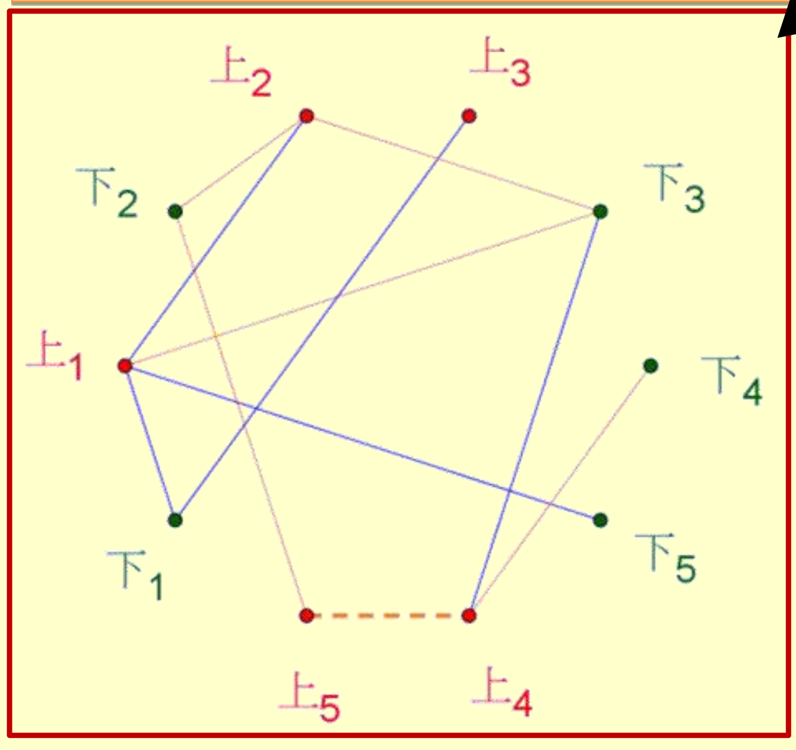
(先) 目前是5・5的分法，為奇數型態。所以持續地上下連即可。如下圖↓



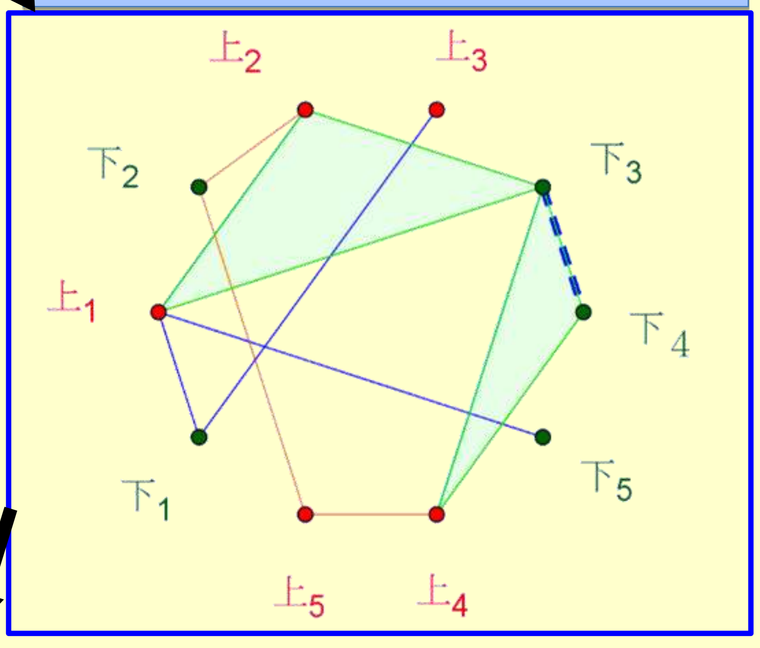
(後者) 連一條上連上，此時總條數22。如下圖↓



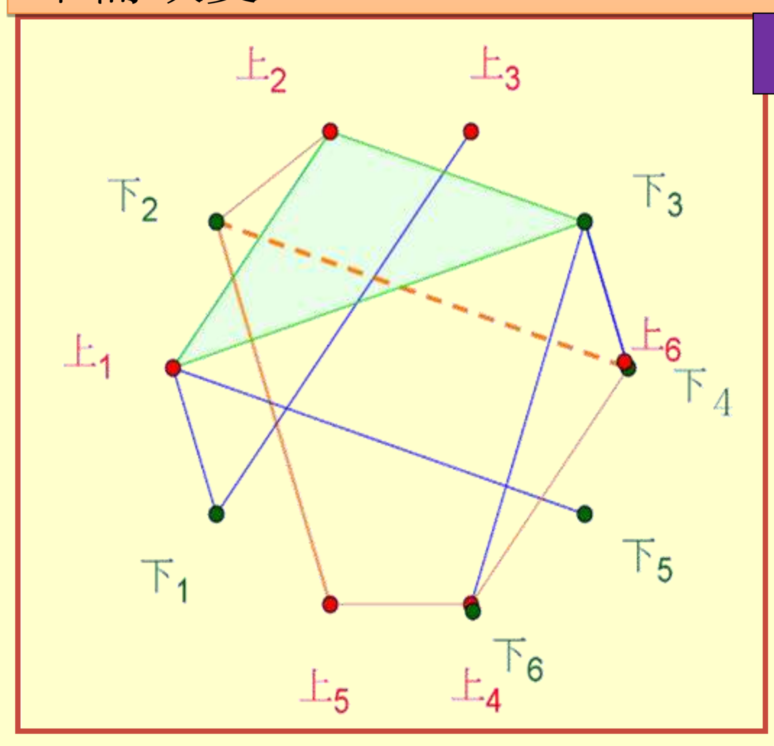
(先) 連一條上上，但不能連接到之前的上連上的兩點。此時總條數變成19。如下圖↓



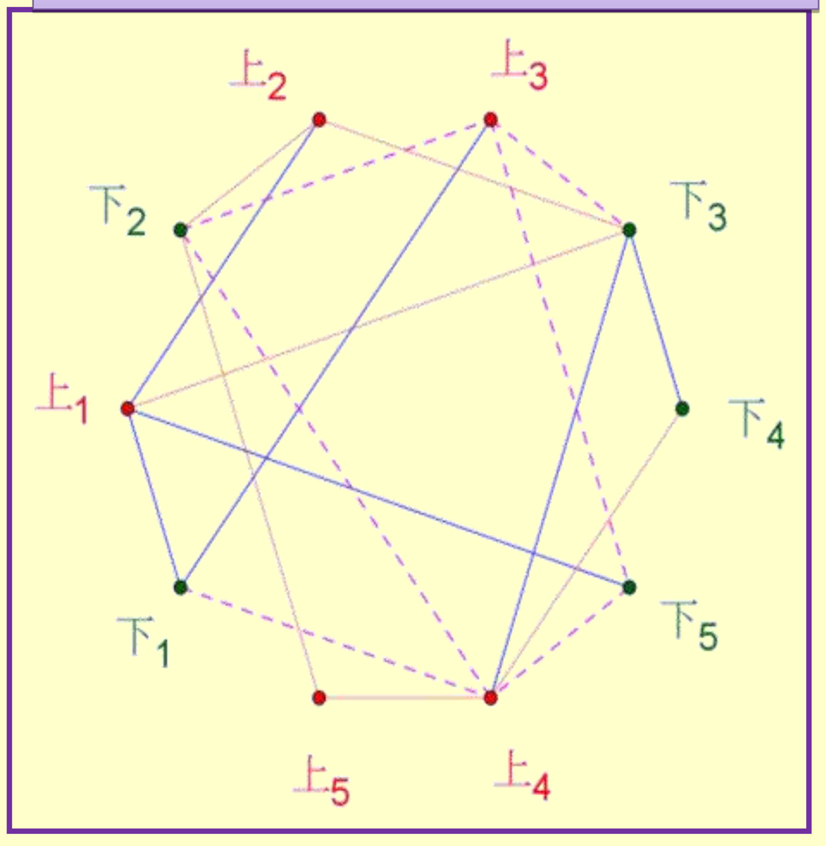
(後) 連一條下連下的線。此時總條數18。如下圖↓



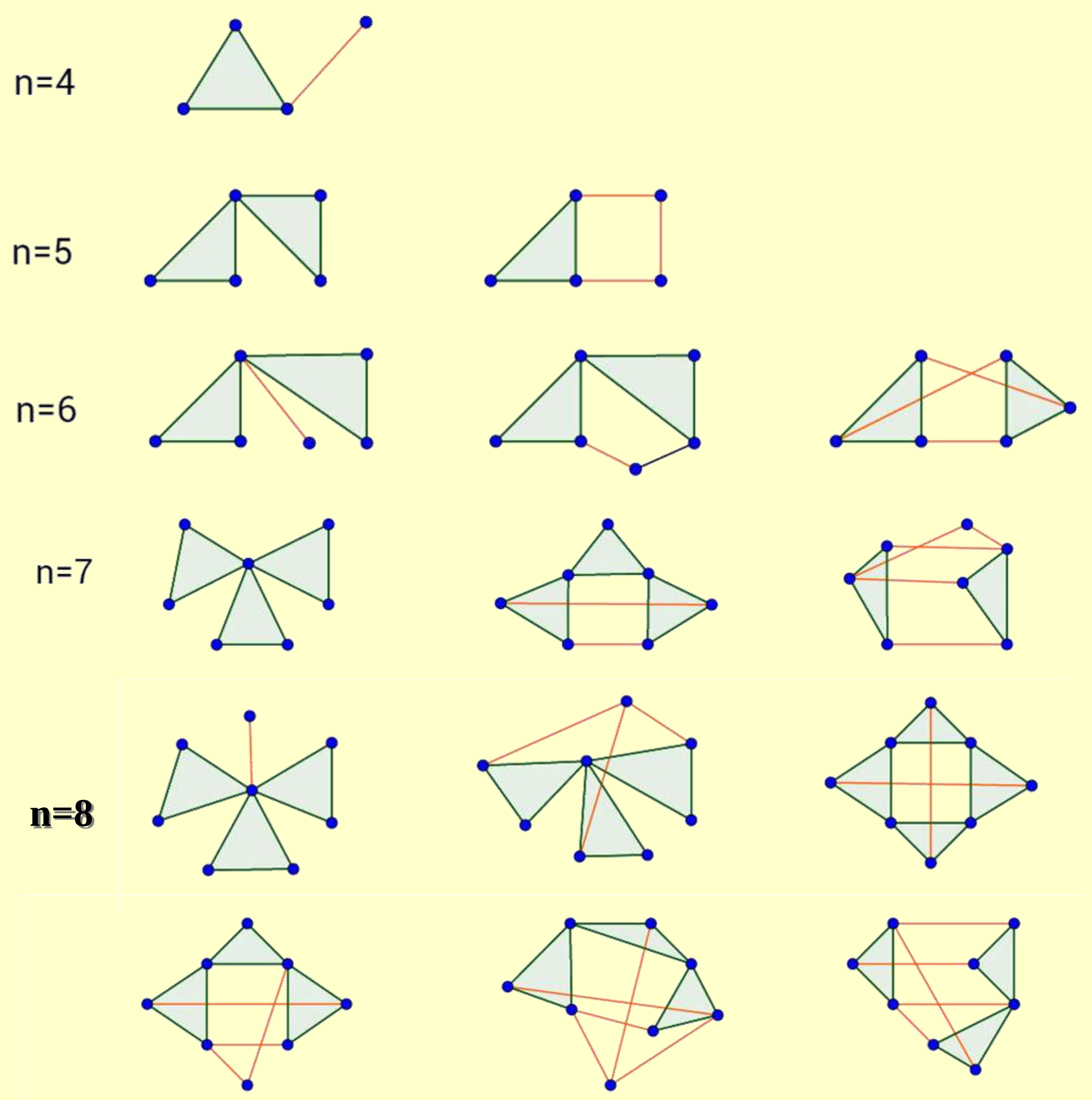
(先) 試著模擬不同的連線狀況，最後發現總連線數皆為偶數20，無法逆轉。如下圖↓
只須照著原本形態上下連即可，不需改變。



繼續往下連線，則根據公式最多可再連六條，一共18條，即結束此遊戲。這時勝負已定，**後者獲勝**。如下圖↓



[策略二]：『三角形觀察法』



伍、研究結果

一、完勝圖形的總連線數：

（一）若總點數為 $2n\ (n\in Z^{+})$，總連線最多為 $n\times n=n^{2}$ 條，最少為 $3n-2$ 條。

（二）若總點數為 $2n-1\ (n\in Z^{+})$，總連線最多為 $n(n-1)$ 條，最少為 $3n-3$ 條。

二、在進行雙三角終結者的對戰遊戲中，若總點數為$(n+m)$時，可依上下點數的不同以及連上上或下下的不同，都會導致完勝圖形總連線數的差別，因此我們可以整理出有規律的公式，如下表：

(1) $n(0)\cdot m(0)=\boldsymbol{n\times m}$

(2) $n(0)\cdot m(1,1,\ldots 1)=\boldsymbol{n(m-b)+2b}$

(3) $n(0)\cdot m(2)=\boldsymbol{n(m-2)+4+(n-2)}$

(4) $n(0)\cdot m(3)=\boldsymbol{n(m-3)+6+(n-1)}$

(5) $n(1)\cdot m(\underbrace{1,1,\ldots 1}_{a+b\text{個}})$ (a個三角形；b個四邊形)

$$=\boldsymbol{(n-1)(m-a-b)+2(a+b+1)+b}$$

三、$m(2)$、$m(3)$、$m(4)$…這種同邊連續相連，在討論上較複雜，但發現經移動改變成 $m(1)$、$m(1,1)$、$m(1,1,\ldots 1)$…的同構圖形，這樣就可以進行上面**結論二**的討論了。

四、若圖形連出很多三角形，我們也可以用**『三角形觀察法』**來判斷圖形還有多少連線可能，以便作為決策的依據。

陸、討論

一、雙三角終結者的對戰策略，需要經過玩家互相連線觀察一段時間後，才能開始分成上下來討論，沒辦法在一開始討論。所以未來我們希望能夠再尋找出某些方式，讓我們更提前觀察出圖形的未來走勢。

二、我們也可以改變雙三角終結者的遊戲的規則，例如：每個人一次可連1~3條的連線，這樣會讓遊戲更公平。

三、未來可以開發成一套電腦軟體，變成app的對戰遊戲。

柒、結論

一開始，我們以為雙三角終結者遊戲只是很單純的連線問題，但是因為終止圖形的問題，我們必須討論可以畫幾條？如何畫？本來希望能用窮舉法把所有可能連線全部畫出，但因為每一種連線數都有幾千種不同的畫法，導致我們沒辦法一一拿出來討論。如果改成討論每個點的連接數去看更難，因為必須考慮到不同的連接數要符合真的可以兩兩連線的樣子。所以討論起來也有很大的難度。剛好在一次移動點的時候，我們發現圖形可以移動成上、下點去做相連線的樣子，才開啟了接下來的研究。透過有規律的連線關係我們終於找到一些公式，並透過公式研擬作戰策略，這段過程很辛苦但也很美好。很感謝有這個機會，讓我們更認識點和點之間不同的連線情形，以及不讓三角形共邊所帶來的影響…種種問題，希望未來還能找出更多的方法，讓雙三角終結者的作戰策略能夠更好更快更完備。

捌、參考資料

【期刊文章】游森棚（2016）•六邊形對抗賽•*科學研習*，No.55-09，P64。