中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030405

數學界的虛實整合(利用3D列印創新萬花尺之研究)

學校名稱：臺中市立大甲國民中學

作者：	指導老師：
國二 蘇偉智	王俊祺
國二 陳韋廷	吳茂林

關鍵詞：擺線、萬花尺、3D列印

摘要

我們從圓繞圓的萬花尺出發，先熟練傳統萬花尺的數學原理，並自製一些特殊的狀態，例如畫橢圓的萬花尺等。接著是圓繞橢圓，這部分要注意橢圓的周長要改以齒數對應到內圓的周長齒數。另外我們延伸出兩個主題，橢圓繞圓、橢圓繞橢圓，這兩種一定要結合我們學校的 3D 列印設備創作新的萬花尺模型，並進一步的推導橢圓繞圓和橢圓繞橢圓的擺線方程式，最後我們也歸納出筆插位置不同、起始點不同所畫出的圖形差異。

壹、研究動機

上數學課的時候，老師說，學長之前科展研究萬花尺，用方程式和 GeoGebra 模擬了許多圖形，但馬上無法製作創新的萬花尺。今年，學校添購兩台中階的 3D 列印機，我們一致覺得可以好好的發展這個主題，因此，決定以創新萬花尺為主題，結合 3D 列印，製作和改造成新的萬花尺模型。

貳、研究目的

一、找到兩圓轉動關係(萬花尺形成的關鍵原因)。

二、討論萬花尺的圖形與圓的關係

三、統整歸納出萬花尺方程式與圖形的關係

四、找出作圖工具的科學原理

五、用 3D 列印實現萬花尺的模擬推論

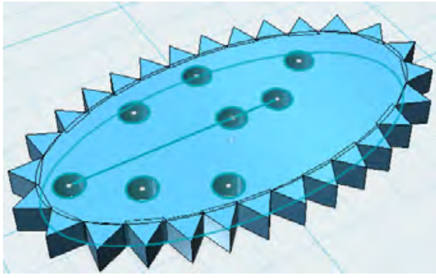
參、研究設備與器材與研究流程

紙、筆、電子計算機、網路、萬花尺、軟體(GeoGebra、word、Excel)。

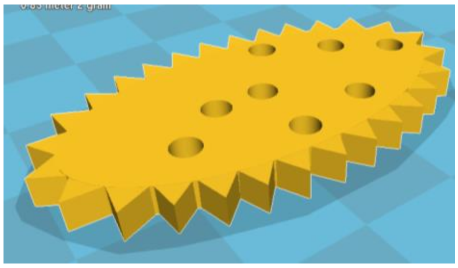
肆、研究過程

一、3D 列印的應用

學校在去年買了 3D 的印表機，我們發現，其實可以用 3D 列印機來製作萬花尺。因為，之前討論萬花尺時有很多理論的圖形只能用 GeoGebra 跑出來，現在，應該可以製作成實際的萬花尺。



我用的是 123D Design 來製作模型，如右圖，我花上了一段時間去學習怎麼設計模型，在看了一些書和網頁之後，就開始著手設計，其中橢圓齒輪的設計上，不能像圓形，設計出一個齒輪，然後再讓它等距環繞圓周，所以在橢圓齒輪製作時是最辛苦的，要做一個三角柱，複製後再一一調整使其能嵌入橢圓裡。



畫圓之後再轉 Cura，如右圖，調整好他的速度後最後在下指令讓 3D 列印機列印，在列印時我失敗很多次，做了很多調整，包括噴頭到平台的距離等等，最後終於做出了我要的模型。

二、擺線作圖的基本知識

萬花尺是傳統的玩具，用一圓繞行中空的外圓或橢圓即可形成圖形。歷來，科展對這個主題著重於了解坊間萬花尺運作的現象，並找出對應的數學理論。我們研究方向剛好與之向反，我們先研究數學理論，再將其利用自製萬花尺表現出來。首先，我們針對萬花尺運作原理先作一些探討：

萬花尺圖形成形原理及模擬方式

1. 我們使用 geogebra 作圖工具，利用角度模擬(內部小圓繞外部大圓的角度關係)

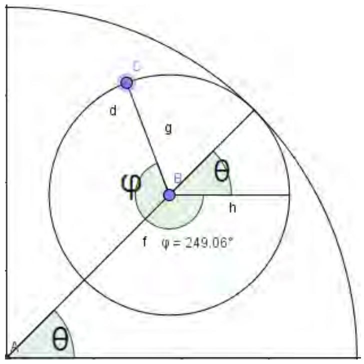
萬花尺的圖形是由內圓在外圓內滾動所形成的圖形，小圓旋轉跑過的路徑等於大圓，即：內圓要轉幾度$=\dfrac{\text{大R}*\text{大}\theta}{\text{小R}}$

如果實際測量 R 和 r 製作成萬花尺時一定會有誤差，所以應該改為齒數比，即：內圓要轉幾度$=\dfrac{\text{大圓齒數}*\text{大}\theta}{\text{小圓齒數}}$

角度模擬的原理可以應用到方程式作圖。

2. 利用方程式模擬

找出萬花尺圖形的方程式後可以控制圖形各項變化，利用調整這些參數可以找出特別的圖形，並驗證是否能具體實現。



(1) 不考慮筆插的內滾動點方程式

以 C 為動點，R、r 為外、內圓半徑。

C 相對 B→$(r\cos(\varphi), -r\sin(\varphi))$

B 相對 A→$((R-r)\cos(\theta), (R-r)\sin(\theta))$

又因$R\theta = r(\theta+\varphi)$[滾動距離相等]　所以$\varphi = \frac{(R-r)\theta}{r}$

C 相對 A→$((R-r)\cos(\theta) + r\cos(\frac{R-r}{r}\theta), (R-r)\sin(\theta) - r\sin(\frac{R-r}{r}\theta))$

因此所推得的動點方程式如下：

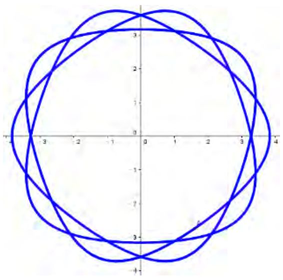
【$(R-r)\cos(\theta) + r\cos(\frac{R-r}{r}\theta), (R-r)\sin(\theta) - r\sin(\frac{R-r}{r}\theta)$】

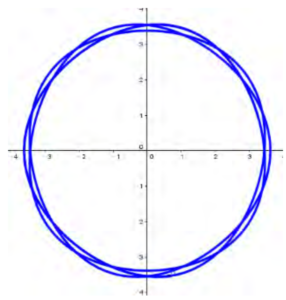
但是後半段方程式cos、sin括號裡面要用齒數比，因為半徑實際測量時會有誤差，而齒數比是整數，所以將半徑用齒數比來取代，方程式為：

【$(R-r)\cos(\theta) + r\cos(\frac{M-N}{N}\theta), (R-r)\sin(\theta) - r\sin(\frac{M-N}{N}\theta)$】

而將 x，y 除以 q， q 越大，花瓣越圓，這就是 筆插 會造成的影響

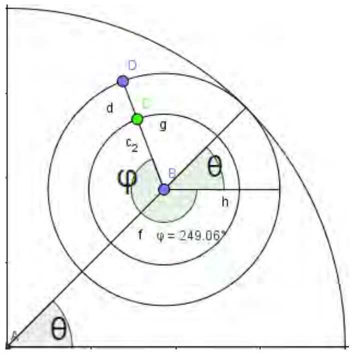
【$(R-r)\cos(\theta) + \frac{r\cos(\frac{M-N}{N}\theta)}{q}, (R-r)\sin(\theta) - \frac{r\sin(\frac{M-N}{N}\theta)}{q}$】





筆插：萬花尺上將筆插入的位置

(2) 加入筆插位置後的萬花尺圖形動點方程式



令 C 點為筆插位置距圓心 a 個單位，D 為對應出去的點，外圓與內圓的半徑分別為 R、r 單位。當內滾圓走了θ度，圓心相對的也轉θ度，C 點轉了∅度。

C 相對 B→$(\mathrm{a} \cdot \cos\varphi，-\mathrm{a} \cdot \sin\varphi)$

B 相對 A→$((\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\theta, (\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin\theta)$

又因$\mathrm{R}\theta = \mathrm{r}(\theta+\varphi)$[滾動距離相等]　所以$\varphi = \frac{(R-r)\theta}{r}$

C 相對 A→ $(\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos\theta + \mathrm{a} \cdot \cos(\frac{\mathrm{M-N}}{\mathrm{N}}\theta), (\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin\theta - \mathrm{a} \cdot \sin(\frac{\mathrm{M-N}}{\mathrm{N}}\theta)$

利 用 方 程 式 模 擬 萬 花 齒 後 ， 可 以 討 論 各 參 數 的 變 化 來 調 整 萬 花 齒

三. 自製萬花尺的實驗目的及模擬方式說明

我們從方程式及模擬圖形出發，利用 3D 列印進行實驗，看萬花尺能做些什麼不同的變化？

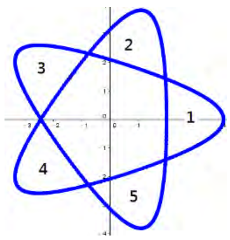
從暑假開始，我們就開始學習 GeoGebra、三角函數、找出擺線方程式及用 3D 列印作出創新萬花尺，一開始我們設定有四個主題。剛開始不會太難，但隨著進入未知的領域就漸漸難了起來；綜合來說，製作萬花尺不會太難，真正困難的是，如何用數學描述這些現象。以下是我們這一年的研究過程，分成四大部分：

(一) 圓繞圓的特殊萬花尺

能控制的變因有：外圓齒數 m(大圓半徑 R 相關)、內圓齒數 n(內圓半徑 r 相關)、筆插位置 a。

1. 利用內圓齒數，控制花瓣數量，盡量表現出所有可能花瓣數。

由於齒數比不同，所以不同的內滾圓會有不同的花瓣數，花瓣數是根據最小公倍數計算。若外圓與內圓的最簡半徑比(齒數比)為 A:B 則花瓣數為 A。繞行順序為 1→1+B→1+2B……依序完成圖形。



例如：齒數 60 的外圓和齒數 24 的內滾圓因尺數最小公倍數為 120 也就是小圓要轉 5 圈大圓要被轉 2 圈才算完成，所以瓣數是 5，也就是兩圓齒數最小整數比之外圓齒數。(60:24=5:2 因此瓣數為 5)，另外繞行順序為：1→3→5→2→4

2. 不同筆插能決定花冠位置及圖形的凹凸情形，但受限於小圓齒數(即小圓 r 的大小)所以不是能任意調整筆插的位置，模擬的部分倒是可以，這個我們在之後的討論會說明。

(二) 圓繞橢圓

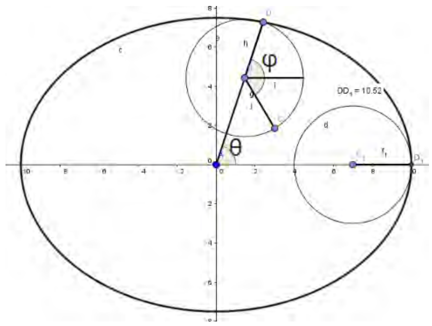
這邊的橢圓有一個問題是：橢圓的周長是一個複雜的無理數，裡面的圓周長和橢圓周長不會有有理數的倍數關係，萬花尺要如何運作呢？如果周長非有理數

的倍數關係最後圖形一定被填滿，無法表現出花樣，因此關鍵在於齒數，我們用齒數取代了橢圓的周長。老師說，這是比較不純粹數學的地方，但我們的世界不正是如此，還是可以用數學描述我們觀察到的現象。

(1) 類橢圓方程式模擬

首先，我們用高中的橢圓方程式，$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 將橢圓的用參數

P = (acosθ，bsinθ)代入， $\overline{\mathrm{PO}}$長度公式以 R 來表示為：



$$\mathrm{R}=\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}$$

橢圓的半徑是一個變化的式子：

$$\mathrm{R}=\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}$$

設橢圓半徑為 $\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}$ ，內圓的半徑為 r 橢圓齒數 m 內圓齒數 n

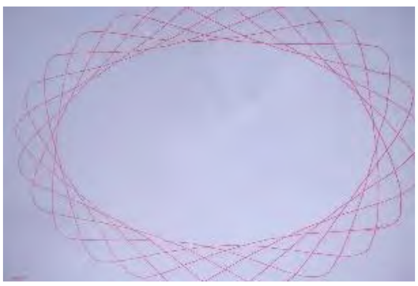
C 相對 B → [rcosφ,－rsinφ]

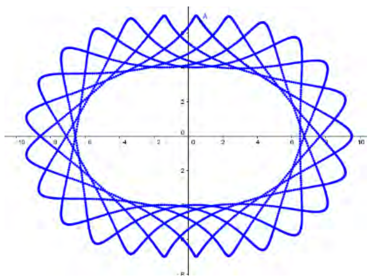
B 相對 A → [($\sqrt{a^2cos^2(\theta)+b^2sin^2(\theta)}$－r)cosθ,($\sqrt{a^2cos^2(\theta)+b^2sin^2(\theta)}$－r)sinθ]

利用之前的角度模擬： θm＝(θ+φ)n → $\varphi=\dfrac{m-n}{n}\theta$

得到方程式：$\left(\sqrt{a^2cos^2(\theta)+b^2sin^2(\theta)}-\mathrm{r}\right)\cos(\theta)+\mathrm{rcos}\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$，

$$\left(\sqrt{a^2cos^2(\theta)+b^2sin^2(\theta)}-\mathrm{r}\right)\sin(\theta)-rcos(\frac{m-n}{n}\theta)$$





此圖形與機械作圖有 **相當** 的差異

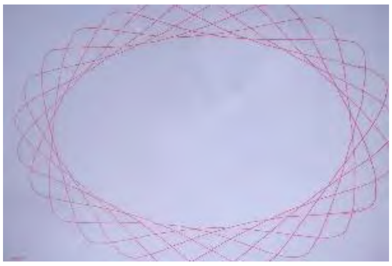
後來我們將橢圓的半徑變化的式子調整利用極座標的方式寫出相對於中心的極坐標形式： $R=\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}$

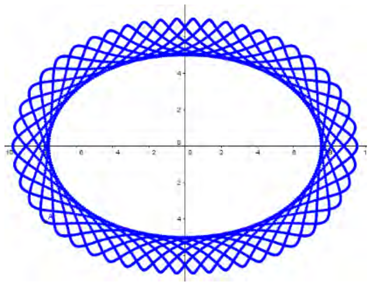
得到方程式：

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-\mathrm{r}\right)\cos(\theta)+\mathrm{rcos}\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),$$

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}\right)-\mathrm{r}\,)\sin(\theta)-rsin\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$$

模擬後的圖形與機械作圖相仿，非常自然。





有了這個公式，我們大致可以進行創新萬花尺圖形及公式的討論了。

接下來，還有兩類以前未曾出現過得創新萬花尺討論：

(三) 橢圓繞圓

以之前方程式的模擬為基礎，我們發現橢圓的圓心繞圓的狀態近似於擺線方程式，因為這部分細節比較多，我們模擬出結果後，會在討論的部分說明。

(四) 橢圓繞橢圓

橢圓繞橢圓以橢圓繞圓為基礎，再進行模擬，而且要考慮起始點，這部分的細節我們也放在討論說明。

因為從創作萬花尺到用數學說明運作的原理之中有一段時間，為了表現模擬圖形的改變，我們在下個單元模擬的部分先以最初的模擬圖形，討論的部分我們再呈現最後的結果。

伍、研究結果

一、特殊圓繞圓萬花齒的具體實現

首先，根據推算，萬花尺可能形成花瓣數和外圓齒數的因數個數有關，48 的因數有 10 個、64 的因數有 7 個(我們買的坊間萬花尺)，雖然因數不少卻不是 100 內因數最多的，因此，我們以 100 以內，因數最多的 60 (12 個)來當外圓的齒數，我們盡可能實現各種花瓣數，

圓形外圓 60 齒

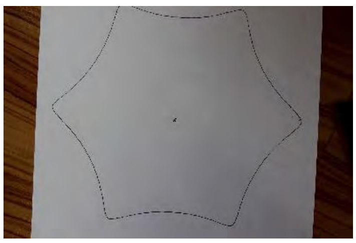
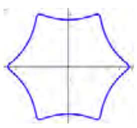
瓣數	可用內圓齒數
2	30
3	20、40
4	15、45
5	12、24、36、48
6	10、50
10	6、18、54
12	5、25、35、55
15	4、8、16、28、32、44、52、56
20	3、9、21、27、33、39、51、57
30	2、14、22、26、34、38、46
60	1、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59

	齒數	筆插最外孔離圓心	筆插孔數	半徑	花瓣數
外圓	60			5	
A	10	0.5cm	1	0.9	6
B	15	1.0cm	2	1.3	4
C	18	1.0cm	2	1.5	10
D	19	1.5m	3	1.6	60
E	20	1.5cm	3	1.7	3
F	22	1.5cm	3	1.8	30
G	24	1.5cm	3	2	5
H	25	1.5cm	3	2	12
I	27	2.0cm	4	2.3	20
J	30	2.0cm	4	2.5	2
K	32	2.5cm	5	2.7	15
L	60				1

結果令人滿意。

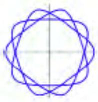
標紅色代表選取討論，選取的原因是，這些齒數較容易製作，容易製作的原因是因為齒數較容易安排在圓周上。另外，由表中可以看出，除了 1 瓣 (內圈 60 齒)以外，其餘都可以用 3D 列印製作的萬花齒實現，其中最特別的是兩瓣的圖形；他是橢圓。因此，我們可以用萬花齒來製作畫橢圓工具，詳細情形我們放在討論。

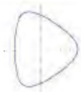
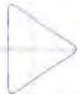
實際繪圖情形如下表：

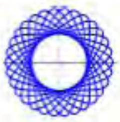
<table>
<tr><td colspan="4">外圈 60 齒 內圈 10 齒 筆插數 1 花瓣數 筆插以 0.5 距離中心遞增</td></tr>
<tr><td>筆插</td><td>1</td><td rowspan="3">外圈 60 齒 內圈 10 齒在旋轉時會有跳格的現象，所以手繪沒有畫成。我們後來做了一個實驗將外圈調整為 120 齒，內圈 20 齒，筆插數 3，即跑出六辦的圖形。</td><td rowspan="3">外圈 120 齒 內圈 20 齒
</td></tr>
<tr><td>3D 列印
手繪</td><td>外圈 60 內圈 10 齒
失敗</td></tr>
<tr><td>Geogebra
模擬</td><td></td></tr>
</table>

外圈 60 齒 內圈 15 齒 筆插數 2 花瓣數 4 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	內圈還算是比較小的，所以筆插只做了兩個，模擬的圖形大致相同。
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 60 齒 內圈 19 齒 筆插數 3 花瓣數 60 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 60 齒 內圈 18 齒 筆插數 2 花瓣數 10 筆插以 0.5 距離中心遞增		
筆插	1	2
3D 列印 手繪		
Geogebra 模擬		

外圈 60 齒 內圈 20 齒 筆插數 3 花瓣數 3 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

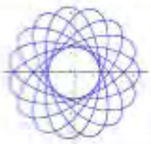
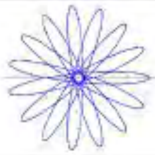
外圈 60 齒 內圈 22 齒 筆插數 3 花瓣數 30 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 60 齒 內圈 24 齒 筆插數 3 花瓣數 5 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 60 齒 內圈 25 齒 筆插數 3 花瓣數 12 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 60 齒 內圈 27 齒 筆插數 4 花瓣數 20 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	1	2	3	4
3D 列印 手繪				
Geogebra 模擬				

外圈 60 齒 內圈 30 齒 筆插數 4 花瓣數 2 筆插以 0.5 距離中心遞增 (可作為畫橢圓工具)				
筆插	1	2	3	4
3D 列印 手繪				
Geogebra 模擬				

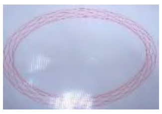
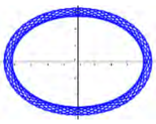
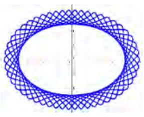
外圈 60 齒 內圈 32 齒 筆插數 4 花瓣數 15 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	1	2	3	4
3D 列印 手繪				
Geogebra 模擬				

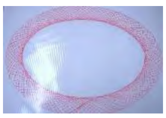
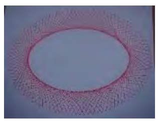
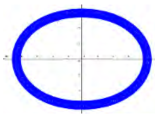
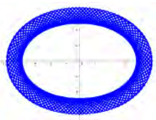
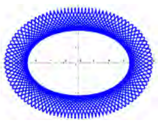
二、圓繞橢圓的 3D 列印萬花尺實作

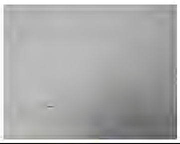
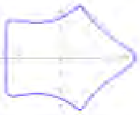
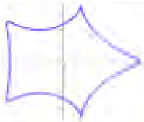
橢圓繞圓的萬花尺，我們以外圈橢圓 100 齒為例子，一樣把內圈齒數所有可能形成的花瓣數找出來，圓繞橢圓的模擬方程式之前討論過，所以模擬的結果與我們製作出來的萬花尺圖形大致相同。

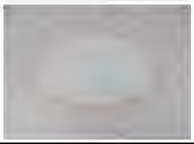
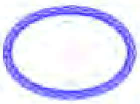
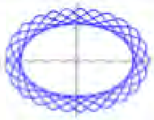
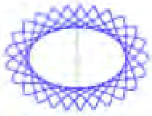
瓣數	可用內圓齒數
2	50
4	25、75
5	20、40、60、80
10	10、30、70
20	5、35、45、55、65、85、95
25	4、8、12、16、24、28、32、36、44、48、52、56、64、68、72、76、84、88、92、96
50	2、6、14、18、22、26、34、38、42、46、54、58、62、66、74、78、82、86、94、98
100	1、3、7、9、11、13、17、19、21、23、27、29、31、33、37、39、41、43、47、49、51、53、57、59、61、63、67、69、71、73、77、79、81、83、87、89、91、93、97、99

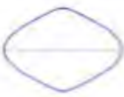
	齒數	筆插最外孔離圓心	筆插孔數	半徑	花瓣數
外圓	100			長軸 10 短軸 7.5	
A	18	1cm	2	1.5	50
B	19	1.5cm	3	1.6	100
C	20	1.5m	3	1.7	5
D	24	1.5cm	3	2.0	25
E	25	1.5cm	3	2.0	4
F	30	2.5cm	4	2.5	10
G	35	3	5	3	20
H	50	4.3cm	8	4.3	2
I	100				1

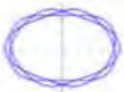
外圈 100 齒 內圈 18 齒 筆插數 2 花瓣數 50 筆插以 0.5 距離中心遞增		
筆插	1	2
3D 列印手繪		
Geogebra 模擬		

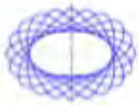
外圈 100 齒 內圈 19 齒 筆插數 2 花瓣數 100 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印手繪			
Geogebra 模擬			

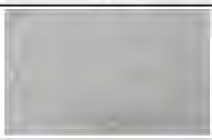
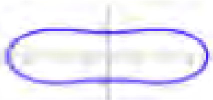
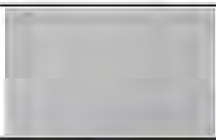
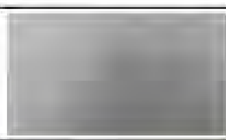
外圈 100 齒 內圈 20 齒 筆插數 2 花瓣數 5 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 100 齒 內圈 24 齒 筆插數 3 花瓣數 25 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 100 齒 內圈 25 齒 筆插數 3 花瓣數 4 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 100 齒 內圈 30 齒 筆插數 4 花瓣數 10 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	1	2	3	4
3D 列印 手繪				
Geogebra 模擬				

外圈 100 齒 內圈 35 齒 筆插數 5 花瓣數 20 筆插以 0.5 距離中心遞增					
筆插	1	2	3	4	5
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					

外圈 100 齒 內圈 50 齒 筆插數 8 花瓣數 2 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	1	2	3	4
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				
外圈 100 齒 內圈 50 齒 筆插數 8 花瓣數 2 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	5	6	7	8
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				

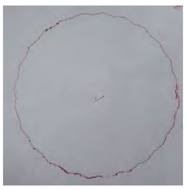
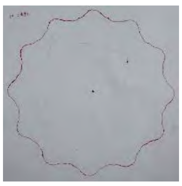
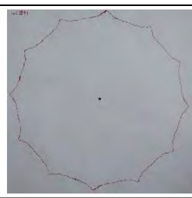
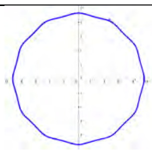
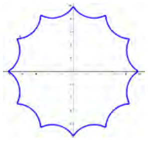
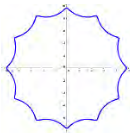
三、 橢圓繞圓的 3D 列印萬花尺實作

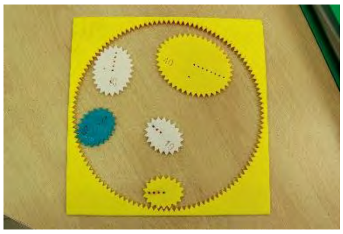
橢圓繞圓的萬花尺在坊間目前還沒有看到，製作上並不困難，因此世界上應該有這樣的產品只是目前沒看到也沒有人討論。

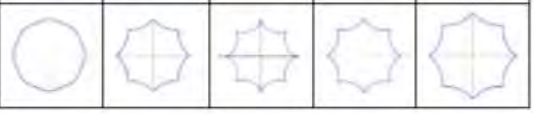
我們以 120 齒的外圓，搭配各種齒數的橢圓來進行實驗，目前，所完成的橢圓長短軸比只有一式，最主要是因為控制變因不能太多，我們打算進行完這一系列的討論後再處理不同長短軸的問題。

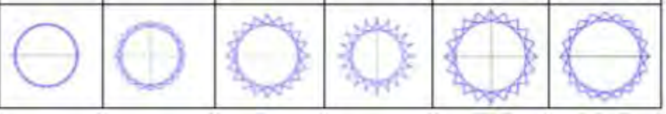
	齒數	筆插孔數	長軸	短軸	花瓣數
外圓	120				
A	10	3	1	0.75	12
B	15	5	1.5	1.125	8
C	18	6	1.8	1.36	20
D	19	6	1.9	1.425	120
E	20	5	2	1.5	6
F	21	7	2.1	1.575	40
G	22	6	2.2	1.65	60
H	24	7	2.4	1.8	5
I	25	7	2.5	1.875	24
J	28	8	2.8	2.1	30
K	30	7	3	2.25	4
L	32	9	3.2	2.4	15
M	36	10	3.6	2.7	10
N	40	9	4	3	3
O	60	13	6	4.5	2
P	120				1

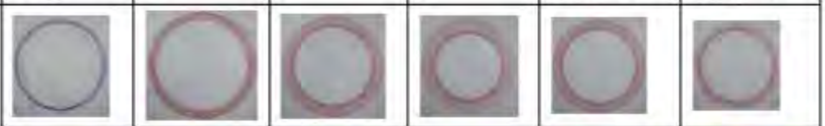
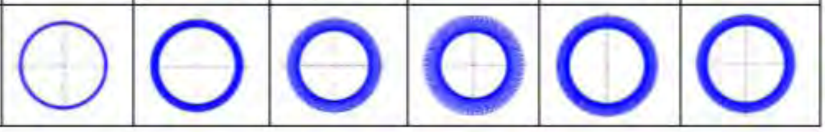
另外，筆插數是由橢圓中心及長、短軸一半取筆插再加上在長軸上的筆插數，因為長軸上的筆插可能會有重複的現象，所以比插數可能會減 1。一開始模擬的圖形和實際圖形差距很大圓因為何，我們會在討論時說明。

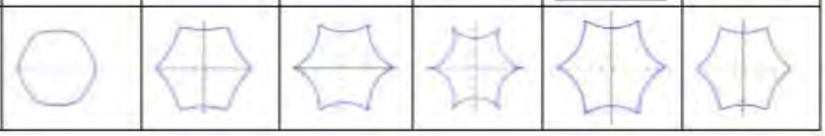
外圈 120 齒 內圈 10 齒 筆插數 3 花瓣數 12 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	中心	長軸一半	短軸一半	
3D 列印 手繪				
Geogebra 模擬				

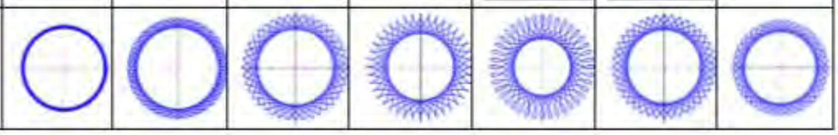


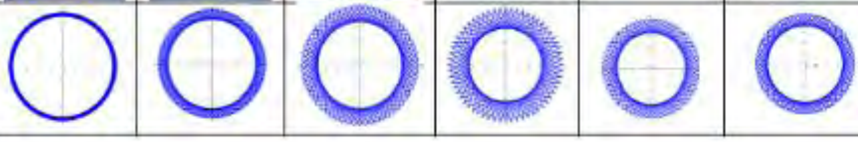
外圈 120 齒 內圈 15 齒 筆插數 花瓣數 8 筆插以 0.5 距離中心遞增					
筆插	中心	1	2	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					

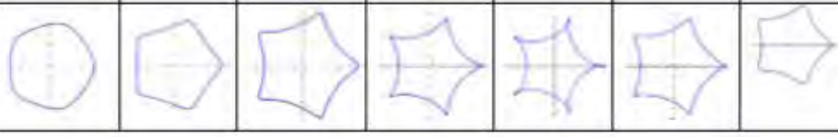
外圈 120 齒 內圈 18 齒 筆插數 花瓣數 20 筆插以 0.5 距離中心遞增						
筆插	中心	1	2	3	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪						
Geogebra 模擬						

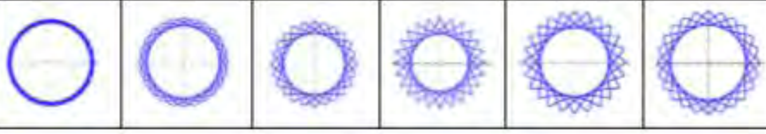
外圈 120 齒 內圈 19 齒 筆插數 花瓣數 120 筆插以 0.5 距離中心遞增						
筆插	中心	1	2	3	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪						
Geogebra 模擬						

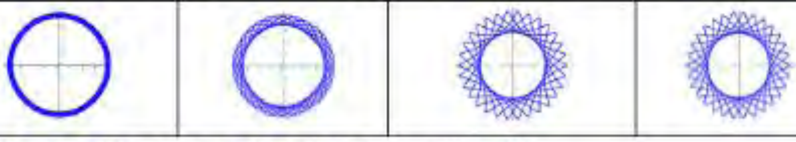
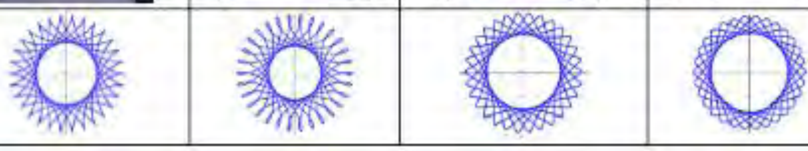
外圈 120 齒 內圈 20 齒 筆插數 花瓣數 6 筆插以 0.5 距離中心遞增						
筆插	中心	1	2	3	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪						
Geogebra 模擬						

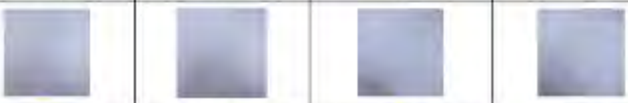
外圈 120 齒 內圈 21 齒 筆插數 花瓣數 40 筆插以 0.5 距離中心遞增							
筆插	中心	1	2	3	4	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪							
Geogebra 模擬							

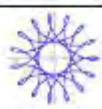
外圈 120 齒 內圈 22 齒 筆插數 6 花瓣數 60 筆插以 0.5 距離中心遞增						
筆插	中心	1	2	3	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪						
Geogebra 模擬						

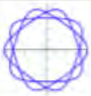
外圈 120 齒 內圈 24 齒 筆插數 花瓣數 5 筆插以 0.5 距離中心遞增							
筆插	中心	1	2	3	4	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪							
Geogebra 模擬							

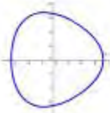
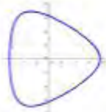
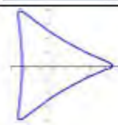
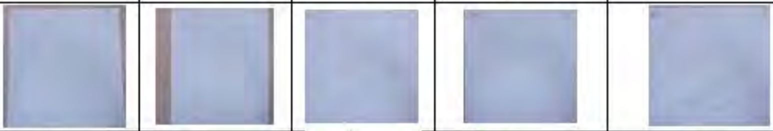
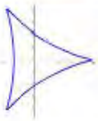
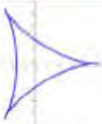
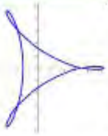
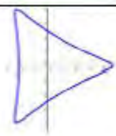
外圈 120 齒 內圈 25 齒 筆插數 花瓣數 24 筆插以 0.5 距離中心遞增						
筆插	中心	1	2	3		
3D 列印手繪						
Geogebra 模擬						

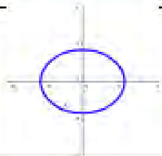
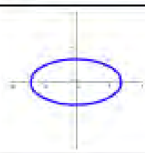
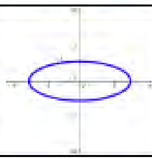
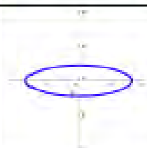
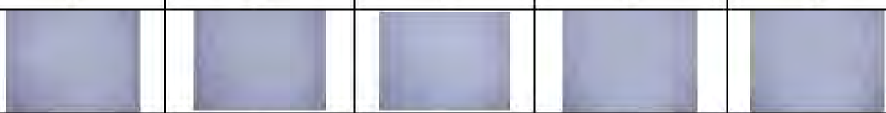
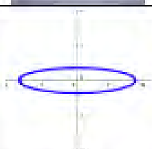
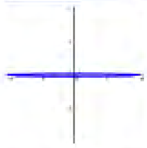
外圈 120 齒 內圈 28 齒 筆插數 8 花瓣數 30 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	中心	1	2	3
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				
外圈 120 齒 內圈 28 齒 筆插數 8 花瓣數 30 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	4	5	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				

外圈 120 齒 內圈 30 齒 筆插數 8 花瓣數 4 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	中心	1	2	3
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				
筆插	4	5	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				

外圈 120 齒 內圈 32 齒 筆插數 9 花瓣數 15 筆插以 0.5 距離中心遞增					
筆插	中心	1	2	3	
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					
筆插	4	5	6	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					

外圈 120 齒 內圈 36 齒 筆插數 花瓣數 10 筆插以 0.5 距離中心遞增					
筆插	中心	1	2	3	4
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					
外圈 120 齒 內圈 36 齒 筆插數 花瓣數 10					
筆插	5	6	7	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					

外圈 120 齒 內圈 40 齒 筆插數 10 花瓣數 3 筆插以 0.5 距離中心遞增					
筆插	中心	1	2	3	4
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					
筆插	5	6	7	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					

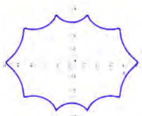
外圈 120 齒 內圈 60 齒 筆插數 15 花瓣數 2 筆插以 0.5 距離中心遞增					
筆插	中心	1	2	3	4
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					
筆插	5	6	7	8	9
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					
筆插	10	11	12	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					

四、 橢圓繞橢圓的 3D 列印萬花尺實作

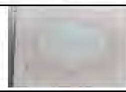
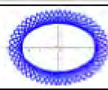
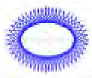
製作和模擬橢圓繞橢圓的萬花尺並不會特別困難，最主要是橢圓繞圓及圓繞橢圓已經把理論討論過一遍，所以在這個部分並沒有遭遇新的困難，例如橢圓繞橢圓方程式被繞橢圓的起始點等也都可以用前面討論過的方式來處理。

	齒數	筆插最外孔離圓心	筆插孔數	長軸	短軸	花瓣數
外圓	100			10	7.5	
	10			1	0.75	
A	18	1	2	1.8	1.35	50
B	19	1.5	3	1.9	1.425	100
C	20	1.5	3	2	1.5	5
D	24	2	4	2.4	1.8	25
E	25	2	4	2.5	1.875	4
G	35	3	6	3.5	2.625	20
H	50	4	8	5	3.75	2
I	100					1

外圈 100 齒 內圈 10 齒 筆插數 1 花瓣數 10 筆插以 0.5 距離中心遞增

筆插	1
3D 列印 手繪	
Geogebra 模擬	

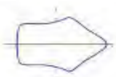
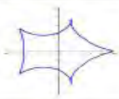
外圈 100 齒 內圈 18 齒 筆插數 3 花瓣數 50 筆插以 0.5 距離中心遞增

筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

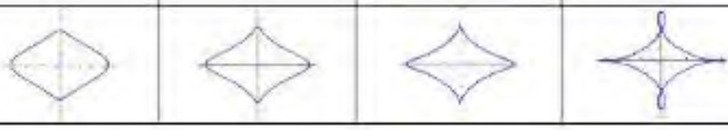
外圈 100 齒 內圈 19 齒 筆插數 3 花瓣數 100 筆插以 0.5 距離中心遞增

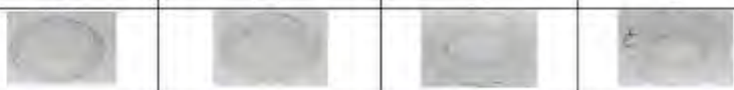
筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

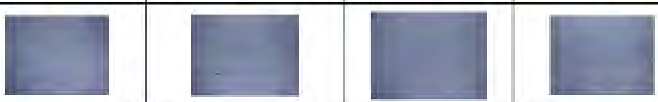
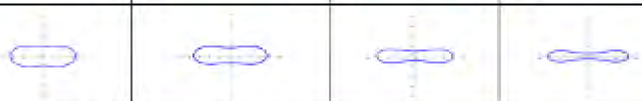
外圈 100 齒 內圈 20 齒 筆插數 3 花瓣數 5 筆插以 0.5 距離中心遞增

筆插	1	2	3
3D 列印 手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 100 齒 內圈 24 齒 筆插數 4 花瓣數 25 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	1	2	3	4
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				

外圈 100 齒 內圈 25 齒 筆插數 4 花瓣數 4 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	1	2	3	4
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				

外圈 100 齒 內圈 35 齒 筆插數 6 花瓣數 20 筆插以 0.5 距離中心遞增				
筆插	1	2	3	4
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				
筆插	5	6		
3D 列印手繪				
Geogebra 模擬				

外圈 100 齒 內圈 50 齒 筆插數 9 花瓣數 2 筆插以 0.5 距離中心遞增					
筆插	1	2	3	4	
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					
筆插	5	6	7	8	9
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					

陸、討論

一、圓繞圓的萬花尺作圖大致有以下問題：

(一) 只有 1 種花瓣數無法實現

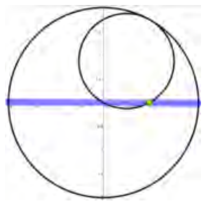
1. 當 r=R 即內外齒數比為 1:1 時 花瓣為 1 瓣，不可能完成，因為無法旋轉。若帶入擺線方程式：

$$【(R-r)\cos(\theta)+r\cos(\frac{R-r}{r}\theta),(R-r)\sin(\theta)-r\sin(\frac{R-r}{r}\theta)】$$

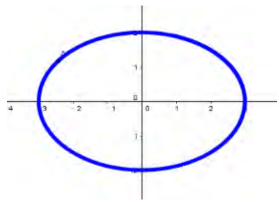
= [rcos0, -rsin0] = [r,0] 會停在 1 點

2. 除此之外，我們處理了一個實驗：原本 6 瓣 (60 齒：10 齒) 原本轉不動，因為齒數少不好轉，我們將外圈增加成 120 齒，內圈 20 齒，即可劃出 6 瓣圖形。(可參閱第 8 頁圖)

(二) 兩瓣的萬花尺可以作為畫橢圓的工具



1. 當內滾圓半徑為外圓的一半且動點在圓周上時，畫出來的將會是一直線。



2. 若動點在圓周內，可形成橢圓形

令兩圓半徑分別為 r、R=2r，筆插距圓心為 a

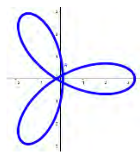
所以方程式為 $[r\cos(\theta)+a\cdot a\cos(\theta), r\sin(\theta)-a\sin(\theta)]$

$= [(r+a)\cos(\theta), (r-a)\sin(\theta)]$

令(r+a)為長軸，(r- a)為短軸，符合橢圓的參數式。可以為畫橢圓工具尺

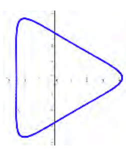
(三) 花瓣的凹向性及花冠位置及圖形中間聚焦成一點的時機

花瓣的凹向性取決於筆插的位置。



1. 當 R>r≧1/2R (如右圖)

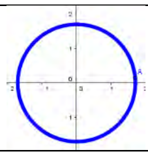
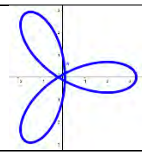
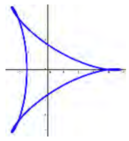
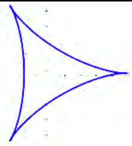
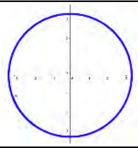
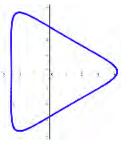
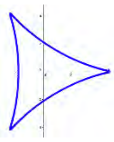
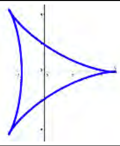
因為內圓較大，筆插移動的範圍要較廣。



2. 當 1/2R>r>0 (如右圖)

因為內圓較小，所以筆插的移動的範圍比較侷限於靠近外圓的地方。

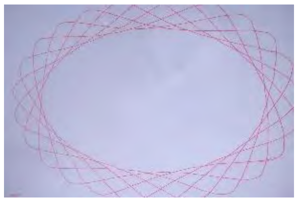
以下為筆插位置對圖形影響的分析：

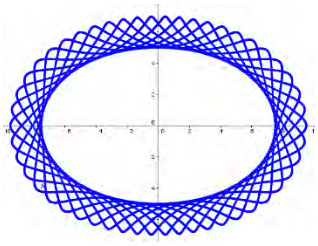
狀態	a=0	r>a>0	漸漸增大	a=r
1. $r > \frac{1}{2}R$				
情形：	圓形	內凹許多	稍微內凹	最尖
2. $r < \frac{1}{2}R$				
情形：	圓形	較圓	較尖	最尖

3. 圖形中間聚焦成一點的時機

因此，當內圓直徑大於外於半徑時才有可能出現圖形中間聚焦成一點的現象，且筆插會通過外圓圓心，也就是 R=r+a。

二、圓繞橢圓萬花尺





(一) 模擬的方式為橢圓的周長用齒數代替

橢圓的半徑以極座標表示所得到方程式：

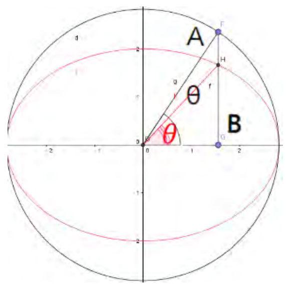
$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 sin^2(\theta)+b^2 cos^2(\theta)}}-\mathrm{r}\right)\cos(\theta)+\mathrm{rcos}\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),$$

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 sin^2(\theta)+b^2 cos^2(\theta)}}\right)-\mathrm{r}\,)\sin(\theta)-rsin\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$$

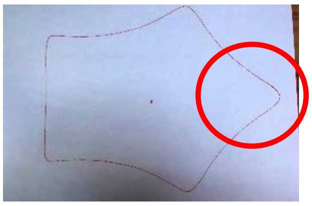
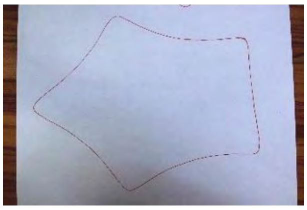
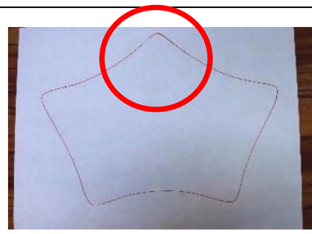
模擬後的圖形與機械作圖相仿，非常自然

1. 我推測原來的參數方程式的θ是指圓的θ
2. 真正的θ應該是橢圓上的點與 原點連線與 X 軸的夾角

   所以橢圓的半徑應該以極座標表示，這樣θ才能統一。



（二）特別要注意起始點的位置，其餘的部分與圓繞圓大致相同

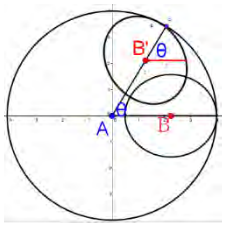
從長軸出發	從長短軸一半出發	從短軸出發
		

以 100 齒:20 齒(5 瓣)為例，筆插最靠近邊緣的部份開始作圖：當起始點不同時，花瓣的位置也會不同，少瓣的時候比較容易看出來，因為外圈是橢圓的關係，上面三個圖形不是相似形。

這邊起始點的筆插位置定義為距離外圓的最短距離

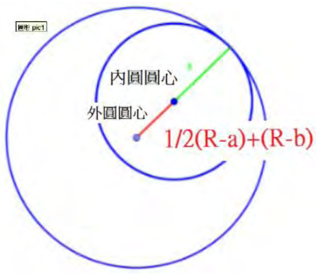
從上圖紅色圈起來處可以看出花瓣轉折處在曲率小(長軸)的地方較尖，曲率大(短軸)的地方較圓。

三、 橢圓繞圓萬花尺(關鍵在於橢圓的中心呈圓擺線狀態)

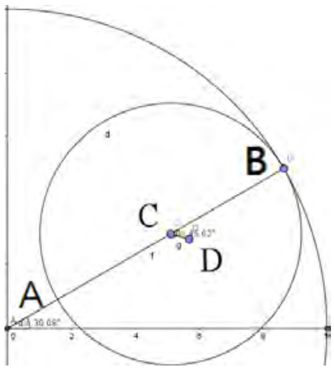


（一）我們發現橢圓繞圓的圓心呈現圓繞圓擺線的狀態

設定：外圓徑為 R，橢圓的長軸為 a、短軸為 b，外圓齒數為 m，內橢圓齒數為 n，我們觀察模型，發現了以下重點：



1. 動點的滾動範圍界在:外圓半徑−長軸(R−a) 與 外圓半徑 − 短軸(R−b) 之間
2. 花瓣數是內橢圓周長與外圓周長的最簡整數比中的外圓比，我們以齒數比 m：n 化簡後的前項代表
3. 由 1 可推得：內圓圓心介在離對應到的外圓圓心 $\frac{(R-b)+(R-a)}{2}$的地方
4. 筆插 a 值為：$\frac{(R-b)+(R-a)}{2}-(R-a)=\frac{1}{2}(a-b)$



由以上 4 點我們可以推得橢圓圓心的擺線方程式為：

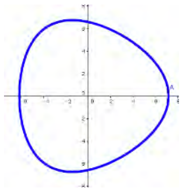
D 相對 C→$(\frac{1}{2}(a-b)\cos(\varphi)$，$-\frac{1}{2}(a-b)\sin(\varphi))$

C 相對 A→$(\left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta),(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta))$

$r=\frac{n}{m}R$ $\quad \varphi=\frac{m-n}{n}\theta$ 橢圓中心的方程式為：

$$((R-\frac{n}{m}R)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta)\ -\frac{1}{2}(a-b)\ \sin(\frac{m-n}{n}\theta)$$

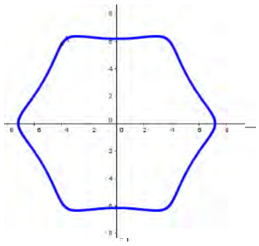
但畫出的圖形竟然和實際的圖形半數不同(如右圖)
這件事情煩惱了我們許久，後來我們發現橢圓中心離外圓的距離以半圈為一個週期，所以我們將方程式中的橢圓齒數除 2。

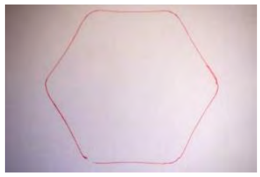


更改後的方程式：

$$[\ \left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right),$$

$$(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta-\frac{1}{2}(a-b)\ \sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)\ \ ]$$





更改後模擬出來的圖形非常相似

(二) 加入筆插不在橢圓中心點的方程式推導

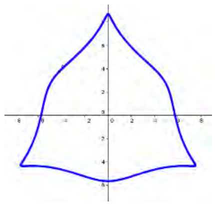
我們假設橢圓上的筆插是以圓的方式圍繞著橢圓中心旋轉

筆插相對於橢圓中心: $[a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$ ， $-a\sin(\frac{m-n}{n}\theta)]$

因為筆插是以圓的方式旋轉，所以橢圓的齒數不須除以 2 加入筆插後方程式：

$$[(\left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)+a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)]$$

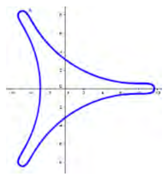
$$[(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta)\ \ -\frac{1}{2}(a-b)\ \sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)\ -a\sin(\frac{m-n}{n})\theta]$$



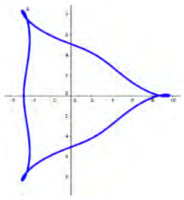
右圖是筆插位於短軸的模擬，圖形大致相同。

(三) 筆插位置不同的問題

1. 筆插在長短軸造成圖形的不同說明：



長軸一半



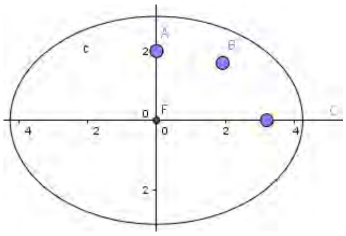
短軸一半

在短軸上的筆插在旋轉時距離外緣的最長距離相較於筆插在長軸短，因此動點的移動範圍較小，另外筆插位置不同，相對於外圓距離的變化也不同，所以花瓣的形狀會有明顯的不同。

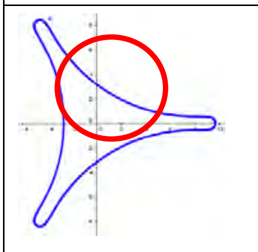
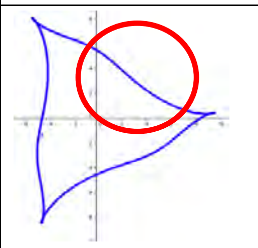
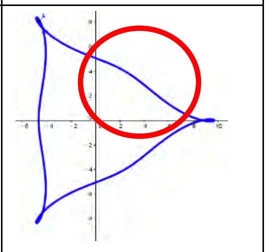
不過這個結果老師說我並沒有謹慎處理好控制變因，所以我設計了另一個比較和說明。

2. 固定筆插與外圓的最短距離

我們在這裡做了一個比較，當筆插的一開始的位置與外圓的距離相同，卻分別位在橢圓的長軸、短軸、一半的位置。從下圖可以發現真正影響圖形的關鍵在於筆插繞行時相對於外圓的距離變化。

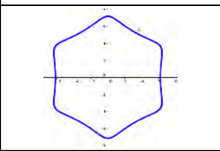
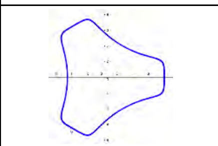
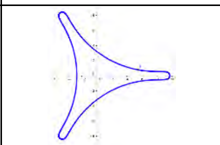
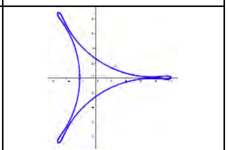
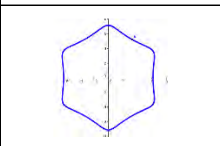
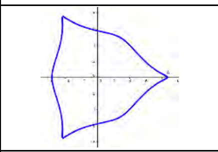
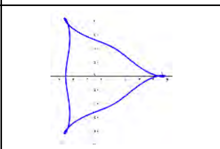
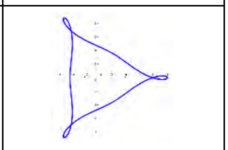


這三個圖在圈起來的地方有明顯的差異，筆插在長軸時相對圓外圓的距離變化大致與圓繞圓相同，是由短到長再到短一直循環，而筆插在短軸畫出來的圖形會有微微的禿起是因為筆插相對於外圓的距離變化是由最短-稍微變長-稍微變短-稍微變長-最短，稍微變短的那一段就是造成圖形禿起的原因。

C 長軸	B 一半	A 短軸
		

3. 筆插位置由內向外遞增對圖形的影響

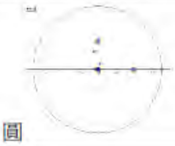
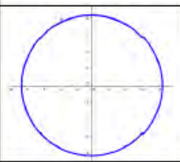
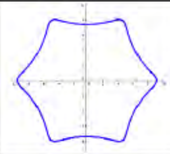
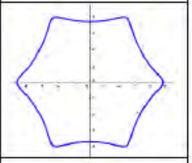
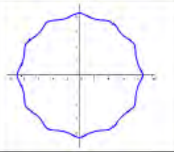
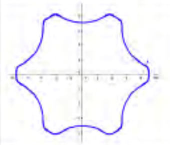
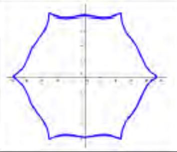
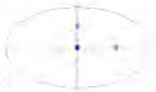
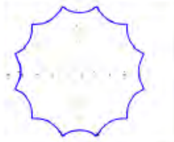
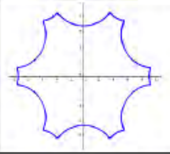
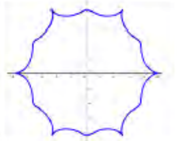
假設筆插為 x， a、b 為橢圓的短軸與長軸

狀態	x=0	b>x>0	漸漸增大	b=r
長軸				
情形：	最平	較平	較尖	最尖
狀態	x=0	a>x>0	漸漸增大	a=r
短軸				
情形：	最平	較尖	稍微內凹	最凹

從這裡可以發現不論是長軸還是短軸，筆插越向外移圖形越尖。

(四) 橢圓長軸與短軸比例對圖形的影響(橢圓圓扁)

以相同齒數周長比較：較扁的橢圓因為半徑的變化上較大，導致圖形比較尖銳。

	筆插在中心	長軸一半	短軸一半
 很圓			
 偏圓			
 偏扁			

四、 橢圓繞橢圓萬花尺 橢圓繞橢圓方程式推導

基本上，橢圓繞橢圓的方程式是根據圓繞橢圓及橢圓繞圓的理論來推算，以下是我們的作法：

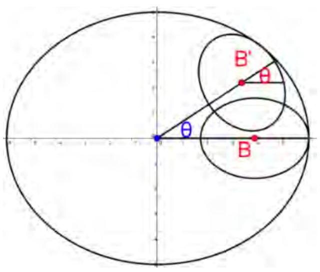
內橢圓圓心相對於外橢圓圓心：

$$[\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\cos(\theta)，-\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\sin(\theta)]$$

在這裡我們以內橢圓長軸與短軸的平均作為我們假設的內圓半徑

橢圓圓心向對於內圓：

$$[(\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)，-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right))]$$



橢圓筆插相對於橢圓圓心：

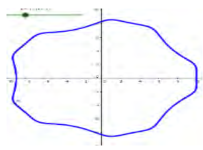
$$[a\cdot\cos(\frac{m-n}{n}\theta)，-a\cdot\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)]$$

橢圓繞橢圓方程式：

$$[\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)+a\cdot\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),$$

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\sin(\theta)\ -\frac{1}{2}(a-b)\ \sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)\ -a\cdot\sin(\frac{m-n}{n})\theta]$$

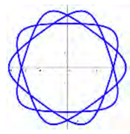
如右圖，橢圓繞橢圓的公式作圖的結果與實際圖形非常相同。

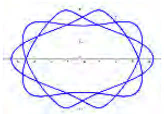


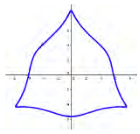
柒、結論

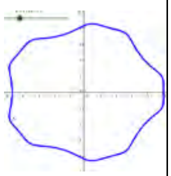
一、擺線模擬公式能清楚說明萬花尺運作方式

經過一連串的修改，我們推出了內圓為橢圓的萬花尺方程式，其中內圓旋轉的角度以齒數比替換半徑比後便能將萬花尺圖樣呈現出來。

<table>
<tr><th>類型</th><th>方程式</th><th>模擬</th><th>實際</th></tr>
<tr><td>圓繞圓</td><td>【$(\mathrm{R}-\mathrm{r})\cos(\theta)+\mathrm{r}\cos(\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}}{\mathrm{N}}\theta)$, $(\mathrm{R}-\mathrm{r})\sin(\theta)-\mathrm{r}\sin(\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}}{N}\theta)$】</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>圓繞
橢圓</td><td>【$(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}})-\mathrm{r})\cos(\theta)+\mathrm{rcos}\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$，

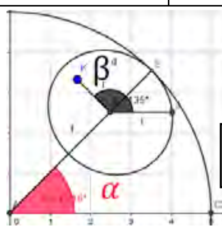
$(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}})-\mathrm{r})\sin(\theta)-rsin(\frac{m-n}{n}\theta)$】</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>橢圓
繞圓</td><td>【 $\left(R-\frac{n}{m}R\right)cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)+a\cdot\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$

$(R-\frac{n}{m}R)sin(\theta)-\frac{1}{2}(a-b)\ sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)-a\cdot\sin(\frac{m-n}{n})\theta]$ 】</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>橢圓
繞橢圓</td><td>$[(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b))\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)+a\cdot\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$,

$(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b))\sin(\theta)\ -\frac{1}{2}(a-b)\ \sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)\ -a\cdot\sin(\frac{m-n}{n})\theta]$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

二、作圖初始值(開始擺放位置)：α、β、γ對圖形的影響

以橢圓為內滾圓時會有三個變因

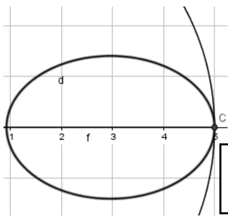


α、β 示意圖

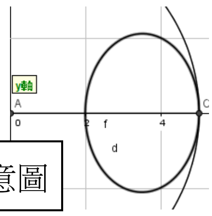
(1) α：外圓起始點-內圓從外圓的哪個位置出發(外圓為圓形不具效果)

(2) β：筆插相對於起始點的水平角度

(3) γ：內圓起始點-筆插位於內圓的擺放方式(內圓為圓形則不具效果)



γ 示意圖



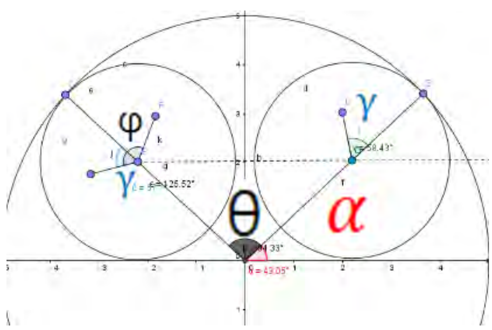
(一) 橢圓繞圓

我先從解決起始點及內圓擺放方式開始

設一開始內圓圓心對外圓圓心的角度是α°，動點對內圓圓心的角度是γ°滾動圓轉動角度為θ，被滾動圓被滾動的角度為φ。

橢圓圓心相對於內圓圓心為:

$\frac{1}{2}(a-b)\cos(\varphi-\theta-\alpha-\gamma)$，$-\frac{1}{2}(a-b)\sin(\varphi-\theta-\alpha-\gamma)$



橢圓圓心相對外圓圓心

內圓圓心對外圓圓心為:

$$\left(\mathrm{R}-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta+\alpha)\text{，}(\mathrm{R}-\frac{n}{m}R)\sin(\theta+\alpha)$$

接著是筆插的位置

筆插相對於橢圓中心:

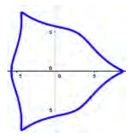
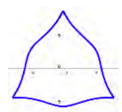
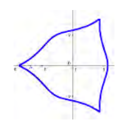
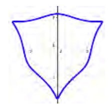
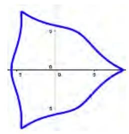
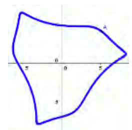
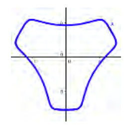
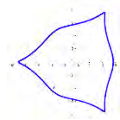
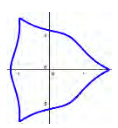
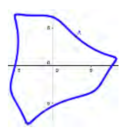
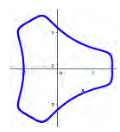
$$(a\cos(\varphi-\theta-\alpha-\beta)\text{，}-a\sin(\varphi-\theta-\alpha-\beta)$$

滾動距離相等: $\mathrm{R}\theta=\mathrm{r}\varphi \rightarrow \varphi=\frac{R\theta}{r}=\ \mathrm{m}\theta=\mathrm{n}\varphi \rightarrow \varphi=\frac{m\theta}{n}$

滾動點對外圓圓心為:

$$[(\left(\mathrm{R}-\frac{n}{m}R\right)\cos(\alpha+\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta-\alpha-\gamma\right)+a\cdot\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta-\alpha-\beta\right),$$

$$(\mathrm{R}-\frac{n}{m}R)\sin(\alpha+\theta)\ \ -\frac{1}{2}(a-b)\ \sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta-\alpha-\gamma\right)\ -a\cdot\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta-\alpha-\beta\right)]$$

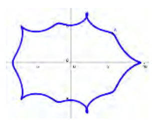
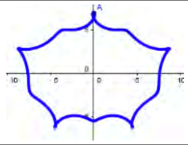
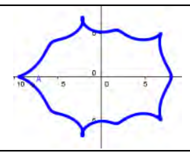
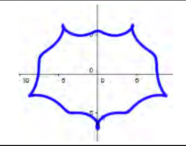
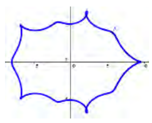
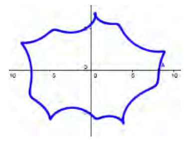
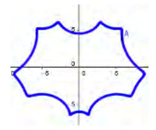
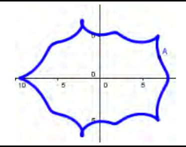
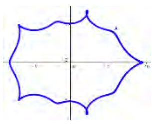
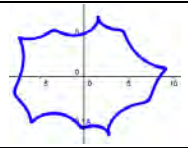
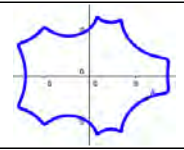
情形	α=0	α=90	α=180	α=270
$\beta=0$ $\gamma=0$				
情形	$\beta=0$	$\beta=45$	$\beta=90$	$\beta=180$
α=0 $\gamma=0$				
情形	$\gamma=0$	$\gamma=90$	$\gamma=180$	
$\alpha=0$ $\beta=0$				

（二）橢圓繞橢圓

<u>橢圓繞橢圓大致上與橢圓繞圓相同，唯一不同的只有內圓圓心相對於外橢圓的方程式：</u>

$$[(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta+\alpha)+b^2cos^2(\theta+\alpha)}}-\frac{1}{2}(a+b))\cos(\alpha+\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta-\alpha-\gamma\right)+a\cdot\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta-\alpha-\beta\right),$$

$$(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta+\alpha)+b^2cos^2(\theta+\alpha)}}-\frac{1}{2}(a+b))\sin(\alpha+\theta)\ \ -\frac{1}{2}(a-b)\ \sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta-\alpha-\gamma\right)\ -a\cdot a\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta-\alpha-\beta\right)]$$

情形	α=0	α=90	α=180	α=270
$\beta = 0$ $\gamma = 0$				
情形	$\beta = 0$	$\beta = 45$	$\beta = 90$	$\beta = 180$
α=0 $\gamma = 0$				
情形	$\gamma = 0$	$\gamma = 90$	$\gamma = 180$	
$\alpha = 0$ $\beta = 0$				

推導出方程式後，我們可以根據三個變因的角度去調整方程式，順序為 1 決定內圓擺放的位置 2 內橢圓旋轉的角度 3 筆插在橢圓上的位置，這樣就能畫出萬花尺的所有情形。

三、研究價值及應用

(一) 3D 列印能模擬與解決更多的問題

1. 畫出更多圖形

使用 3D 列印可以隨時隨地建模：

(1) 可以調整筆插，改變花瓣的形狀及呈現角度，配合我門用 geogebra 推出來的圖形設計實際的萬花尺。

(2) 設計出花瓣種類較多萬花尺外圓，我們知道外圓齒數的因數個數就是花瓣數的種類，若要研發，則可以選擇這些外圓齒數。

2. 圖形可應用在壁紙、地磚等裝飾上

3. 畫橢圓工具：藉著滾動圓半徑是被滾動圓的一半且動點會在滾動圓內時會形成橢圓的特性，做為畫橢圓的簡單工具，若動點到筆插的距離為 a，橢圓的長短軸半徑分別為 (r+a)、(r-a)。

4. 推測出出發時動點的位置，根據 α、β、γ 對圖形的影響，可以大致推測出動點地出發位置。

(二) 這次研究還沒仔細討論到的部分

1. 可製作並討論在直線滾動的萬花尺

2. 可製作並討論內滾的部分是其他多面體的萬花尺(在歷屆科展有出現過一篇(臺灣二ＯＯ 七年國際科學展覽會)，不過並不是用 3D 列印技術)

3. 其他模擬方程式的研發

我們找出的模擬方程式是用齒數代替周長，目前找到的四組方程式應該是最接近真實狀況的模擬，不過，也期待往後有新的發現或改進，讓我們的方程式更完美。

捌、參考資料及其它

1. 國中數學第五冊　圓

2. 高中數學第三冊　三角函數

2. 幾何學中的海倫　http://episte.math.ntu.edu.tw/

3.〈到底轉了幾圈？〉/101 學年度臺中市科展國中組第三名 /王毓謙

4.〈圓擺線花形的幾何基因〉/45 屆科展國小組第一名

5. Geogebra　幾何與代數的美麗邂逅

6.〈數學家的祕密花園-擺線作圖之研究〉

/55 屆全國科展國中組第三名/楊淳竣

7. 維基百科　橢圓　https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A4%AD%E5%9C%86

8.「圖形板」的圖形軌跡之探討及其延伸

/第三名　加拿大正選代表:加拿大 2007 年科學展覽會

/高雄市立五福國民中學　王羽安

【評語】030405

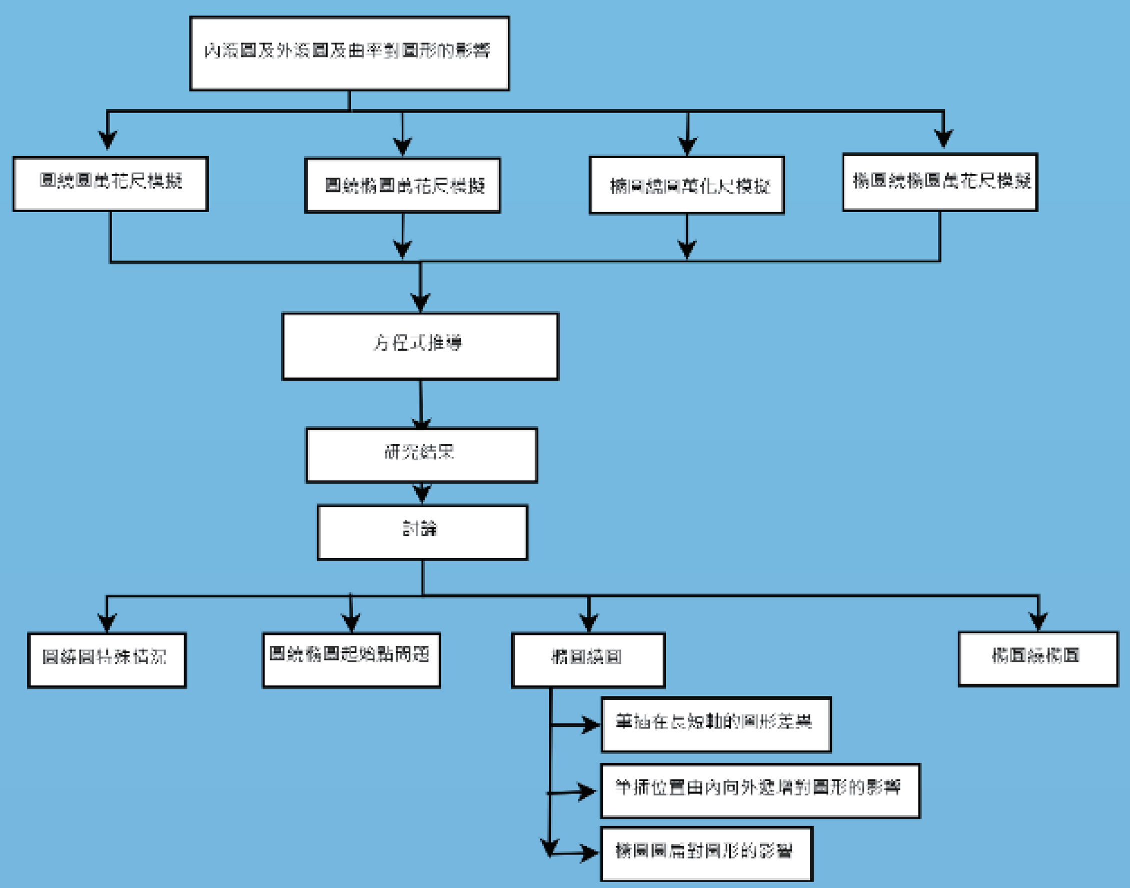
關於萬花尺作圖的討論。作者們針對圓繞橢圓、橢圓繞圓轉動時，萬花尺作圖的成像作了分析，給出了一些結果。這是一個延續性的研究結果。在先前的作品中，作者針對圓繞圓的萬花尺作圖問題作了分析。在本作品中，他們將問題進一步的延伸，考慮圓繞橢圓、橢圓繞圓的萬花尺作圖的成像問題，給出了一些結論。看起來是有一些新的結果，但好像沒有太多的新意，感覺上是把圓換成橢圓，沿襲之前的分析方式就會得出類似的結論，有點可惜。原始數年前的作品有實驗和建模的精神，本次作者加入了解析幾何的參數式分析，然則這些用標準的解析方法即可解決，可再增加創意的部分。

作品海報

壹、研究動機

上數學課的時候，老師說，學長之前科展研究萬花尺，用方程式和GeoGebra模擬了許多圖形，但馬上無法製作創新的萬花尺。今年，學校添購兩台中階的3D列印機，我們一致覺得可以好好的發展這個主題，因此，決定以創新萬花尺為主題，結合3D列印，製作和改造成新的萬花尺模型。

貳、研究工具及步驟



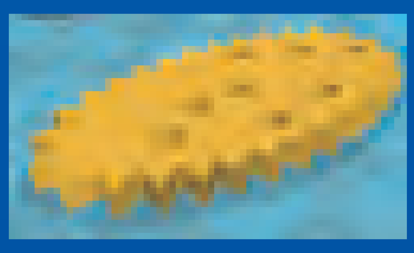
紙、筆、電子計算機、網路、萬花尺、GeoGebra

參、研究目的

一、找到兩圓轉動關係(萬花尺形成的關鍵原因)。
二、討論萬花尺的圖形與圓的關係
三、統整歸納出萬花尺方程式與圖形的關係
四、找出作圖工具的科學原理
五、用3D列印實現萬花尺的模擬推論

肆、研究過程

一、3D列印的應用



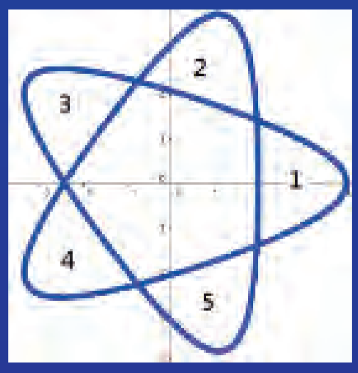
學校在去年買了3D的印表機，我們發現，其實可以用3D列印機來製作萬花尺。因為，之前討論萬花尺時有很多理論的圖形只能用GeoGebra跑出來，現在，應該可以製作成實際的萬花尺。

我用的是123D Design來製作模型，如右圖，我花上了一段時間去學習怎麼設計模型，在看了一些書和網頁之後，就開始著手設計，其中橢圓齒輪的設計上，不能像圓形，設計出一個齒輪，然後再讓它等距環繞圓周，所以在橢圓齒輪製作時是最辛苦的，要做一個三角柱，複製後再一一調整使其能嵌入橢圓裡。

畫圓之後再轉Cura，如右圖，調整好他的速度後最後在下指令讓3D列印機列印，在列印時我失敗很多次，做了很多調整，包括噴頭到平台的距離等等，最後終於做出了我要的模型。

(一)圓繞圓的特殊萬花尺

能控制的變因有：外圓齒數m(大圓半徑R相關)、內圓齒數n(內圓半徑r相關)、筆插位置a。



1. 利用內圓齒數，控制花瓣數量，盡量表現出所有可能花瓣數。由於齒數比不同，所以不同的內滾圓會有不同的花瓣數，花瓣數是根據最小公倍數計算。若外圓與內圓的最簡半徑比(齒數比)為A:B則花瓣數為A。繞行順序為1→1+B→1+2B……依序完成圖形。
2. 不同筆插能決定花冠位置及圖形的凹凸情形，但受限於小圓齒數(即小圓r的大小)所以不是能任意調整筆插的位置，模擬的部分倒是可以，這個我們在之後的討論會說明。

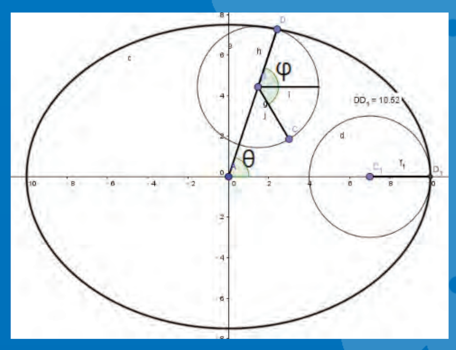
(二)圓繞橢圓

這邊的橢圓有一個問題是：橢圓的周長是一個複雜的無理數，裡面的圓周長和橢圓周長不會有有理數的倍數關係，萬花尺要如何運作呢？如果周長非有理數的倍數關係最後圖形一定被填滿，無法表現出花樣，因此關鍵在於齒數，我們用齒數取代了橢圓的周長。老師說，這是比較不純粹數學的地方，但我們的世界不正是如此，還是可以用數學描述我們觀察到的現象。

(1) 類橢圓方程式模擬

首先，我們用高中的橢圓方程式，$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 將橢圓的用參數 $P=(a\cos\theta，\ b\sin\theta)$ 帶入，$\overline{PO}$ 長度以R來表示為：

$$R=\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}$$



橢圓的半徑是一個變化的式子

$$R=\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}$$

設橢圓半徑為 $\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}$ ，內圓的半徑為 r 橢圓齒數 m 內圓齒數 n

C相對B→ $[r\cos\varphi,-r\sin\varphi]$

B相對A→ $[(\sqrt{a^2cos^2(\theta)+b^2sin^2(\theta)}-r)\cos\theta,$

$(\sqrt{a^2cos^2(\theta)+b^2sin^2(\theta)}-r)\sin\theta]$

利用之前的角度模擬：$\theta m=(\theta+\varphi)n$ → $\varphi=\frac{m-n}{n}\theta$

得到方程式：

$$\left(\sqrt{a^2cos^2(\theta)+b^2sin^2(\theta)}-r\right)\cos(\theta)+r\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),$$

$$\left(\sqrt{a^2cos^2(\theta)+b^2sin^2(\theta)}-r\right)\sin(\theta)-r\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$$

此圖形與機械作圖有 相當 的差異

後來我們將橢圓的半徑變化的式子調整利用極座標的方式寫出相對於中心的極坐標形式：

$$R=\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}$$

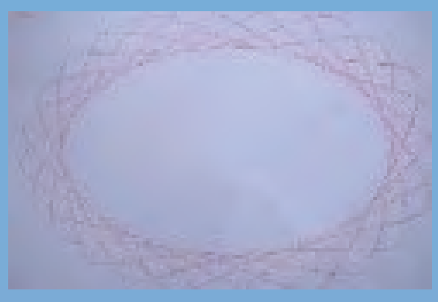
得到方程式：

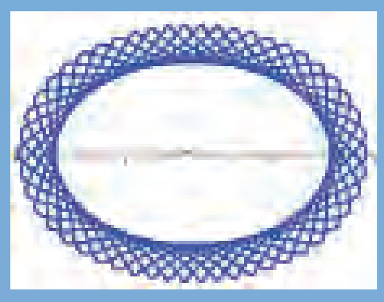
$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-r\right)\cos(\theta)+r\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),$$

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-r\right)\sin(\theta)-r\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$$

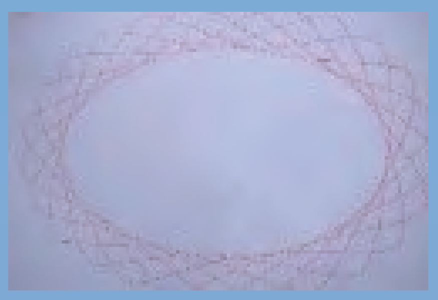
模擬後的圖形與機械作圖相仿，非常自然。

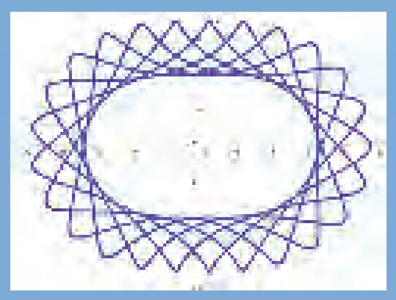
原本





更改





有了這個公式，我們大致可以進行創新萬花尺圖形及公式的討論了。

接下來，還有兩類以前未曾出現過得創新萬花尺討論：

(三)橢圓繞圓

以之前方程式的模擬為基礎，我們發現橢圓的圓心繞圓的狀態近似於擺線方程式，因為這部分細節比較多，我們模擬出結果後，會在討論的部分說明。

(四)橢圓繞橢圓

橢圓繞橢圓以橢圓繞圓為基礎，再進行模擬，而且要考慮起始點，這部分的細節我們也放在討論說明。

因為從創作萬花尺到用數學說明運作的原理之中有一段時間，為了表現模擬圖形的改變，我們在下個單元模擬的部分先以最初的模擬圖形，討論的部分我們再呈現最後的結果。

肆、研究結果

一、特殊圓繞圓萬花齒的具體實現

	齒數	筆插最外孔離圓心	筆插孔數	半徑	花瓣數
外圈	60			5	
A	10	0.5cm	1	0.9	6
B	15	1.0cm	2	1.3	4
C	18	1.0cm	2	1.5	10
D	19	1.5m	3	1.6	60
E	20	1.5cm	3	1.7	3
F	22	1.5cm	3	1.8	30
G	24	1.5cm	3	2	5
H	25	1.5cm	3	2	12
I	27	2.0cm	4	2.3	20
J	30	2.0cm	4	2.5	2
K	32	2.5cm	5	2.7	15
L	60				1

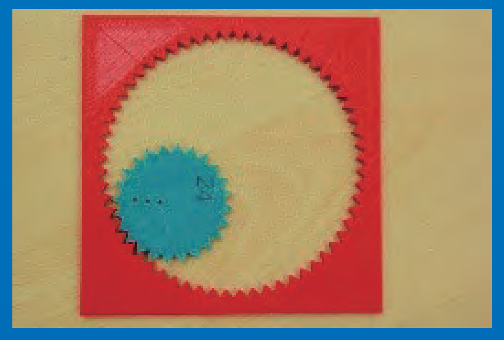
圓形外圈 60 齒

瓣數	可用內圓齒數
2	30
3	20、40
4	15、45
5	12、24、36、48
6	10、50
10	6、18、54
12	5、25、35、55
15	4、8、16、28、32、44、52、56
20	3、9、21、27、33、39、51、57
30	2、14、22、26、34、38、46
60	1、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59

實際繪圖情形如下表：

外圈 60 齒 內圈 24 齒 筆插數 3 花瓣數 5 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印手繪			
Geogebra 模擬			

外圈 60 齒 內圈 25 齒 筆插數 3 花瓣數 12 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印手繪			
Geogebra 模擬			

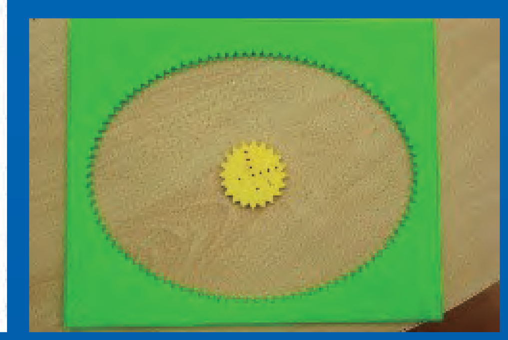


二、圓繞橢圓的3D列印萬花尺實作

橢圓繞圓的萬花尺，我們以外圈橢圓100齒為例子，一樣把內圈齒數所有可能形成的花瓣數找出來，圓繞橢圓的模擬方程式之前討論過，所以模擬的結果與我們製作出來的萬花尺圖形大致相同。

瓣數	可用內圓齒數
2	50
4	25、75
5	20、40、60、80
10	10、30、70
20	5、35、45、55、65、85、95
25	4、8、12、16、24、28、32、36、44、48、52、56、64、68、72、76、84、88、92、96
50	2、6、14、18、22、26、34、38、42、46、54、58、62、66、74、78、82、86、94、98
100	1、3、7、9、11、13、17、19、21、23、27、29、31、33、37、39、41、43、47、49、51、53、57、59、61、63、67、69、71、73、77、79、81、83、87、89、91、93、97、99

	齒數	筆插最外孔離圓心	筆插孔數	半徑	花瓣數
外圈	100			長軸 10 短軸 7.5	
A	18	1cm	2	1.5	50
B	19	1.5cm	3	1.6	100
C	20	1.5m	3	1.7	5
D	24	1.5cm	3	2.0	25
E	25	1.5cm	3	2.0	4
F	30	2.5cm	4	2.5	10
G	35	3	5	3	20
H	50	4.3cm	8	4.3	2
I	100				1

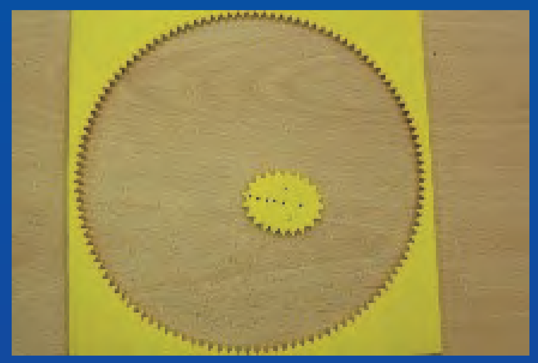


外圈 100 齒 內圈 35 齒 筆插數 5 花瓣數 20 筆插以 0.5 距離中心遞增					
筆插	1	2	3	4	5
3D 列印手繪					
Geogebra 模擬					

三、橢圓繞圓的3D列印萬花尺實作

橢圓繞圓的萬花尺在坊間目前還沒有看到，製作上並不困難，因此世界上應該有這樣的產品只是目前沒看到也沒有人討論。

	齒數	筆插孔數	長軸	短軸	花瓣數
外圓	120				
A	10	3	1	0.75	12
B	15	5	1.5	1.125	8
C	18	6	1.8	1.36	20
D	19	6	1.9	1.425	120
E	20	5	2	1.5	6
F	21	7	2.1	1.575	40
G	22	6	2.2	1.65	60
H	24	7	2.4	1.8	5
I	25	7	2.5	1.875	24
J	28	8	2.8	2.1	30
K	30	7	3	2.25	4
L	32	9	3.2	2.4	15
M	36	10	3.6	2.7	10
N	40	9	4	3	3
O	60	13	6	4.5	2
P	120				1



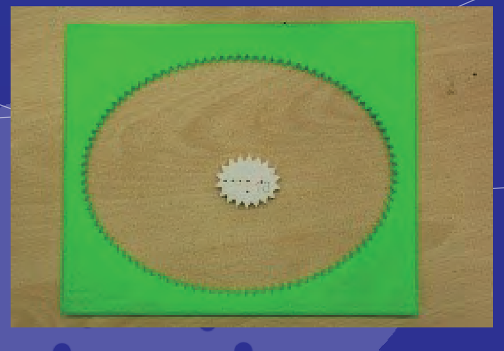
外圈 120 齒 內圈 21 齒 筆插數 7 花瓣數 40 筆插以 0.5 距離中心遞增							
筆插	中心	1	2	3	4	長軸一半	短軸一半
3D 列印手繪							
Geogebra 模擬							

四、橢圓繞橢圓的3D列印萬花尺實作

製作和模擬橢圓繞橢圓的萬花尺並不會特別困難，最主要是橢圓繞圓及圓繞橢圓已經把理論討論過一遍，所以在這個部分並沒有遭遇新的困難，例如橢圓繞橢圓方程式被繞橢圓的起始點等也都可以用前面討論過的方式來處理。

	齒數	筆插最外孔離圓心	筆插孔數	長軸	短軸	花瓣數
外圓	100			10	7.5	
	10			1	0.75	
A	18	1	2	1.8	1.35	50
B	19	1.5	3	1.9	1.425	100
C	20	1.5	3	2	1.5	5
D	24	2	4	2.4	1.8	25
E	25	2	4	2.5	1.875	4
G	35	3	6	3.5	2.625	20
H	50	4	8	5	3.75	2
I	100					1

外圈 100 齒 內圈 18 齒 筆插數 3 花瓣數 50 筆插以 0.5 距離中心遞增			
筆插	1	2	3
3D 列印手繪			
Geogebra 模擬			



伍、討論

一、圓繞圓的萬花尺作圖大致有以下問題：

(一) 只有1種花瓣數無法實現

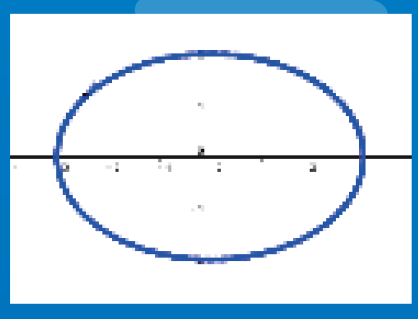
1. 當r=R，不可能完成
2. 其餘的花瓣數都可以改進3D繪圖方式來完成。

(二) 兩瓣的萬花尺可以作為畫橢圓的工具方程式為

$[r\cos(\theta)+a\cdot a\cos(\theta)，r\sin(\theta)-a\cdot\sin(\theta)]$

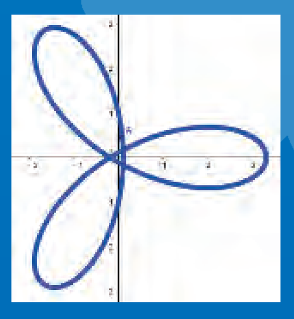
$= [(r+a)\cos(\theta)，(r-a)\sin(\theta)]$

可以為畫橢圓工具尺

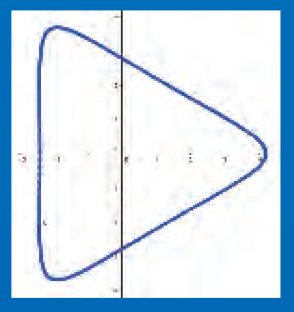


花瓣的凹向性及花冠位置及圖形中間聚焦成一點的時機花瓣的凹向性取決於筆插的位置。

1. 當 R>r≧1/2R（如右圖）
因為內圓較大，筆插移動的範圍要較廣。



2. 當 1/2R>r>0（如右圖）
因為內圓較小，所以筆插的移動的範圍比較侷限於靠近外圓的地方。



以下為筆插位置對圖形影響的分析：

狀態	a=0	r>a>0	漸漸增大	a=r
1. $r>\frac{1}{2}R$				
情形：	圓形	內凹許多	稍微內凹	最尖
2. $r<\frac{1}{2}R$				
情形：	圓形	較原	較尖	最尖

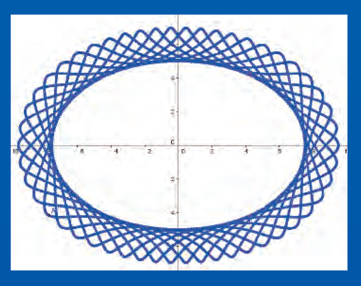
3. 圖形中間聚焦成一點的時機就是R=r+a。

二、圓繞橢圓萬花尺

(一) 模擬的方式為橢圓的周長用齒數代替橢圓的半徑以極座標表示所得到方程式：

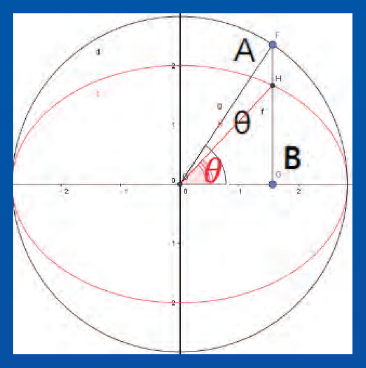
$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}-r\right)\cos(\theta)+r\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),$$

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2sin^2(\theta)+b^2cos^2(\theta)}}\right)-r)\sin(\theta)-r\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$$



模擬後的圖形與機械作圖相仿，非常自然

1. 我推測原來的參數方程式θ是指圓的θ
2. 真正的θ應該是橢圓上的點與原點連線與X軸的夾角所以橢圓的半徑應該以極座標表示，這樣θ才能統一。



(二) 特別要注意起始點的位置，其餘的部分與圓繞圓大致相同

從長軸出發	從長短軸一半出發	從短軸出發

這邊起始點的筆插位置定義為距離外圓的最短距離

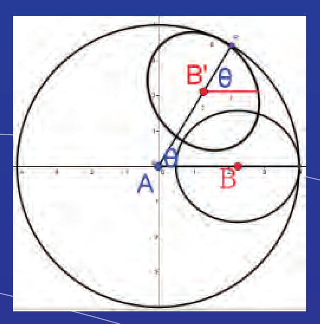
從上圖紅色圈起來處可以看出花瓣轉折處在曲率小(長軸)的地方較尖，曲率大(短軸)的地方較圓。

三、 橢圓繞圓萬花尺(關鍵在於橢圓的中心呈圓擺線狀態)

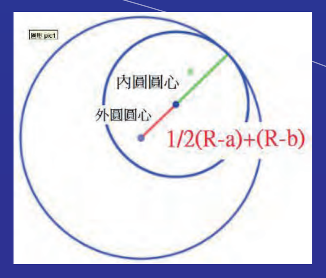
(一) 我們發現橢圓繞圓的圓心呈現圓繞圓擺線的狀態

我們觀察模型，發現了以下重點：

1. 動點的滾動範圍界在：外圓半徑-長軸(R-a) 與 外圓半徑- 短軸(R-b) 之間



2. 由1可推得：內圓圓心介在離對應到的外圓圓心 $\frac{(R-b)+(R-a)}{2}$ 的地方



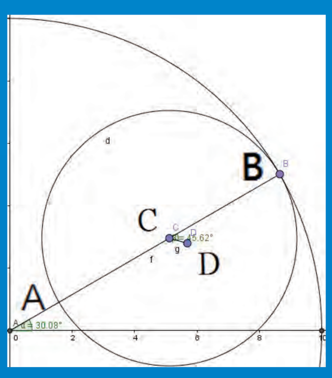
3. 筆插a值為：$\frac{(R-b)+(R-a)}{2}-(R-a)=\frac{1}{2}(a-b)$

由以上4點我們可以推得橢圓圓心的擺線方程式為

D相對C →$(\frac{1}{2}(a-b)\cos(\varphi)$，$-\frac{1}{2}(a-b)\sin(\varphi))$

C相對A →$((R-\frac{n}{m}R)\cos(\theta), (R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta))$

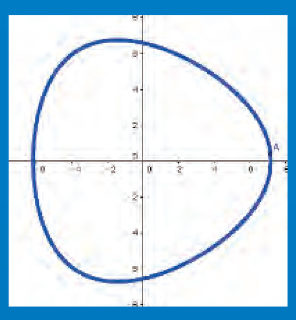
$r=\frac{n}{m}R$　$\varphi=\frac{m-n}{n}\theta$ 橢圓中心的方程式為：



$$\left(\left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),\right.$$

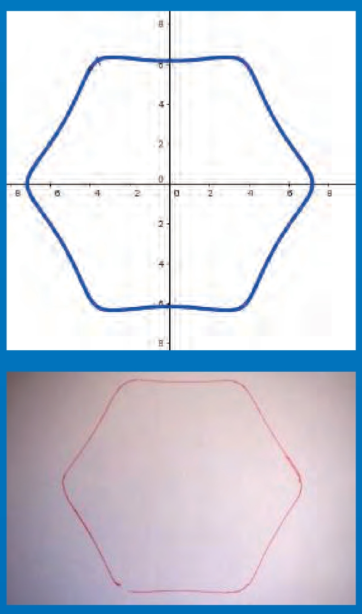
$$\left.(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta)-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)\right)$$

但畫出的圖形竟然和實際的圖形半數不同（如圖）這件事情煩惱了我們許久，後來我們發現橢圓中心離外圓的距離是以半圓為一個週期，所以內圓齒數要除以2。



$$\left[\left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right),\right.$$

$$\left.(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)\right]$$



更改後模擬出來的圖形非常相似

（二）加入筆插不在橢圓中心點的方程式推導

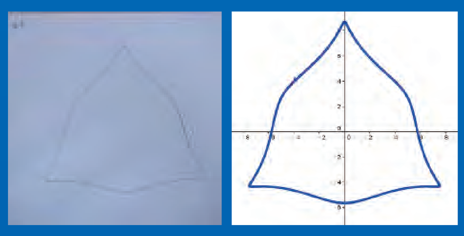
我們假設橢圓上的筆插是以圓的方式圍繞著橢圓中心旋轉

筆插相對於橢圓中心：$[a\cos(\frac{m-n}{n}\theta)$，$-a\sin(\frac{m-n}{n}\theta)]$

因為筆插是以圓的方式旋轉，所以橢圓的齒數不須除以2加入筆插後方程式

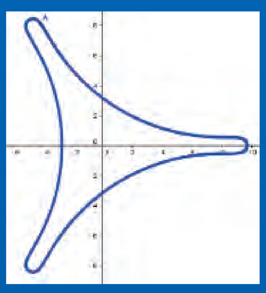
$$\left[\left(\left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)+a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)\right)\right]$$

$$\left[(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta)-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)-a\sin(\frac{m-n}{n})\theta\right]$$

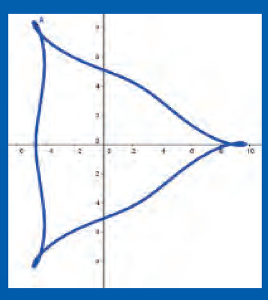


（三）筆插位置不同的問題

1. 筆插在長短軸造成圖形的不同說明：
   外筆插位置不同，相對於外圓距離的變化也不同，所以花瓣的形狀會有明顯的不同。
2. 固定筆插與外圓的最短距離

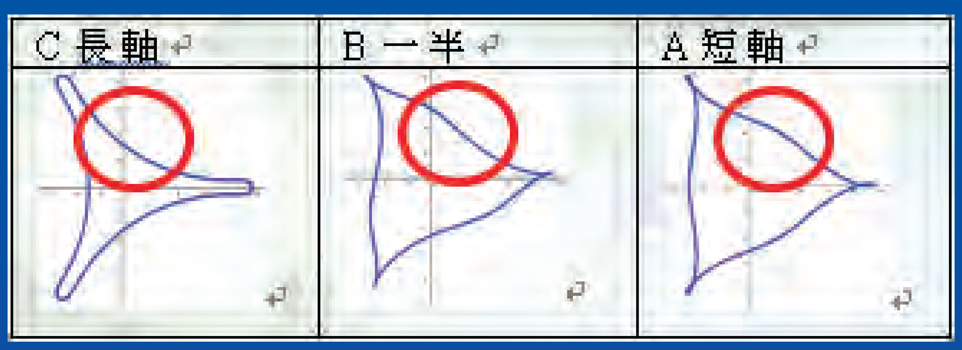


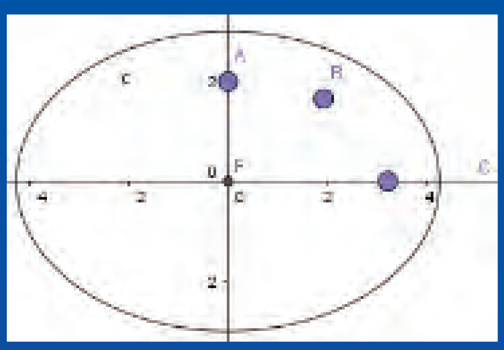
←長軸



→短軸

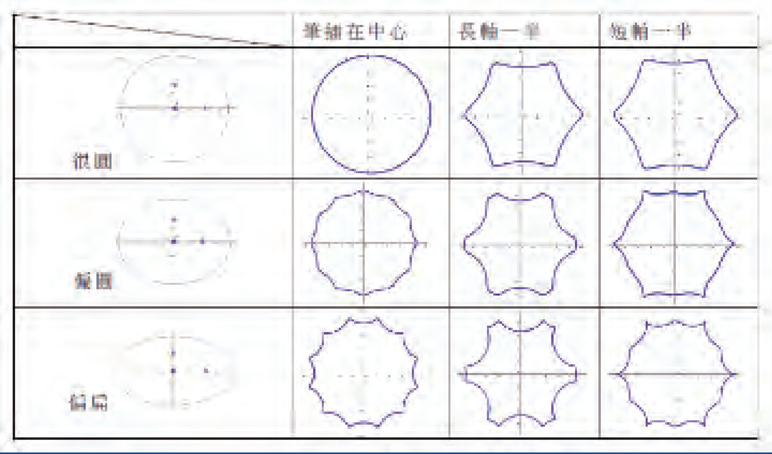
這三個圖在圈起來的地方有明顯的差異，筆插在長軸時相對圓外圓的距離變化大致與圓繞圓相同，而筆插在短軸時，是由短到長再到短一直循環，而筆插在短軸畫出來的圖形會有微微的禿起是因為筆插相對於外圓的距離變化是由最短-稍微變長-稍微變短-稍微變長-最短，稍微變短的那一段就是造成圖形禿起的原因。





（四）橢圓長軸與短軸比例對圖形的影響 **(橢圓圓扁)**

以相同齒數周長比較：較扁的橢圓因為半徑的變化上較大，導致圖形比較尖銳。



四、橢圓繞橢圓萬花尺 **橢圓繞橢圓方程式推導**

基本上，橢圓繞橢圓的方程式是根據圓繞橢圓及橢圓繞圓的理論來推算，以下是我們的作法：

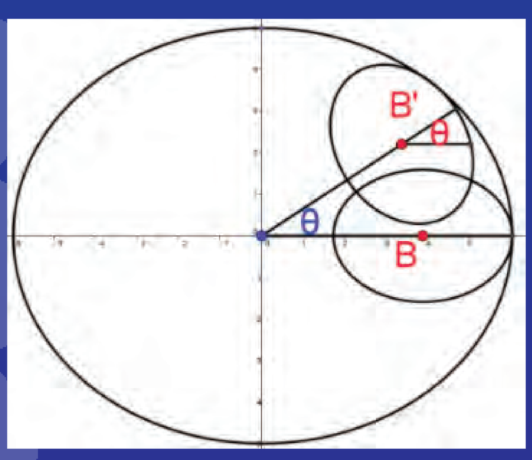
內橢圓圓心相對於外橢圓圓心：

$$\left[\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\cos(\theta), -\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\sin(\theta)\right]$$

在這裡我們以內橢圓長軸與短軸的平均作為我們假設的內圓半徑

橢圓圓心向對於內圓：

$$\left[\left(\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right), -\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)\right)\right]$$



橢圓筆插相對於橢圓圓心：

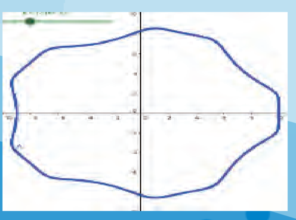
$$\left[a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right), -a\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)\right]$$

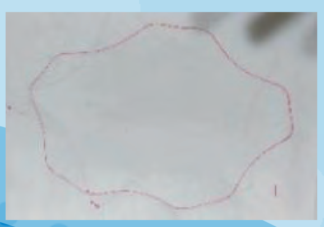
橢圓繞橢圓方程式：

$$\left[\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)+a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\sin(\theta)-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)-a\sin(\frac{m-n}{n})\theta\right]$$

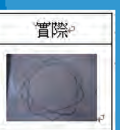
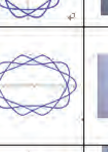
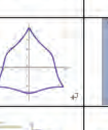
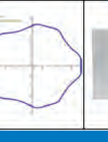
如右圖，橢圓繞橢圓的公式作圖的結果與實際圖形非常相同





陸、結論

一、擺線模擬公式能清楚說明萬花尺運作方式

類型	方程式	模擬	實際
圓繞圓	$[(R-r)\cos(\theta)+r\cos(\frac{M-N}{N}\theta), (R-r)\sin(\theta)-r\sin(\frac{M-N}{N}\theta)]$		
圓繞橢圓	$[(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}})-r)\cos(\theta)+r\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$, $(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}})-r)\sin(\theta)-r\sin(\frac{m-n}{n}\theta)]$		
橢圓繞圓	$[\left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)+a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$, $(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)-a\sin(\frac{m-n}{n})\theta]$		
橢圓繞橢圓	$[(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b))\cos(\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)+a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta\right)$, $(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}}-\frac{1}{2}(a+b))\sin(\theta)-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta\right)-a\sin(\frac{m-n}{n})\theta]$		

二、作圖初始值（開始擺放位置）：α、β、γ對圖形的影響

以橢圓為內滾圓時會有三個變因

(1) α：起始點-內圓從外圓的哪個位置出發

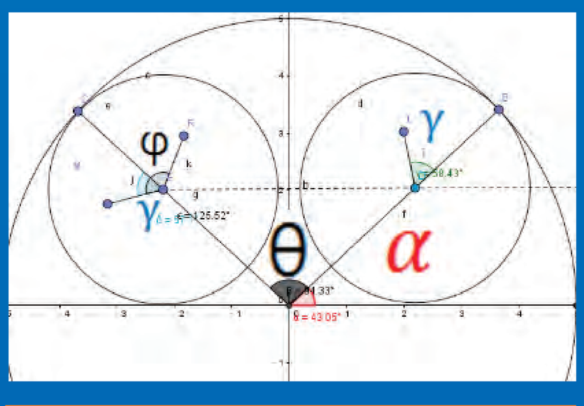
(2) β：筆插相對於起始點的位置

(3) γ：筆插位於內圓的擺放方式

（入內圓為圓形則不具效果）

（一）橢圓繞園

我先從解決起始點及內圓擺放方式開始



橢圓圓心相對外圓圓心

設一開始內圓圓心對外圓圓心的角度是α°，動點對內圓圓心的角度是γ°滾動圓轉動角度為θ，被滾動圓被滾動的角度為φ。

橢圓圓心相對於內圓圓心為：

$$\frac{1}{2}(a-b)\cos(\varphi-\theta-\alpha-\gamma)，-\frac{1}{2}(a-b)\sin(\varphi-\theta-\alpha-\gamma)$$

內圓圓心對外圓圓心為：

$$\left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\theta+\alpha)，(R-\frac{n}{m}R)\sin(\theta+\alpha)$$

接著是筆插的位置

筆插相對於橢圓中心：

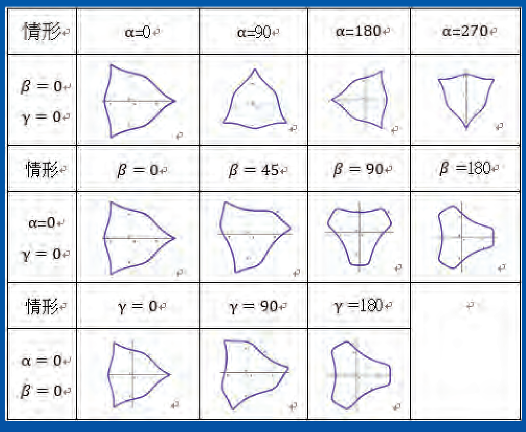
$$(a\cos(\varphi-\theta-\alpha-\beta)，-a\sin(\varphi-\theta-\alpha-\beta)$$

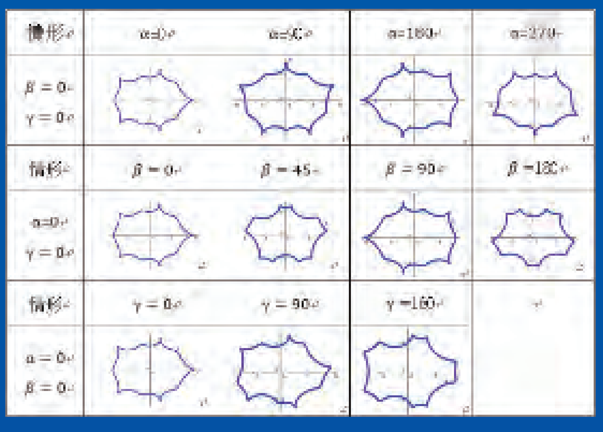
滾動距離相等：$R\theta=r\varphi\rightarrow\varphi=\frac{R\theta}{r}=m\theta=n\varphi\rightarrow\varphi=\frac{m\theta}{n}$

滾動點對外圓圓心為：

$$\left[\left(\left(R-\frac{n}{m}R\right)\cos(\alpha+\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta-\alpha-\gamma\right)+a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta-\alpha-\beta\right),\right.\right.$$

$$\left.(R-\frac{n}{m}R)\sin(\alpha+\theta)-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta-\alpha-\gamma\right)-a\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta-\alpha-\beta\right)\right]$$





（二）橢圓繞橢圓

橢圓繞橢圓大致上與橢圓繞圓相同，唯一不同的只有內圓圓心相對於外橢圓的方程式：

$$\left[\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta+\alpha)+b^2\cos^2(\theta+\alpha)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\cos(\alpha+\theta)+\frac{1}{2}(a-b)\cos\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta-\alpha-\gamma\right)+a\cos\left(\frac{m-n}{n}\theta-\alpha-\beta\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta+\alpha)+b^2\cos^2(\theta+\alpha)}}-\frac{1}{2}(a+b)\right)\sin(\alpha+\theta)-\frac{1}{2}(a-b)\sin\left(\frac{m-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\theta-\alpha-\gamma\right)-a\sin\left(\frac{m-n}{n}\theta-\alpha-\beta\right)\right]$$

三、研究價值及應用

(一)3D列印能模擬與解決更多的問題

1. 畫出更多圖形
   使用3D列印可以隨時隨地建模：
   (1) 可以調整筆插，改變花瓣的形狀及呈現角度，配合我們用geogebra推出來的圖形設計實際的萬花尺。
   (2) 設計出花瓣種類較多萬花尺外圓，我們知道外圓齒數的因數個數就是花瓣數的種類，若要研發，則可以選擇這些外圓齒數。
2. 圖形可應用在壁紙、地磚等裝飾上
3. 畫橢圓工具：藉著滾動圓半徑是被滾動圓的一半且動點會在滾動圓內時會形成橢圓的特性，做為畫橢圓的簡單工具，若動點到筆插的距離為a，橢圓的長短軸半徑分別為 (r+a)、(r-a)。
4. 推測出出發時動點的位置，根據 α、β、γ 對圖形的影響，可以大致推測出動點地出發位置。

(二)這次研究還沒仔細討論到的部分

1. 可製作並討論在直線滾動的萬花尺
2. 可製作並討論內滾的部分是其他多面體的萬花尺(在歷屆科展有出現過一篇(臺灣二〇〇七年國際科學展覽會)，不過並不是用3D列印技術)
3. 其他模擬方程式的研發
   我們找出的模擬方程式是用齒數代替周長，目前找到的四組方程式應該是最接近真實狀況的模擬，不過，也期待往後有新的發現或改進，讓我們的方程式更完美。

柒、參考資料