中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030404

一刀切圓－探討多圓切割面積比

學校名稱：高雄市立正興國民中學

作者：	指導老師：
國二 張朝威	郭珊彤

關鍵詞：圓面積、比例

摘要

本研究靈感來自 2013 澳洲數學能力測驗中級卷第 22 題，我們發現直線 L 分割互相外切的兩圓，其無陰影面積與有陰影面積形成固定之比例關係。於是我們繼續探討直線 L 分割多個圓時，第 k 個圓與第一個圓的面積關係，得知圓的個數（k 為奇數或偶數）會影響其比例，無陰影面積及有陰影面積皆存在半徑平方比的關係。接著，我們將總陰影部分面積固定，探討其與第一個圓之面積比例關係，並利用數學歸納法整理出關係式。

最後，我們改變直線，利用折線來進行分割，進一步探討其面積比例關係，並進一步延伸至球體，發現平面切割多個球時，第 k 個球與第一個球無陰影部分及有陰影部分的體積亦存在半徑立方比的關係。

壹、 研究動機

在台灣網路科教館全國中小學科展作品中搜尋「圓」、「切割」，發現探討的問題大部分都與正方形、三角形、多邊形或錐體有關，且一般探討圓切割的問題也多半圍繞在 1 到 3、4 個圓。

所以，看到 2013 澳洲數學能力測驗中級卷第 22 題：「半徑分別為 1 與 2 的二個圓互相外切於點 P。一條經過點 P 的直線將這二個圓所圍成的區域分割為面積比為 1：2（如圖 1 中陰影部分：無陰影部分）的二塊。請問此直線將小圓分割成二塊的面積比（圖 1 中無陰影部分：陰影部分）是什麼？」，這個問題引起我想探索在 k 個兩兩相切圓中，一條直線分割 k 個圓所圍成無陰影與有陰影兩部分的面積，對第一個圓所圍成的無陰影與有陰影兩部分之面積，是否有規則可以依循？於是我便從此題進行發想，並與老師開始討論，從兩個圓至 k 個圓的面積逐一推導，進而討論圓與割線所造成之無陰影部分與有陰影部分之面積比例關係。

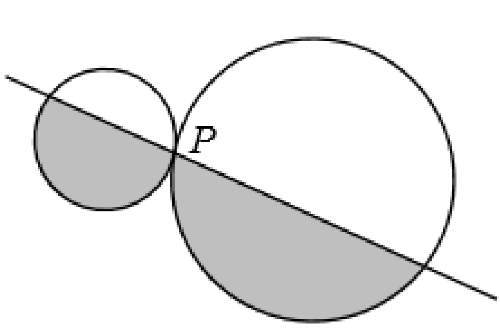


圖 1　2013 年澳洲數學能力測驗(AMC)中級卷第 22 題直線分割兩圓

貳、 研究目的

一、　原題幹之解題想法說明及證明。

二、　探討直線分割多圓，各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。

三、　探討直線分割多圓，有陰影及無陰影部分的面積總和與第一個圓的面積比例關係。

四、　探討折線分割多圓，各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。

五、　探討平面切割多球，各球與第一個球的無陰影部分及有陰影部分之體積比例關係。

參、 研究設備及器材

電腦、GeoGebra 軟體、小畫家

肆、 名詞釋義

一、　弦：連接圓上任意兩點的線段稱為「弦」。

二、　弧：圓上任意兩點間的部分稱為「圓弧」，符號為「⌒」。大於半圓的弧稱為「優弧」，小於半圓的弧稱為「劣弧」。

三、　垂徑定理：垂直於弦的直徑平分這條弦，並且平分弦所對的兩個弧。

四、　弦心距：圓心到弦的距離。一弦的弦心距必垂直平分此弦。

五、　割線 ： 一圓中，直線與弧有兩個公共點，則稱此直線為此圓的割線。

六、　$\begin{cases} \text{上取整函數} \lceil x \rceil = min\{n \in \mathrm{Z} | n \leq x\} \\ \text{下取整函數} \lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathrm{Z} | n \leq x\} \end{cases}$

上取整函數

$$\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2 = 2 \times 1 + 1 \text{、} \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3 = 2 \times 2 + 1 \text{、} \left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4 = 2 \times 3 + 1 \text{、}$$

$$\left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = 5 = 2 \times 4 + 1 \text{、} \left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil = 6 = 2 \times 5 + 1 \cdots \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil = 2 \times i + 1 \text{，} i = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$$

下取整函數

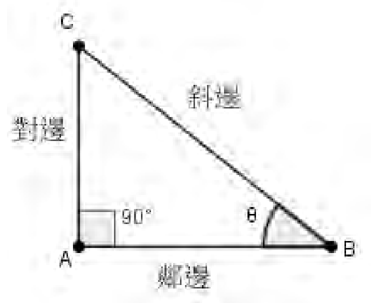
$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1 \text{、} \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2 \text{、} \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3 \text{、} \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4 \text{、} \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor = 5 \cdots \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = 2 \times i \text{，} i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

七、　三角函數定義：

直角ΔABC中，$\angle ABC=\theta$

正弦是對邊與斜邊的比值，$\sin\theta=\frac{對邊}{斜邊}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

餘弦是鄰邊與斜邊的比值，$\cos\theta=\frac{鄰邊}{斜邊}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$



八、　三角函數性質：已知兩角分別爲α、β

和角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

倍角公式：$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

伍、 研究過程與結果

一、　原題幹之解題想法說明及證明。

命題：「如果兩圓相切，那麼過切點的直線將兩圓分成的兩個部分相似」

這是數學傳播季刊 30 卷 2 期探討圓之吻問題的文獻中，提到數學家帕普斯所知道的命題之一。

令直線 L 爲圓O_1與圓O_2的割線，且圓O_1與圓O_2相切於 P 點（即爲切點 P）。直線 L 切割圓O_1，且與圓O_1相交於 A、P 兩點；直線 L 切割圓O_2，且與圓O_2相交於 B、P 兩點。圓O_1中，作$\overline{O_1H_1}\perp\overline{AP}$於$H_1$，圓$O_2$中，作$\overline{O_2H_2}\perp\overline{PB}$於$H_2$。圓$O_1$的半徑爲$r_1$，圓$O_2$的半徑爲$r_2$。前面的敘述如圖 2，我們想要證明$\Delta O_1PA\sim\Delta O_2PB$，用來說明命題。

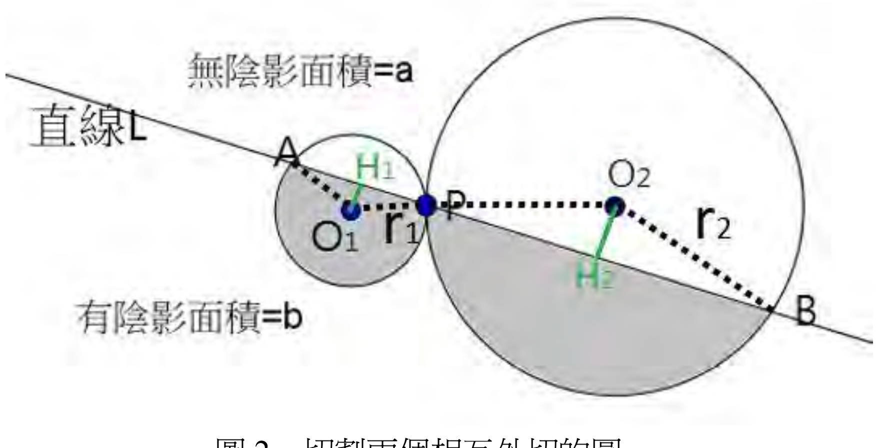


圖 2　切割兩個相互外切的圓

證明：

(一) ΔO_1PA中，因爲$\overline{O_1P}=\overline{O_1A}=r_1$，所以$\Delta O_1AP$爲等腰三角形。同理，$\Delta O_2PB$中，因爲$\overline{O_2P}=\overline{O_2B}=r_2$，所以$\Delta O_1BP$也爲等腰三角形。

(二) 直線L切割圓O_1，與圓O_1相交於A、P兩點，且作$\overline{O_1H_1}\perp\overline{AP}$於$H_1$，因此$\overline{O_1H_1}$爲圓$O_1$的弦心距。由垂徑定理與弦心距性質可知，$\overline{O_1H_1}\perp\overline{AP}$，所以$\Delta O_1PH_1$爲直角三角形。同理，直線$L$切割圓$O_2$，與圓$O_2$相交於$P$、$B$兩點，且作$\overline{O_2H_2}\perp\overline{PB}$於$H_2$，因此$\overline{O_2H_2}$爲圓$O_2$的弦心距。由垂徑定理與弦心距性質可知，$\overline{O_2H_2}\perp\overline{PB}$，所以$\Delta O_2PH_2$也爲直角三角形。

(三) 在ΔO_1PH_1、ΔO_2PH_2中，$\angle O_1H_1P=\angle O_2H_2P=90°$，

$\angle O_2PH_2=\angle O_1PH_1$（對頂角）

$\therefore \Delta O_1PH_1\sim\Delta O_2PH_2$（AA 相似性質）

(四) $\because\Delta O_1PH_1$、ΔO_2PB爲等腰三角形，$\angle O_2PB=\angle O_1PA$（對頂角）

在ΔO_1PA、ΔO_2PB中，$\angle O_2PB=\angle O_1PA$（對頂角），又$\Delta O_1PA$、$\Delta O_2PB$爲等腰三角形，所以$\begin{cases}\angle O_2PB=\angle O_2BP\\ \angle O_1PA=\angle O_1BA\end{cases}$故$\Delta O_1PA\sim\Delta O_2PB$（AA 相似性質）。

(五) $\because\Delta O_1PA\sim\Delta O_2PB$，$\therefore\angle PO_2B=\angle PO_1A$，且$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\frac{r_2}{r_1}$。

$\because\Delta O_1PH_1\sim\Delta O_2PH_2$，$\therefore\frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{O_1H_1}}=\frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}}=\frac{r_2}{r_1}$。

所以，由上述可以得到$\frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{O_1H_1}}\times\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}}=\frac{r_2}{r_1}\times\frac{r_2}{r_1}=(\frac{r_2}{r_1})^2$

(六) $\because\angle PO_2B=\angle PO_1A$，圓$O_1$中的劣弧與圓心所圍成的扇形面積與圓$O_2$中的劣弧與圓心所圍成的扇形面積之比爲

$$\frac{\pi\times{r_2}^2\times\left(\frac{\angle PO_2B\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)}{\pi\times{r_1}^2\left(\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)}=(\frac{r_2}{r_1})^2$$

(七) 直線L切割圓O_1與圓O_2，由(一)$\overline{PB}$所圍成區域的面積之比爲

$$\frac{\pi\times{r_2}^2\times\left(\frac{\angle PO_2B\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_2H_2}\times\overline{PB}\right)}{\pi\times{r_1}^2\left(\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}\right)}$$

$$=\frac{(\frac{r_2}{r_1})^2\times\pi\times{r_1}^2\left(\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\times(\frac{r_2}{r_1})^2\times\left(\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}\right)}{\pi\times{r_1}^2\left(\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}\right)}$$

$$=\frac{(\frac{r_2}{r_1})^2\times\left\{\pi\times{r_1}^2\left(\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}\right)\right\}}{\pi\times{r_1}^2\left(\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}\right)}=(\frac{r_2}{r_1})^2$$

結論：由證明(一)～(七)說明「如果兩圓相切，那麼過切點的直線將兩圓分成的兩個部分個相似」此命題。也就是說，直線 L 切割相切的兩圓，第一個圓中較小的區域面積會與第二個圓中較小的區域面積相似且有固定比例存在。

二、 探討直線分割多圓，各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。

如果已知直線分割第一個圓有陰影與無陰影區域的面積，爲了想要知道直線分割第 k 個圓有陰影與無陰影區域的面積，我們先說明圓彼此相切的位置關係（如圖 3 所示），接著我們從兩個圓開始探討至 k 個圓。

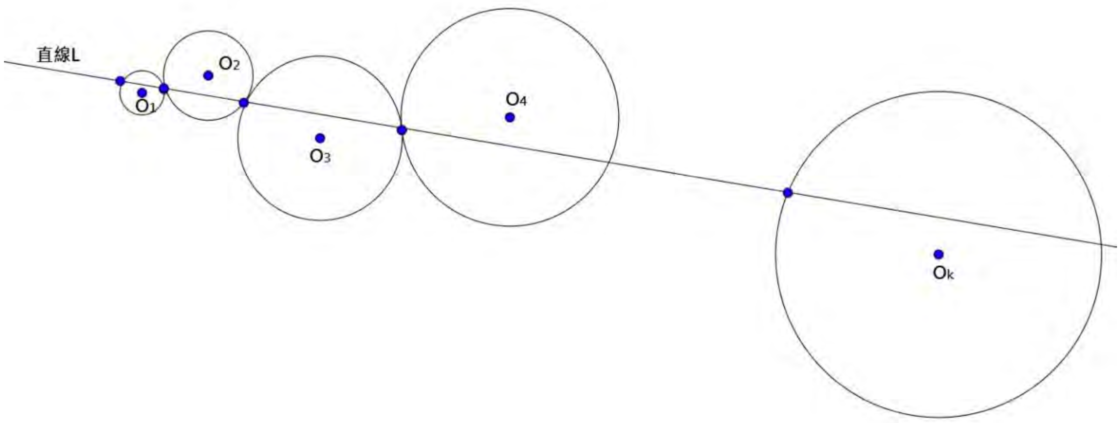


圖 3　割線與 k 個圓相切的位置關係

(一) 兩個圓互相相切，第 2 個圓和第 1 個圓有陰影、無陰影部分的面積關係

直線分割兩個相切的圓，我們假設第 1 個圓O_1中有陰影、無陰影的面積，推導第 2 個圓O_2有陰影、無陰影面積與第 1 個圓O_1的關係。

證明：

第 2 個圓O_2中有陰影部分的面積

1. 令第 1 個圓O_1中無陰影的面積爲 a，

$a=\pi\times {r_1}^2\left(\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}\right)$(扇形面積−三角形面積)，

第 2 個圓中有陰影部份爲$\pi\times {r_2}^2\times\left(\frac{\angle PO_2B\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_2H_2}\times\overline{PB}\right)$

2. 因爲$\angle BO_2P=\angle AO_1P$，所以

$$\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}=\frac{\angle PO_2B\text{所對的弧度}}{2\pi}=\frac{a+\frac{\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}}{2}}{\pi {r_1}^2}$$

3. 由(1)、(2)知第 2 個圓O_2中，有陰影部分的面積爲

$$\pi\times {r_2}^2\times\left(\frac{\angle PO_2B\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_2H_2}\times\overline{PB}\right)$$

$$=\pi r_2^2\times\frac{a+\frac{\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}}{2}}{\pi {r_1}^2}-\frac{\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)}{2}=\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2}\left(a+\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}\right)-\frac{{r_2}^2}{2{r_1}^2}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)$$

$$=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2a+\frac{{r_2}^2}{2{r_1}^2}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)-\frac{{r_2}^2}{2{r_1}^2}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2a$$

第 2 個圓$\boldsymbol{O_2}$中，無陰影部分的面積

1. 令第 1 個圓O_1中有陰影部分爲 b，

$$b=\pi {r_2}^2\times\frac{\text{優弧}AO_1P\text{之對應角}}{2\pi}+\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}, \text{優弧}AO_1P\text{之對應角}=360^\circ-\angle BO_2P$$

2. 第 2 個圓O_2中，無陰影部分的面積爲

$$\begin{aligned}
&\pi\times {r_2}^2\times\frac{\text{優弧}AO_1P\text{之對應角}}{2\pi}+\frac{\overline{BP}\times\overline{O_2H_2}}{2}\\
&=\pi\times {r_2}^2\times\frac{b-\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}}{\pi {r_1}^2}+\frac{\left(\overline{BP}\times\overline{O_2H_2}\right)}{2}\\
&=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left(\frac{b-\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}}{\pi {r_1}^2}\right)+\frac{\left(\overline{BP}\times\overline{O_2H_2}\right)}{2}\\
&=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left(b-\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}\right)+\frac{\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)}{2}\\
&=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b-\frac{{r_2}^2}{2{r_1}^2}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)+\frac{{r_2}^2}{2{r_1}^2}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b
\end{aligned}$$

結論：假設第 1 個圓O_1中無陰影面積爲 a、有陰影面積爲 b，則第 2 個圓O_2中，

$$\begin{cases}\text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b\\ \text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$$

(二) 三個圓相切，第 3 個圓和第 1 個圓有陰影、無陰影部分的面積關係

透過直線切割兩相切圓所得到的結果，假設第 1 個圓O_1中有陰影、無陰影的面積，推導第 3 個圓O_3有陰影、無陰影面積與第 1 個圓O_1的關係，如圖 4 所示。

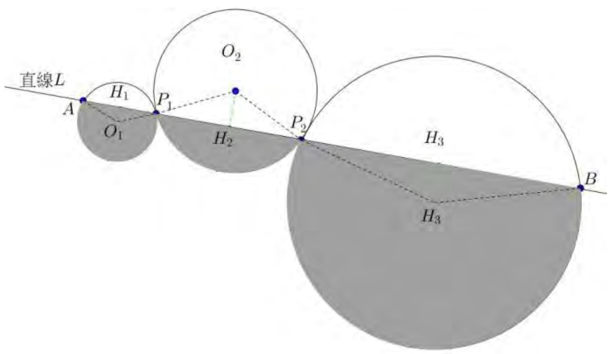


圖 4　切割三個相互相切的圓

第 3 個圓$\boldsymbol{O_3}$有陰影、無陰影面積

1. 由圖 4 知，觀察圓O_1、圓O_2，假設圓$O_1\begin{cases}\textbf{無陰影面積}\text{爲}a\\ \textbf{有陰影面積}\text{爲}b\end{cases}$，

   則圓$O_2\begin{cases}\textbf{無陰影面積}\text{爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b\\ \textbf{有陰影面積}\text{爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$

2. 續上，觀察圓O_2、圓O_3，透過前述推導兩個圓的部分，則我們可以得知

圓O_3 $\begin{cases}\textbf{無陰影的部分}\text{爲}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]a=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a\\ \textbf{有陰影的部分}\text{爲}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]a=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$，其中$r_3$爲圓$O_3$半徑

結論：假設第 1 個圓O_1中無陰影面積爲 a、有陰影面積爲 b，則第 3 個圓O_3中，

$$\begin{cases}\textbf{無陰影的部分}\text{爲}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]a=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a\\ \textbf{有陰影的部分}\text{爲}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]a=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$$

(三) k 個圓相切，第 k 個圓和第 1 個圓有陰影、無陰影部分的面積關係

透過前面推導觀察，我們發現圓的個數爲奇數或是偶數會影響最後一個圓與第一個圓相互對應的有陰影面積與無陰影面積。因此，我們推導 k 個圓相切時，必須分別探討圓的個數爲奇數或是偶數情況。

首先，令直線 L 爲圓O_1、圓O_2、、與圓O_k、圓O_{k+1}的割線，且圓O_1與圓O_2相切於P_1點（即爲切點P_1）。直線 L 切割圓O_1，且與圓O_1相交於 A、P_1兩點；直線 L 切割圓O_2，且與圓O_2相交於P_1、P_2兩點、、依此類推；直線 L 切割圓O_k，且與圓O_k相交於P_{k-1}、P_k兩點；直線 L 切割圓O_{k+1}，且與圓O_{k+1}相交於P_k、B 兩點。圓O_k中，過圓心與$\overline{P_{k-1}P_k}$相交於點H_k，圓O_{k+1}中，過圓心與$\overline{P_kB}$相交於點H_{k+1}。圓O_1的半徑爲r_1，圓O_2的半徑爲r_2，圓O_k的半徑爲r_k，圓O_{k+1}的半徑爲r_{k+1}，如圖 5 所示。

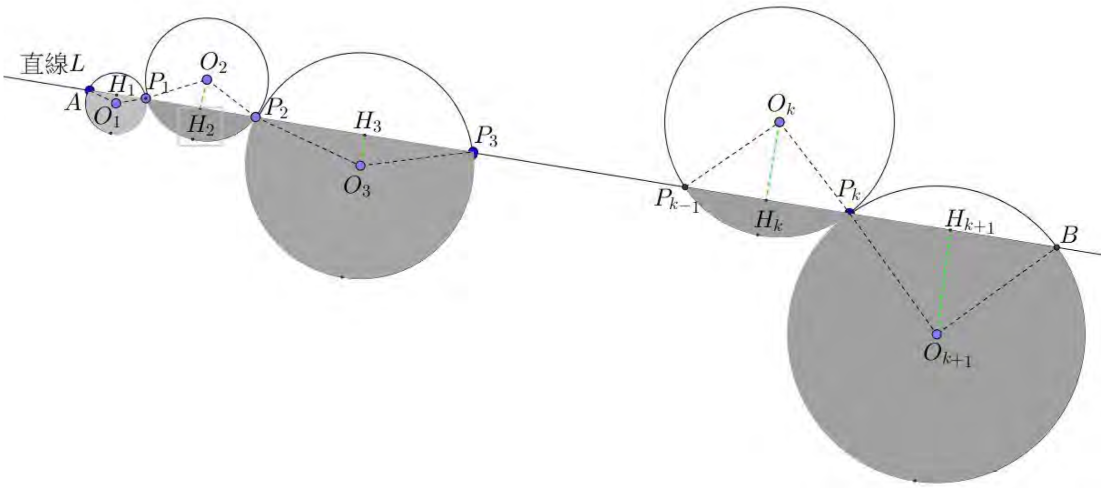


圖 5　切割 k+1 個相互相切的圓

假設$i=k$成立（i爲圓的個數），欲證明$i=k+1$成立

證明：

假設i爲奇數時，圓$O_k\begin{cases}\text{無陰影的部分爲}\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a\\ \text{有陰影的部分爲}\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$成立。

則，當$i=k+1$時，圓O_k、圓O_{k+1}中，直線 L 交O_k於P_{k-1}、P_k兩點，交圓O_{k+1}於P_k、B兩點，P_k爲圓O_k、圓O_{k+1}的共同切點。

(一) 在$\Delta\, O_{k+1}P_kB$、$\Delta\, O_kP_kP_{k-1}$中，$\angle O_{k+1}P_kB$與$\angle O_kP_kP_{k-1}$爲對頂角，

所以$\angle O_{k+1}P_kB=\angle O_kP_kP_{k-1}$(1)

因爲$\overline{O_{k+1}P_k}=\overline{O_{k+1}B}=r_{k+1}$，所以$\angle O_{k+1}P_kB=\angle O_{k+1}BP_k$ (2)

因爲$\overline{O_kP_{k-1}}=\overline{O_kP_k}=r_k$，所以$\angle O_kP_{k-1}P_k=\angle O_kP_kP_{k-1}$(3)

由(1)、(2)、(3)知

$$\angle O_{k+1}P_kB=\angle O_kP_kP_{k-1}=\angle O_{k+1}BP_k=\angle O_kP_{k-1}P_k$$

(二) 在$\Delta\, O_kP_kP_{k-1}$中，因爲$\overline{O_kP_k}=\overline{O_kP_{k-1}}=r_k$，所以$\Delta\, O_kP_kP_{k-1}$爲等腰三角形。

又因爲在圓O_k中，圓心O_k到弦$\overline{P_kP_{k-1}}$的直線相交於點H_k，所以$\overline{O_kH_k}\perp\overline{P_kP_{k-1}}$，且$\Delta\, O_kP_kH_k$爲直角三角形。

同理，$\Delta\, O_{k+1}P_kB$中，因爲$\overline{O_{k+1}P_k}=\overline{O_kB}=r_{k+1}$，所以$\Delta\, O_{k+1}P_kB$爲等腰三角形，又因爲在圓$O_{k+1}$中，圓心$O_{k+1}$到弦$\overline{P_kB}$的直線相交於點$H_{k+1}$，所以$\overline{O_{k+1}H_{k+1}}\perp\overline{P_kB}$，且$\Delta\, O_{k+1}P_kH_{k+1}$爲直角三角形。

(三) 在$\Delta\, O_kP_kH_k$、$\Delta\, O_{k+1}P_kH_{k+1}$中，

因爲$\angle O_kH_kP_k=O_{k+1}H_{k+1}P_k=90°$且$\angle O_kP_kH_k=\angle O_{k+1}P_kH_{k+1}$（對頂角)，

所以$\Delta\, O_kP_kH_k\sim\Delta\, O_{k+1}P_kH_{k+1}$（AA 相似）

由上述結果得知$\frac{\overline{O_{k+1}H_{k+1}}}{\overline{O_kH_k}}=\frac{\overline{O_{k+1}P_k}}{\overline{O_kP_k}}=\frac{r_{k+1}}{r_k}$ (4)

另外，$\angle P_kO_{k+1}B=180°-\angle O_{k+1}P_kB-\angle O_{k+1}BP_k$

$=180°-\angle O_kP_kP_{k-1}-\angle O_kP_{k-1}P_k=\angle P_kO_kP_{k-1}$(5)

由三角形 AAA 相似性質知$\Delta\, O_{k+1}P_kB\sim\Delta\, O_kP_kP_{k-1}$

因此，我們得到$\frac{\overline{P_kB}}{\overline{P_kP_{k-1}}}==\frac{r_{k+1}}{r_k}$ (6)

所以，由(4)、(5)知

$$\frac{\overline{O_{k+1}H_{k+1}}}{\overline{O_kH_k}}\times\frac{\overline{P_kB}}{\overline{P_kP_{k-1}}}=\frac{r_{k+1}}{r_k}\times\frac{r_{k+1}}{r_k}=\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2(7)$$

(四) 假設圓O_k中，無陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$，則

$$a=\pi r_k^2\times\frac{\angle P_{k-1}O_kP_k\text{所對的弧度}}{2\pi}-\frac{\overline{P_kP_{k-1}}\times\overline{O_kH_k}}{2}\quad(8)$$

推論圓O_{k+1}中，有陰影面積爲$\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 a$

首先，由 (7)、(8)代入，因爲$\angle P_{k-1}O_{k+1}P_k=\angle BO_{k+1}P_k$，所以

$$\frac{\angle P_{k-1}O_kP_k\text{所對的弧度}}{2\pi}=\frac{\angle BO_{k+1}P_k\text{所對的弧度}}{2\pi}=\frac{a+\frac{\overline{P_kP_{k-1}}\times\overline{O_kH_k}}{2}}{\pi r_k^2}$$

又因爲$\frac{\overline{O_{k+1}H_{k+1}}}{\overline{O_kH_k}}\times\frac{\overline{P_kB}}{\overline{P_kP_{k-1}}}=\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2$

所以$\overline{P_kB}\times\overline{O_{k+1}H_{k+1}}=\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2\times\left(\overline{P_kP_{k-1}}\times\overline{O_kH_k}\right)$

(五) 接著，可以計算在圓O_{k+1}中，有陰影面積爲

$$\pi r_{k+1}^2 \times \frac{\angle \mathrm{B}O_{k+1}P_k\text{所對的弧度}}{2\pi} - \frac{\overline{BP_k} \times \overline{O_{k+1}H_{k+1}}}{2}$$

$$= \pi r_{k+1}^2 \times \frac{a + \frac{\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}}{2}}{\pi r_k^2} - \frac{r_{k+1}^2(\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k})}{2}$$

$$= \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 a + \frac{r_{k+1}^2}{2r_k^2}\left(\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}\right) - \frac{r_{k+1}^2}{2r_k^2}\left(\left(\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 a \quad (9)$$

因此，圓O_{k+1}中，有陰影面積爲$\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 a$成立。

(六) 同理，假設圓O_k中，有陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$。

推論圓O_{k+1}中，無陰影面積爲$\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 b$

由$\mathrm{b} = \pi r_k^2 \times \frac{360° - \angle P_{k-1}O_kP_k\text{所對的弧度}}{2\pi} - \frac{\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}}{2}$

首先，由(5)得知，因爲$\angle BO_{k+1}P_k = \angle P_{k-1}O_kP_k$，而且

$$360° - \angle P_{k-1}O_kP_k\text{所對的弧度} = 2\pi - \angle BO_{k+1}P_k\text{所對的弧度}$$
$$= \angle BO_{k+1}P_k\text{所對的弧度}$$

所以$\frac{360° - \angle P_{k-1}O_kP_k\text{所對的弧度}}{2\pi} = \frac{360° - \angle BO_{k+1}P_k\text{所對的弧度}}{2\pi} = \frac{b - \frac{\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}}{2}}{\pi r_k^2}$。

因爲$\frac{\overline{O_{k+1}H_{k+1}}}{\overline{O_kH_k}} \times \frac{\overline{P_kB}}{\overline{P_kP_{k-1}}} = \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2$，所以

$$\overline{P_kB} \times \overline{O_{k+1}H_{k+1}} = \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 \times \left(\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}\right)$$

在圓O_{k+1}中，無陰影面積爲

$$\pi r_{k+1}^2 \times \frac{\angle BO_{k+1}P_k\text{所對的弧度}}{2\pi} + \frac{\overline{P_k\mathrm{B}} \times \overline{O_{k+1}H_{k+1}}}{2}$$

$$= \pi r_{k+1}^2 \times \frac{b - \frac{\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}}{2}}{\pi r_k^2} + \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 \times \left(\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}\right)$$

$$= \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 b - \frac{r_{k+1}^2}{2r_k^2}\left(\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}\right) + \frac{r_{k+1}^2}{2r_k^2}\left(\left(\overline{P_kP_{k-1}} \times \overline{O_kH_k}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 b \quad (10)$$

因此，圓O_{k+1}中，無陰影面積爲$\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 b$，假設成立。

(七) 同理，當我們假設i爲偶數時，圓$O_k\begin{cases}\textbf{無陰影面積}\text{爲}\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b \\ \textbf{有陰影面積}\text{爲}\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$成立。

則，當$i = k + 1$時，圓O_k、圓O_{k+1}中，直線L交O_k於P_{k-1}、P_k兩點，交圓O_{k+1}於P_k、B兩點，P_k爲圓O_k、圓O_{k+1}的共同切點。

我們如同上述方式推導，可以得到

圓$O_{k+1}\begin{cases}\textbf{無陰影面積}\text{爲}\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 a \\ \textbf{有陰影面積}\text{爲}\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$，因此假設成立。

(四) 結論：

由上述歸納的過程中，我們發現直線 L 分割 k 個圓，可以找到第一個圓至第 k 個圓，各圓的陰影部分及無陰影部分之面積關係，並將其整理如下表 1。

表 1

各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積關係

		圓的個數爲奇數	圓的個數爲偶數
	圓O_1	**圓O_k**	**圓O_k**
無陰影面積	a	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$
有陰影面積	b	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$

三、 探討直線分割多圓，有陰影及無陰影部分的面積總和與第一個圓的面積比例關係。

由研究目的二得到的結果，我們接續想了解直線一刀切割多個圓的時候，每一個圓都被分成兩部分：有陰影面積、無陰影面積。當給定這兩個部分一定比例的時候，對第一個圓有陰影面積與無陰影面積之間比例關係是如何變化。

(一) 直線將小圓分割成兩塊的面積比

1. i=2，i表示圓的個數

一直線分割圓O_1、圓O_2的面積爲兩種情況：有陰影部分與無陰影部分。兩個圓圍成的區域分割面積比爲$m_1 : m_2$，m_1爲有陰影面積，m_2爲無陰影面積。其中，r_1爲圓O_1半徑，r_2爲圓O_2半徑。

證明：

假設圓O_1中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}b\\\text{無陰影面積爲}a\end{cases}$ 與前結論圓O_2中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\\\text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

推導$m_1 : m_2 = \left(b+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\right) : \left(a+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b\right) = \frac{br_1{}^2+ar_2{}^2}{r_1{}^2} : \frac{ar_1{}^2+br_2{}^2}{r_1{}^2}$，

$$\left(\frac{br_1{}^2+ar_2{}^2}{r_1{}^2}\right)m_2 = \left(\frac{ar_1{}^2+br_2{}^2}{r_1{}^2}\right)m_1$$

$$\because \mathrm{r} > 0, bm_2r_1{}^2 + am_2r_2{}^2 = am_1r_1{}^2 + bm_1r_2{}^2$$

$$\mathrm{a}(m_2r_2{}^2 - m_1r_1{}^2) = b(m_1r_2{}^2 - m_2r_1{}^2)$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{m_1r_2{}^2 - m_2r_1{}^2}{m_2r_2{}^2 - m_1r_1{}^2} = \frac{m_1(r_2^2) - m_2(r_1^2)}{m_2(r_2^2) - m_1(r_1^2)}$$

結論：當圓的個數爲 2 個時，此直線將圓O_1分割成兩塊的面積比爲$\frac{a}{b}=\frac{m_1(r_2^2)-m_2(r_1^2)}{m_2(r_2^2)-m_1(r_1^2)}$。

2.　i=3，i表示圓的個數

一直線分割圓O_1、圓O_2、圓O_3的面積爲兩種情況：有陰影部分與無陰影部分。三個圓圍成的區域分割面積比爲$m_1:m_2$，m_1爲有陰影部分，m_2爲無陰影部分。其中，r_1爲圓O_1半徑，r_2爲圓O_2半徑，r_3爲圓O_3半徑。

證明：

假設圓O_1中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}b\\\text{無陰影面積爲}a\end{cases}$　與前結論圓O_2中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\\\text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

與圓O_3中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b\\\text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$

$$\text{推導}m_1:m_2=\left(b+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a+\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b\right):\left(a+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b+\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a\right)$$
$$=\frac{br_1{}^2+ar_2{}^2+br_3{}^2}{r_1{}^2}:\frac{ar_1{}^2+br_2{}^2+ar_3{}^2}{r_1{}^2}$$
$$\because r_1>0,$$
$$\therefore m_2(br_1{}^2+ar_2{}^2+br_3{}^2)=m_1(ar_1{}^2+br_2{}^2+ar_3{}^2)$$
$$bm_2r_1{}^2+am_2r_2{}^2+bm_2r_3{}^2=am_1r_1{}^2+bm_1r_2{}^2+am_1r_3{}^2$$
$$a(m_1r_3{}^2-m_2r_2{}^2+m_1r_1{}^2)=b(m_2r_3{}^2-m_1r_2{}^2+m_2r_1{}^2)$$
$$\therefore\frac{a}{b}=\frac{m_2r_3{}^2-m_1r_2{}^2+m_2r_1{}^2}{m_1r_3{}^2-m_2r_2{}^2+m_1r_1{}^2}=\frac{m_2(r_3^2+r_1^2)-m_1(r_2^2)}{m_1(r_3^2+r_1^2)-m_2(r_2^2)}$$

結論：當圓的個數爲 3 個時，此直線將圓O_1分割成兩塊的面積比爲$\frac{a}{b}=\frac{m_2(r_3^2+r_1^2)-m_1(r_2^2)}{m_1(r_3^2+r_1^2)-m_2(r_2^2)}$。

3.　i=4，i表示圓的個數

一直線分割圓O_1、圓O_2、圓O_3、圓O_4的面積爲兩種情況：有陰影部分與無陰影部分。四個圓圍成的區域分割面積比爲$m_1:m_2$，m_1爲有陰影部分，m_2爲無陰影部分。其中，r_1爲圓O_1半徑，r_2爲圓O_2半徑，r_3爲圓O_3半徑，r_4爲圓O_4半徑。

證明：

假設圓O_1中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}b\\\text{無陰影面積爲}a\end{cases}$　與前結論圓O_2中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\\\text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

與圓O_3中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b\\\text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$　與圓O_4中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 a\\\text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&\text{推導} m_1 : m_2 = \left(b + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b + \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 a\right) : \left(a + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 \mathrm{a} + \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 b\right) \\
&= \frac{b{r_1}^2 + a{r_2}^2 + b{r_3}^2 + ar_4^2}{{r_1}^2} : \frac{a{r_1}^2 + b{r_2}^2 + a{r_3}^2 + br_4^2}{{r_1}^2} \\
&\because r_1 > 0, \\
&\therefore m_2(b{r_1}^2 + a{r_2}^2 + b{r_3}^2 + ar_4^2) = m_1(a{r_1}^2 + b{r_2}^2 + a{r_3}^2 + br_4^2) \\
&bm_2{r_1}^2 + am_2{r_2}^2 + bm_2{r_3}^2 + am_2r_4^2 = am_1{r_1}^2 + bm_1{r_2}^2 + am_1{r_3}^2 + bm_1r_4^2 \\
&a(m_2r_4^2 - m_1{r_3}^2 + m_2{r_2}^2 - m_1{r_1}^2) = b(m_1r_4^2 - m_2{r_3}^2 + m_1{r_2}^2 - m_2{r_1}^2) \\
&\text{得} \frac{a}{b} = \frac{m_1r_4^2 - m_2{r_3}^2 + m_1{r_2}^2 - m_2{r_1}^2}{m_2r_4^2 - m_1{r_3}^2 + m_2{r_2}^2 - m_1{r_1}^2} = \frac{m_1(r_4^2 + r_2^2) - m_2(r_3^2 + r_1^2)}{m_1(r_4^2 + r_2^2) - m_2(r_3^2 + r_1^2)}
\end{aligned}
$$

結論：當圓的個數爲 4 個時，此直線將圓O_1分割成兩塊的面積比爲$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{m_1(r_4^2 + r_2^2) - m_2(r_3^2 + r_1^2)}{m_1(r_4^2 + r_2^2) - m_2(r_3^2 + r_1^2)}}$。

4. i=5，i表示圓的個數

一直線分割圓O_1、圓O_2、圓O_3、圓O_4、圓O_5的面積爲兩種情況：有陰影部分與無陰影部分。五個圓圍成的區域分割面積比爲$m_1 : m_2$，m_1爲有陰影部分，m_2爲無陰影部分。其中，r_1、r_2、r_3、r_4、r_5分別爲圓O_1、O_2、O_3、O_4、O_5的半徑。

證明：

$$
\begin{aligned}
&\text{假設圓} O_1 \text{中，} \begin{cases} \textbf{有陰影面積}\text{爲} b \\ \textbf{無陰影面積}\text{爲} a \end{cases} \quad \text{與前結論圓} O_2 \text{中，} \begin{cases} \textbf{有陰影面積}\text{爲} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a \\ \textbf{無陰影面積}\text{爲} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b \end{cases} \\
&\text{與圓} O_3 \text{中，} \begin{cases} \textbf{有陰影面積}\text{爲} \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b \\ \textbf{無陰影面積}\text{爲} \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a \end{cases} \quad \text{與圓} O_4 \text{中，} \begin{cases} \textbf{有陰影面積}\text{爲} \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a \\ \textbf{無陰影面積}\text{爲} \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 b \end{cases} \\
&\text{與圓} O_5 \text{中，} \begin{cases} \textbf{有陰影面積}\text{爲} \left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 b \\ \textbf{無陰影面積}\text{爲} \left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 a \end{cases} \\
&\text{推導} m_1 : m_2 = \left(b + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a + \left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 \frac{r_5^2}{r_1^2} b\right) : \left(a + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \mathrm{b} + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 \mathrm{a} + \right.
\end{aligned}
$$

*r3r12*b+*r5r12*a

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b{r_1}^2 + a{r_2}^2 + b{r_3}^2 + ar_4^2 + br_5^2}{{r_1}^2} : \frac{a{r_1}^2 + b{r_2}^2 + a{r_3}^2 + br_4^2 + ar_5^2}{{r_1}^2} \\
&\because r_1 > 0, \\
&\therefore m_2(b{r_1}^2 + a{r_2}^2 + b{r_3}^2 + ar_4^2 + br_5^2) = m_1(a{r_1}^2 + b{r_2}^2 + a{r_3}^2 + br_4^2 + ar_5^2) \\
&bm_2{r_1}^2 + am_2{r_2}^2 + bm_2{r_3}^2 + am_2r_4^2 + bm_2r_5^2 \\
&\qquad = am_1{r_1}^2 + bm_1{r_2}^2 + am_1{r_3}^2 + bm_1r_4^2 + am_1r_5^2 \\
&a(m_1r_5^2 - m_2r_4^2 + m_1{r_3}^2 - m_2{r_2}^2 - m_1{r_1}^2) \\
&\qquad = b(m_2r_5^2 - m_1r_4^2 + m_2{r_3}^2 - m_1{r_2}^2 + m_2{r_1}^2) \\
&\frac{a}{b} = \frac{m_2r_5^2 - m_1r_4^2 + m_2{r_3}^2 - m_1{r_2}^2 + m_2{r_1}^2}{m_1r_5^2 - m_2r_4^2 + m_1{r_3}^2 - m_2{r_2}^2 + m_1{r_1}^2} = \frac{m_2(r_5^2 + r_3^2 + r_1^2) - m_1(r_4^2 + r_2^2)}{m_1(r_5^2 + r_3^2 + r_1^2) - m_2(r_4^2 + r_2^2)}
\end{aligned}
$$

結論：當圓的個數爲 5 時，此直線將圓O_1分割成兩塊的面積比爲$\frac{a}{b} = \frac{m_2(r_5^2 + r_3^2 + r_1^2) - m_1(r_4^2 + r_2^2)}{m_1(r_5^2 + r_3^2 + r_1^2) - m_2(r_4^2 + r_2^2)}$。

5. i=6，i表示圓的個數

一直線分割圓O_1、圓O_2、圓O_3、圓O_4、圓O_5、圓O_6的面積爲兩種情況：有陰影部分與無陰影部分。六個圓圍成的區域分割面積比爲m_1: m_2，m_1爲有陰影部分，m_2爲無陰影部分。其中，r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6分別爲圓O_1、O_2、O_3、O_4、O_5、O_6的半徑。

假設圓O_1中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}b\\ \text{無陰影面積爲}a\end{cases}$ 與前結論圓O_2中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\\ \text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

與圓O_3中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b\\ \text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$ 與圓O_4中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 a\\ \text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

與圓O_5中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 b\\ \text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$ 與圓O_5中，$\begin{cases}\text{有陰影面積爲}\left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 a\\ \text{無陰影面積爲}\left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

推導m_1: $m_2 = \left(b+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a+\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b+\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 a+\left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 b+\left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 a\right):\left(a+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \mathrm{b}+\right.$
*r3r12*a+*r4r12*b+*r5r12*a+*r6r12*b

$$=\frac{br_1{}^2+ar_2{}^2+br_3{}^2+ar_4^2+br_5^2+ar_6^2}{r_1{}^2}$$
$$:\frac{ar_1{}^2+br_2{}^2+ar_3{}^2+br_4^2+ar_5^2+br_6^2}{r_1{}^2}$$

$\because r_1>0,$
$\therefore m_2(br_1{}^2+ar_2{}^2+br_3{}^2+ar_4^2+br_5^2+ar_6^2)$
$=m_1(ar_1{}^2+br_2{}^2+ar_3{}^2+br_4^2+ar_5^2+br_6^2)$
$bm_2r_1{}^2+am_2r_2{}^2+bm_2r_3{}^2+am_2r_4^2+bm_2r_5^2+am_2r_6^2$
$=am_1r_1{}^2+bm_1r_2{}^2+am_1r_3{}^2+bm_1r_4^2+am_1r_5^2+bm_1r_6^2$
$a(m_2r_6^2-m_1r_5^2+m_2r_4^2-m_1r_3{}^2+m_2r_2{}^2-m_1r_1{}^2)$
$=b(m_1r_6^2-m_2r_5^2+m_1r_4^2-m_2r_3{}^2+m_1r_2{}^2-m_2r_1{}^2)$

$$\frac{a}{b}=\frac{m_1r_6^2-m_2r_5^2+m_1r_4^2-m_2r_3{}^2+m_1r_2{}^2-m_2r_1{}^2}{m_2r_6^2-m_1r_5^2+m_2r_4^2-m_1r_3{}^2+m_2r_2{}^2-m_1r_1{}^2}$$
$$=\frac{m_1(r_6^2+r_4^2+r_2^2)-m_2(r_5^2+r_3^2+r_1^2)}{m_2(r_6^2+r_4^2+r_2^2)-m_1(r_5^2+r_3^2+r_1^2)}$$

結論：當圓的個數爲 6 時，此直線將小圓分割成兩塊的面積比爲

$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{m_1(r_6^2+r_4^2+r_2^2)-m_2(r_5^2+r_3^2+r_1^2)}{m_2(r_6^2+r_4^2+r_2^2)-m_1(r_5^2+r_3^2+r_1^2)}}$。

由上述兩個圓到六個圓的推導，發現此直線將小圓分割成兩塊的面積比可以嘗試找出規律，因此，將前面的推導先整理成表 2。

一直線分割圓的面積爲兩種情況：有陰影部分與無陰影部分，其中，圓圍成的區域分割

面積比爲$m_1:m_2$，m_1爲有陰影部分、m_2爲無陰影部分。圓O_1中，$\begin{cases}\textbf{有陰影面積}\text{爲}b\\ \textbf{無陰影面積}\text{爲}a\end{cases}$，

表 2

直線分割圓的有陰影部分及無陰影部分之面積關係

圓的個數	第一個圓無陰影面積 a	:	第一個圓有陰影面積 b
2	$m_1(r_2^2)-m_2(r_1^2)$	:	$m_2(r_2^2)-m_1(r_1^2)$
3	$m_2(r_3^2+r_1^2)-m_1(r_2^2)$	:	$m_1(r_3^2+r_1^2)-m_2(r_2^2)$
4	$m_1(r_4^2+r_2^2)-m_2(r_3^2+r_1^2)$	:	$m_1(r_4^2+r_2^2)-m_2(r_3^2+r_1^2)$
5	$m_2\left(r_5^2+r_3^2+r_1^2\right)-m_1(r_4^2+r_2^2)$	:	$m_1\left(r_5^2+r_3^2+r_1^2\right)-m_2(r_4^2+r_2^2)$
6	$m_1(r_6^2+r_4^2+r_2^2)-m_2\left(r_5^2+r_3^2+r_1^2\right)$	:	$m_2(r_6^2+r_4^2+r_2^2)-m_1\left(r_5^2+r_3^2+r_1^2\right)$

(二) 推導 *k*+1 個圓的情況

在研究二中發現奇數個圓與偶數個圓時，圓面積比例關係不同，因此以下討論圓的個數在偶數與奇數情況下的不同：

1. **假設有 *k* 個圓（*k* 爲偶數）**，則一直線分割圓形成圓圍成的區域分割面積比爲 $m_1:m_2$，m_1爲有陰影部分、m_2爲無陰影部分。

證明：

圓O_1中，$\begin{cases}\textbf{有陰影面積部分}\text{爲}b\\ \textbf{無陰影面積部分}\text{爲}a\end{cases}$，則

$$\frac{a}{b}=\frac{m_1r_k^2-m_2r_{k-1}^2+m_1r_{k-2}^2-m_2{r_{k-3}}^2+m_1{r_{k-4}}^2-\cdots-m_2{r_1}^2}{m_2r_k^2-m_1r_{k-1}^2+m_2r_{k-2}^2-m_1{r_{k-3}}^2+m_2{r_{k-4}}^2-\cdots-m_1{r_1}^2}$$
$$=\frac{m_1(r_k^2+r_{k-2}^2+r_{k-4}^2+\cdots+{r_2}^2)-m_2(r_{k-1}^2+r_{k-3}^2+r_{k-5}^2+\cdots+{r_1}^2)}{m_2(r_k^2+r_{k-2}^2+r_{k-4}^2+\cdots+{r_2}^2)-m_1(r_{k-1}^2+r_{k-3}^2+r_{k-5}^2+\cdots+{r_1}^2)}$$
$$=\frac{m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i}^2\right)-m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i-1}^2\right)}{m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i}^2\right)-m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i-1}^2\right)}$$

2. **假設有 *k* 個圓(*k* 爲奇數)**，則一直線分割圓形成圓圍成的區域分割面積比爲$m_1:m_2$，m_1爲有陰影部分、m_2爲無陰影部分。

證明：

圓O_1中，$\begin{cases}\textbf{有陰影面積部分}\text{爲}b\\ \textbf{無陰影面積部分}\text{爲}a\end{cases}$，則

$$\frac{a}{b}=\frac{m_2r_k^2-m_1r_{k-1}^2+m_2r_{k-2}^2-m_1{r_{k-3}}^2+m_2{r_{k-4}}^2-\cdots+m_2{r_1}^2}{m_1r_k^2-m_2r_{k-1}^2+m_1r_{k-2}^2-m_2{r_{k-3}}^2+m_1{r_{k-4}}^2-\cdots+m_1{r_1}^2}$$

$$= \frac{m_2(r_k^2 + r_{k-2}^2 + r_{k-4}^2 + \cdots + {r_2}^2) - m_1(r_{k-1}^2 + r_{k-3}^2 + r_{k-5}^2 + \cdots + {r_1}^2)}{m_1(r_k^2 + r_{k-2}^2 + r_{k-4}^2 + \cdots + {r_2}^2) - m_2(r_{k-1}^2 + r_{k-3}^2 + r_{k-5}^2 + \cdots + {r_1}^2)}$$

$$= \frac{m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k+1}{2}} r_{2i-1}^2\right) - m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k-1}{2}} r_{2i}^2\right)}{m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k+1}{2}} r_{2i-1}^2\right) - m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k-1}{2}} r_{2i}^2\right)}$$

3. 透過取整函數中的上取整函數與下取整函數，當 k 為偶數，$\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil = \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$由上取整數與下取整數知，當 k 為偶數，k+1 為奇數時，$\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil$的項次會比$\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor$多一個。因此，假設

當 k 為偶數，原式$\frac{a}{b} = \frac{m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}} r_{2i}^2\right) - m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}} r_{2i-1}^2\right)}{m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}} r_{2i}^2\right) - m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}} r_{2i-1}^2\right)} = \frac{m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil} r_{2i}^2\right) - m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} r_{2i-1}^2\right)}{m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil} r_{2i}^2\right) - m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} r_{2i-1}^2\right)}$

當 k 為奇數，原式$\frac{a}{b} = \frac{m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k+1}{2}} r_{2i-1}^2\right) - m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k-1}{2}} r_{2i}^2\right)}{m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k+1}{2}} r_{2i-1}^2\right) - m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k-1}{2}} r_{2i}^2\right)} = \frac{m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil} r_{2i-1}^2\right) - m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} r_{2i}^2\right)}{m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil} r_{2i-1}^2\right) - m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} r_{2i}^2\right)}$

4. 由歸納法推導 *k*+1 個圓的情況

(1) 假設有 k+1 個圓（k 為偶數），則一直線分割圓形所圍成的區域分割面積比為$m_1 : m_2$，m_1為有陰影部分、m_2為無陰影部分。圓O_1、O_2、……、O_k、O_{k+1}的半徑分別為r_1、r_2、……、r_k、r_{k+1}。圓O_1中，$\begin{cases}\text{有陰影面積部分為}b\\ \text{無陰影面積部分為}a\end{cases}$ 前結論圓O_2中，$\begin{cases}\text{有陰影面積部分為}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\\ \text{無陰影面積部分為}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

圓O_3中，$\begin{cases}\text{有陰影面積部分為}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b\\ \text{無陰影面積部分為}\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$，圓$O_4$中，$\begin{cases}\text{有陰影面積部分為}\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 a\\ \text{無陰影面積部分為}\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

圓O_5中，$\begin{cases}\text{有陰影面積部分為}\left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 b\\ \text{無陰影面積部分為}\left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$，圓$O_6$中，$\begin{cases}\text{有陰影面積部分為}\left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 a\\ \text{無陰影面積部分為}\left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

以此類推，圓O_k中，$\begin{cases}\text{有陰影面積部分為}\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a\\ \text{無陰影面積部分為}\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

圓O_{k+1}中，$\begin{cases}\text{有陰影面積部分為}\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b\\ \text{無陰影面積部分為}\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$

推導$m_1 : m_2 = \Big(b + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b + \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 a + \left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 b + \left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 a + \cdots + \left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a +$

*rk+1r12b :a+r2r12*b*+r3r12*a*+r4r12*b*+r5r12*a*+r6r12*b*+⋯+rkr12b+rk+1r12a*

$$= \frac{br_1{}^2 + ar_2{}^2 + br_3{}^2 + ar_4^2 + br_5^2 + ar_6^2 + \cdots + ar_k^2 + br_{k+1}^2}{r_1{}^2}$$
$$: \frac{ar_1{}^2 + br_2{}^2 + ar_3{}^2 + br_4^2 + ar_5^2 + br_6^2 + \cdots + br_k^2 + ar_{k+1}^2}{r_1{}^2}$$

$\because r_1 > 0,$

$\therefore m_2(br_1{}^2 + ar_2{}^2 + br_3{}^2 + ar_4^2 + br_5^2 + ar_6^2 + \cdots + ar_k^2 + br_{k+1}^2) = m_1(ar_1{}^2 + br_2{}^2 +$
ar32+br42+ar52+br62+⋯+brk2+ark+12

$$\begin{aligned} bm_2r_1{}^2 + am_2r_2{}^2 + bm_2r_3{}^2 + am_2r_4^2 + bm_2r_5^2 + am_2r_6^2 + \cdots + am_2r_k^2 + bm_2r_{k+1}^2 \\ = am_1r_1{}^2 + bm_1r_2{}^2 + am_1r_3{}^2 + bm_1r_4^2 + am_1r_5^2 + bm_1r_6^2 + \cdots + bm_1r_k^2 \\ + am_1r_{k+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(m_1r_{k+1}^2 - m_2r_k^2 + \cdots - m_2r_6^2 + m_1r_5^2 - m_2r_4^2 + m_1r_3{}^2 - m_2r_2{}^2 + m_1r_1{}^2) \\ = b(m_2r_{k+1}^2 - m_1r_k^2 + \cdots - m_1r_6^2 + m_2r_5^2 - m_1r_4^2 + m_2r_3{}^2 - m_1r_2{}^2 + m_2r_1{}^2) \end{aligned}$$

則

$$\frac{a}{b} = \frac{m_2r_{k+1}^2 - m_1r_k^2 + \cdots - m_1r_6^2 + m_2r_5^2 - m_1r_4^2 + m_2r_3{}^2 - m_1r_2{}^2 + m_2r_1{}^2}{m_1r_{k+1}^2 - m_2r_k^2 + \cdots - m_2r_6^2 + m_1r_5^2 - m_2r_4^2 + m_1r_3{}^2 - m_2r_2{}^2 + m_1r_1{}^2}$$
$$= \frac{m_2(r_{k+1}^2 + r_{k-1}^2 + r_{k-3}^2 + r_{k-5}^2 + \cdots + r_1{}^2) - m_1(r_k^2 + r_{k-2}^2 + r_{k-4}^2 + \cdots + r_2{}^2)}{m_1(r_{k+1}^2 + r_{k-1}^2 + r_{k-3}^2 + r_{k-5}^2 + \cdots + r_1{}^2) - m_2(r_k^2 + r_{k-2}^2 + r_{k-4}^2 + \cdots + r_2{}^2)}$$

$\because k$ 爲偶數，所以 k+1 爲奇數，由$r_{k+1}^2 + r_{k-1}^2 + r_{k-3}^2 + r_{k-5}^2 + \cdots + r_1{}^2$與$r_k^2 + r_{k-2}^2 + r_{k-4}^2 + \cdots + r_2{}^2$觀察，得知這兩個式子的累加項次數，前面爲$\frac{k}{2} + 1$項，比後面$\frac{k}{2}$項多一個項次，且前後項次下標公差均爲 2。

又$\because$k 爲偶數，$\therefore \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$

$\therefore$由上取整數與下取整數知，當 k 爲偶數， k+1 爲奇數時，

$\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$的項次會比$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$多一個

$$\therefore 原式=\frac{\left[m_2r_{k+1}^2 + m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}} r_{2i-1}^2\right)\right] - \left[m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}} r_{2i}^2\right)\right]}{\left[m_1r_{k+1}^2 + m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}} r_{2i-1}^2\right)\right] - \left[m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}} r_{2i}^2\right)\right]} = \frac{m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil} r_{2i-1}^2 - m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} r_{2i}^2}{m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil} r_{2i-1}^2 - m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} r_{2i}^2}$$

(2) 假設有 k+1 個圓（k 爲奇數），則一直線分割圓形所圍成的區域分割面積比爲m_1:m_2，m_1爲有陰影部分、m_2爲無陰影部分。圓O_1、O_2、……、O_k、O_{k+1}的半徑分別爲r_1、r_2、……、r_k、r_{k+1}。

圓O_1中，$\begin{cases} \textbf{有陰影面積部分}爲 b \\ \textbf{無陰影面積部分}爲 a \end{cases}$ 與前結論圓O_2中，$\begin{cases} \textbf{有陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a \\ \textbf{無陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b \end{cases}$

圓O_3中，$\begin{cases} \textbf{有陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b \\ \textbf{無陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a \end{cases}$，圓$O_4$中，$\begin{cases} \textbf{有陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 a \\ \textbf{無陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 b \end{cases}$

圓O_5中，$\begin{cases} \textbf{有陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 b \\ \textbf{無陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 a \end{cases}$，圓$O_6$中，$\begin{cases} \textbf{有陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 a \\ \textbf{無陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 b \end{cases}$

以此類推，圓O_k中，$\begin{cases} \textbf{有陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b \\ \textbf{無陰影面積部分}爲 \left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a \end{cases}$

圓O_{k+1}中，$\begin{cases}\textbf{有陰影面積部分}\text{爲}\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 a\\ \textbf{無陰影面積部分}\text{爲}\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$

推導

$$m_1\!:m_2=\left(b+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a+\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b+\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 a+\left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 b+\left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 a+\cdots+\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b+\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 a\right)$$

$$:\left(a+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \mathrm{b}+\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 \mathrm{a}+\left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 \mathrm{b}+\left(\frac{r_5}{r_1}\right)^2 \mathrm{a}+\left(\frac{r_6}{r_1}\right)^2 \mathrm{b}+\cdots+\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a+\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b\right)$$

$$=\frac{br_1{}^2+ar_2{}^2+br_3{}^2+ar_4^2+br_5^2+ar_6^2+\cdots+br_k^2+ar_{k+1}^2}{r_1{}^2}:\frac{ar_1{}^2+br_2{}^2+ar_3{}^2+br_4^2+ar_5^2+br_6^2+\cdots+ar_k^2+br_{k+1}^2}{r_1{}^2}$$

$\because r_1>0,$

$$\therefore m_2(br_1{}^2+ar_2{}^2+br_3{}^2+ar_4^2+br_5^2+ar_6^2+\cdots+br_k^2+ar_{k+1}^2)=m_1(ar_1{}^2+br_2{}^2+ar_3{}^2+br_4^2+ar_5^2+br_6^2+\cdots+ar_k^2+br_{k+1}^2)$$

$$bm_2r_1{}^2+am_2r_2{}^2+bm_2r_3{}^2+am_2r_4^2+bm_2r_5^2+am_2r_6^2+\cdots+bm_2r_k^2+am_2r_{k+1}^2=am_1r_1{}^2+bm_1r_2{}^2+am_1r_3{}^2+bm_1r_4^2+am_1r_5^2+bm_1r_6^2+\cdots+am_1r_k^2+bm_1r_{k+1}^2$$

$$a(m_2r_{k+1}^2-m_1r_k^2+\cdots+m_2r_6^2-m_1r_5^2+m_2r_4^2-m_1r_3{}^2+m_2r_2{}^2-m_1r_1{}^2)=b(m_1r_{k+1}^2-m_2r_k^2+\cdots+m_1r_6^2-m_2r_5^2+m_1r_4^2-m_2r_3{}^2+m_1r_2{}^2-m_2r_1{}^2)$$

則

$$\frac{a}{b}=\frac{m_1r_{k+1}^2-m_2r_k^2+\cdots+m_1r_6^2-m_2r_5^2+m_1r_4^2-m_2r_3{}^2+m_1r_2{}^2-m_2r_1{}^2}{m_2r_{k+1}^2-m_1r_k^2+\cdots+m_2r_6^2-m_1r_5^2+m_2r_4^2-m_1r_3{}^2+m_2r_2{}^2-m_1r_1{}^2}$$

$$=\frac{m_1(r_{k+1}^2+r_{k-1}^2+r_{k-3}^2+r_{k-5}^2+\cdots+r_2{}^2)-m_2(r_k^2+r_{k-2}^2+r_{k-4}^2+\cdots+r_1{}^2)}{m_2(r_{k+1}^2+r_{k-1}^2+r_{k-3}^2+r_{k-5}^2+\cdots+r_2{}^2)-m_1(r_k^2+r_{k-2}^2+r_{k-4}^2+\cdots+r_1{}^2)}$$

$\because k$ 爲奇數，所以 $k+1$ 爲偶數，

透過取整函數中的上取整函數與下取整函數，

由$r_{k+1}^2+r_{k-1}^2+r_{k-3}^2+r_{k-5}^2+\cdots+r_1{}^2$與$r_k^2+r_{k-2}^2+r_{k-4}^2+\cdots+r_2{}^2$觀察，得知這兩個式子的累加項次數，前者爲$\frac{k}{2}$項，後者是$\frac{k}{2}$項，前後項次數一樣，且前後項次下標公差均爲 2。

$\because k$ 爲奇數，$\therefore\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor$

$\therefore$由上取整數與下取整數知，當 k 爲奇數， k+1 爲偶數時，

$\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil$的項次數與$\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor$的項次數相同

$$\therefore\text{原式}=\frac{\left[m_1r_{k+1}^2+m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i}^2\right)\right]-\left[m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i-1}^2\right)\right]}{\left[m_2r_{k+1}^2+m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i}^2\right)\right]-\left[m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i-1}^2\right)\right]}=\frac{m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil}r_{2i}^2-m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}r_{2i-1}^2}{m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil}r_{2i}^2-m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}r_{2i-1}^2}$$

因此，得證

(1) 當 k+1 爲偶數，

$$原式\frac{a}{b}=\frac{m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k+1}{2}}r_{2i-1}^2\right)-m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k-1}{2}}r_{2i}^2\right)}{m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k+1}{2}}r_{2i-1}^2\right)-m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k-1}{2}}r_{2i}^2\right)}=\frac{m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil}r_{2i}^2-m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}r_{2i-1}^2}{m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil}r_{2i}^2-m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}r_{2i-1}^2}$$

(2) 當 k+1 爲奇數，

$$原式\frac{a}{b}=\frac{m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i}^2\right)-m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i-1}^2\right)}{m_1\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i}^2\right)-m_2\left(\sum_{i=1}^{i=\frac{k}{2}}r_{2i-1}^2\right)}=\frac{m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil}r_{2i-1}^2-m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}r_{2i}^2}{m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil}r_{2i-1}^2-m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}r_{2i}^2}$$

(三) 結論：

我們由上述歸納的過程中，發現直線 L 分割圓，可以得到第 k 個圓與第一個圓的陰影部分及無陰影部分之面積關係，並且將此整理如下表 3。

表 3

第 k 個圓與第一個圓無陰影部分及有陰影部分的面積關係

	第一個圓無陰影面積 a	:	第一個圓有陰影面積 b
奇數	$m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}r_{2i-1}^2-m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}r_{2i}^2$	:	$m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}r_{2i-1}^2-m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}r_{2i}^2$
偶數	$m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}r_{2i}^2-m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}r_{2i-1}^2$	:	$m_2\sum_{i=1}^{i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}r_{2i}^2-m_1\sum_{i=1}^{i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}r_{2i-1}^2$

四、 探討折線分割多圓，各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。

原題的直線改爲折線時，重新將兩圓與折線的關係，圓O_1與圓O_2相切於 P_1 點（即爲切點 P_1），同時，P_1點爲折線L的折點。折線L切割圓O_1 ，且與圓O_1相交於A、P_1兩點，$\angle AP_1O_1=\theta_1$；折線 L 切割圓O_2，且與圓O_2相交於 B、P_1 兩點，$\angle BP_1O_2=\theta_2$。圓O_1中，作$\overline{O_1H_1}\perp\overline{AP_1}$於$H_1$，圓$O_2$中，作$\overline{O_2H_2}\perp\overline{P_1B}$於$H_2$。圓$O_1$的半徑爲$r_1$，圓$O_2$的半徑爲$r_2$。其中折線將圓$O_1$與圓$O_2$分別切割爲兩部分：無陰影部分與有陰影部分，且圓$O_1$中，無陰影面積爲 a、有陰影面積爲 b，如圖 6。

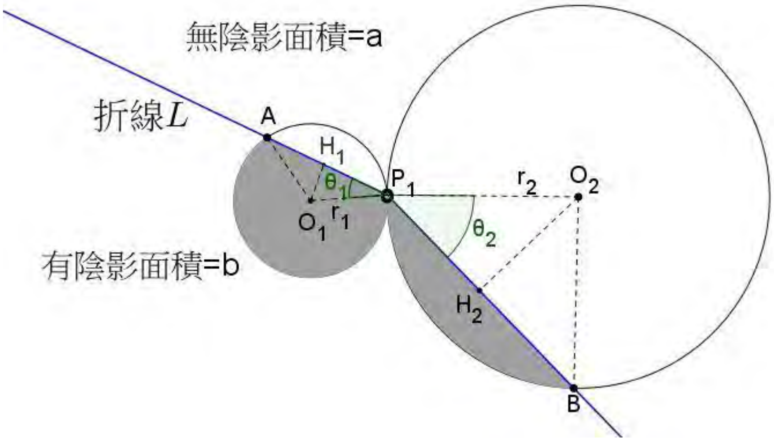


圖 6　折線切割兩個相互外切的圓

探討折線切割圓O_1與圓O_2兩個圓之前，我們先討論折線 L 切割圓O_1時，當折點在圓O_1的圓周上，而且這個折點也是圓O_1與圓O_2的切點，這樣的情況下，我們討論圓O_1中無陰影面積、有陰影面積、無陰影面積與有陰影面積比例關係。

(一) 折線 $\boldsymbol{L}$ 分割一個圓

在圓O_1中，折線 L 切割圓O_1於 A、P_1 兩點，形成一弦$\overline{AP_1}$。ΔP_1O_1A中，$\overline{O_1P_1} = \overline{O_1A} = r_1$，所以$\Delta P_1O_1A$為等腰三角形，$\angle AP_1O_1 = \angle P_1AO_1 = \theta_1$；由垂徑定理得知，當$\overline{O_1H_1} \perp \overline{AP_1}$時，$\overline{O_1H_1}$平分$\overline{AP_1}$。因此$\Delta P_1O_1A$中，因為$\angle AP_1O_1 = \theta_1$且$\overline{H_1P_1} = \frac{1}{2}\overline{AP_1}$，$\sin\theta_1 = \frac{\overline{O_1H_1}}{r_1}$ 、 $\cos\theta_1 = \frac{\overline{H_1P_1}}{r_1} = \frac{\overline{AP_1}}{2r_1}$，因此$\overline{O_1H_1} = r_1\sin\theta_1$ 、$\overline{AP_1} = 2r_1\cos\theta_1$ 。

圓$\boldsymbol{O_1}$中，無陰影面積

證明

$$
\begin{aligned}
a &= \text{扇形}\mathrm{P_1O_1A}\text{ 面積} - \Delta\mathrm{P_1O_1A}\text{ 的面積} \\
&= \left(\frac{\angle \mathrm{AO_1P_1}\text{所對的弧度}}{2\pi}\right) \times \pi {r_1}^2 - \frac{1}{2}\left(\Delta\mathrm{P_1O_1A}\text{ 的高}\right) \times \left(\Delta\mathrm{P_1O_1A}\text{ 的底}\right) \\
&= \left(\frac{\pi - 2\theta_1}{2\pi}\right) \times \pi {r_1}^2 - \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{O_1H_1}} \times \overline{\mathrm{AP_1}}\right) \\
&= \left(\frac{\pi - 2\theta_1}{2}\right){r_1}^2 - \frac{1}{2}(r_1\sin\theta_1)(2r_1\cos\theta_1) = \frac{1}{2}{r_1}^2[(\pi - 2\theta_1) - 2\sin\theta_1\cos\theta_1] \\
&= \frac{1}{2}{r_1}^2[(\pi - 2\theta_1) - 2\sin 2\theta_1]\text{（倍角公式）}
\end{aligned}
$$

圓O_1中，有陰影面積

證明

$$
\begin{aligned}
b &= \text{優弧 } \mathrm{AP_1}\text{與圓心所形成的面積} + \Delta \mathrm{P_1O_1A} \text{ 的面積} \\
&= \left(\frac{\text{優弧 } \mathrm{AP_1}\text{所對的圓心角}}{2\pi}\right) \times \pi {r_1}^2 + \frac{1}{2}\left(\Delta \mathrm{P_1O_1A} \text{ 的高}\right) \times \left(\Delta \mathrm{P_1O_1A} \text{ 的底}\right) \\
&= \left[\frac{2\pi - (\pi - 2\theta_1)}{2\pi}\right] \times \pi {r_1}^2 + \frac{1}{2}\left(\overline{O_1H_1} \times \overline{AP_1}\right) \\
&= \left(\frac{\pi + 2\theta_1}{2}\right) {r_1}^2 + \frac{1}{2}(r_1 \sin\theta_1)(2r_1 \cos\theta_1) = \frac{1}{2}{r_1}^2[(\pi + 2\theta_1) + 2\sin\theta_1 \cos\theta_1] \\
&= \frac{1}{2}{r_1}^2[(\pi + 2\theta_1) + 2\sin 2\theta_1]
\end{aligned}
$$

由上述結果，我們可以得到圓O_1中，無陰影部分與有陰影部分面積比例關係：

$$
\frac{a}{b} = \frac{\text{無陰影面積}}{\text{有陰影面積}} = \frac{\frac{1}{2}{r_1}^2[(\pi - 2\theta_1) - 2\sin 2\theta_1]}{\frac{1}{2}{r_1}^2[(\pi + 2\theta_1) + 2\sin 2\theta_1]} = \frac{[(\pi - 2\theta_1) - 2\sin 2\theta_1]}{[(\pi + 2\theta_1) + 2\sin 2\theta_1]} \quad (1)
$$

探討折線 L 切割圓O_1與圓O_2的陰影部分與無陰影部分面積比關係時，我們將分別討論$\theta_1 = \theta_2$與$\theta_1 \neq \theta_2$的情況。

(二) 折線 L 分割兩個相切的圓

在圓O_2中，折線 L 切割圓O_2於 B、P_1 兩點，形成一弦$\overline{P_1B}$。ΔP_1O_2B中，$\overline{O_2P_1} = \overline{O_2B} = r_2$，所以$\Delta P_1O_2B$為等腰三角形，$\angle BP_1O_2 = \angle P_1BO_2 = \theta_2$；由垂徑定理得知，當$\overline{O_2H_2} \perp \overline{BP_1}$時，$\overline{O_2H_2}$平分$\overline{BP_1}$。因此$\Delta P_1O_2B$中，因為$\angle BP_1O_2 = \theta_2$且$\overline{H_2P_1} = \frac{1}{2}\overline{BP_1}$，$\sin\theta_2 = \frac{\overline{O_2H_2}}{r_2}$ 、 $\cos\theta_2 = \frac{\overline{H_2P_1}}{r_2} = \frac{\overline{BP_1}}{2r_2}$，因此$\overline{O_2H_2} = r_2 \sin\theta_2$ 、$\overline{H_2P_1} = r_2\cos\theta_2$ 、$\overline{BP_1} = 2r_2\cos\theta_2$ 。

證明：

圓O_2中，

無陰影面積 $=$ 優弧 $\mathrm{BP_1}$與圓心所形成的面積 $+ \Delta \mathrm{P_1O_2B}$ 的面積

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\text{優弧 } \mathrm{BP_1}\text{所對的圓心角}}{2\pi}\right) \times \pi {r_2}^2 + \frac{1}{2}\left(\Delta \mathrm{P_1O_2B} \text{ 的高}\right) \times \left(\Delta \mathrm{P_1O_2B} \text{ 的底}\right) \\
&= \left[\frac{2\pi - (\pi - 2\theta_2)}{2\pi}\right] \times \pi {r_2}^2 + \frac{1}{2}\left(\overline{O_2H_2} \times \overline{BP_1}\right) \\
&= \left[\frac{2\pi - (\pi - 2\theta_2)}{2\pi}\right] \times \pi {r_2}^2 + \frac{1}{2}(r_2 \sin\theta_2)(2r_2 \cos\theta_2) \\
&= \left[\frac{(\pi + 2\theta_2)}{2\pi}\right] \times \pi {r_2}^2 + \frac{1}{2}{r_2}^2(2\sin\theta_2 \cos\theta_2) \\
&= \frac{1}{2}{r_2}^2(\pi + 2\theta_2) + \frac{1}{2}{r_2}^2(\sin 2\theta_2) = \frac{1}{2}{r_2}^2[(\pi + 2\theta_2) + (\sin 2\theta_2)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{有陰影面積} &= \text{扇形}\mathrm{P_1O_2B}\text{ 面積} - \Delta\mathrm{P_1O_2B}\text{ 的面積} \\
&= \left(\frac{\angle\mathrm{BO_2P_1}\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)\times\pi r_2{}^2 - \frac{1}{2}\left(\Delta\mathrm{P_1O_2B}\text{ 的高}\right)\times\left(\Delta\mathrm{P_1O_2B}\text{ 的底}\right) \\
&= \left(\frac{\pi-2\theta_2}{2\pi}\right)\times\pi r_2{}^2 - \frac{1}{2}\left(\overline{O_2H_2}\times\overline{BP_1}\right) \\
&= \left(\frac{\pi-2\theta_2}{2}\right)r_2{}^2 - \frac{1}{2}(r_2\sin\theta_2)(2r_2\cos\theta_2) = \frac{1}{2}r_2{}^2[(\pi-2\theta_2)-2\sin\theta_2\cos\theta_2] \\
&= \frac{1}{2}r_2{}^2[(\pi-2\theta_2)-2\sin2\theta_2]\ (\text{倍角公式})
\end{aligned}
$$

結論：圓O_2 $\begin{cases}\textbf{無陰影面積} = \frac{1}{2}r_2{}^2[(\pi+2\theta_2)+(\sin2\theta_2)] \\ \textbf{有陰影面積} = \frac{1}{2}r_2{}^2[(\pi-2\theta_2)-2\sin2\theta_2]\end{cases}$

當$\boldsymbol{\theta_1=\theta_2}$時，折線 $\boldsymbol{L}$ 切割兩個圓，圓$\boldsymbol{O_2}$與圓$\boldsymbol{O_1}$，陰影部分與無陰影部分面積，因為$\theta_1=\theta_2$，且圓O_1中，$b=\frac{1}{2}r_1{}^2[(\pi+2\theta_1)+\sin2\theta_1]$，$[(\pi+2\theta_1)+\sin2\theta_1]=\frac{2b}{r_1{}^2}$、$a=\frac{1}{2}r_1{}^2[(\pi-2\theta_1)-$

$\sin2\theta 1$，$\pi-2\theta 1-\sin2\theta 1=2ar12$

所以，當$\theta_1=\theta_2$，圓O_2 $\begin{cases}\textbf{無陰影面積} = \frac{1}{2}r_2{}^2[(\pi+2\theta_1)+\sin2\theta_1] = \frac{1}{2}r_2{}^2\times\frac{2b}{r_1{}^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 b \\ \textbf{有陰影面積} = \frac{1}{2}r_2{}^2[(\pi-2\theta_1)-\sin2\theta_1] = \frac{1}{2}r_2{}^2\times\frac{2a}{r_1{}^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$

(三) 折線 L 分割三個相切的圓

三個圓相切，圓O_1、圓O_2相切於 P_1，圓O_2、圓O_3相切於 P_2，且折線 L 切割這三個圓，P_1、P_2 兩點恰巧為兩個折點。折線 L 切割圓O_1於 A、P_1 兩點、切割圓O_2於 P_1、P_2 兩點、切割圓O_3於 P_2、B 兩點，三個圓的位置圖 7。

透過折線 L 切割兩相切圓所得到的結果，假設第 1 個圓O_1中有陰影、無陰影的面積，推導第 3 個圓O_3有陰影、無陰影面積。

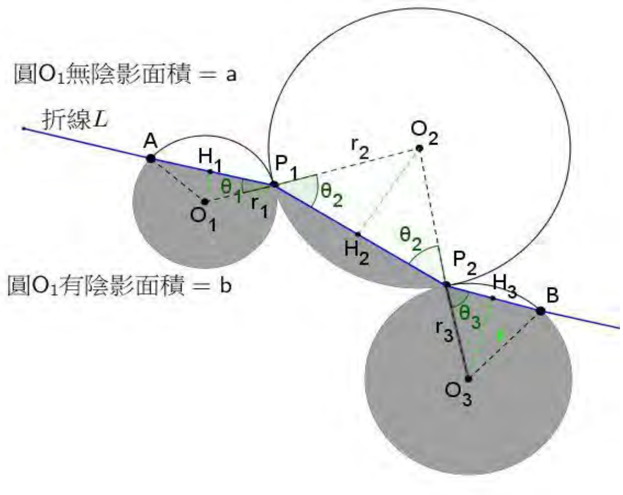


圖 7　折線分割三個相切的圓

觀察圓O_1推導圓O_2，透過前述推導兩個圓的部份，則我們可以得知

$$\text{圓}O_3\begin{cases}\textbf{無陰影面積}=\frac{1}{2}{r_3}^2[(\pi-2\theta_3)-\sin 2\,\theta_3]\\ \textbf{有陰影面積}=\frac{1}{2}{r_3}^2[(\pi+2\theta_3)+\sin 2\,\theta_3]\end{cases}$$

圓O_3中，當$\theta_1=\theta_2=\theta_3$時，折線 L 將被視爲直線 L，所以

$$\text{當}\theta_1=\theta_2=\theta_3\text{，圓}O_3\begin{cases}\textbf{無陰影面積}=\frac{1}{2}{r_3}^2[(\pi-2\theta_3)-\sin 2\,\theta_3]=\frac{1}{2}{r_3}^2\times\frac{2a}{{r_1}^2}=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 a\\ \textbf{有陰影面積}=\frac{1}{2}{r_3}^2[(\pi+2\theta_3)+\sin 2\,\theta_3]=\frac{1}{2}{r_3}^2\times\frac{2b}{{r_3}^2}=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$$

(四) 折線 *L* 分割 *k* 個相切的圓

透過由前面推導觀察，我們發現圓的個數爲奇數或是偶數會影響最後一個圓與第一個圓相互對應的有陰影面積與無陰影面積。因此，我們推導 k 個圓相切時，必須分別探討圓的個數爲奇數或是偶數的情況。

圓O_1、圓O_2相切於 P_1、圓O_2、圓O_3相切於 P_2、 、圓O_k、圓O_{k+1}相切於 P_k，且折線 L 切割這 $k+1$ 個圓，P_1、P_2、 、P_k恰巧爲 k 個折點。折線 L 切割圓O_1於 A、P_1 兩點、切割圓O_2於 P_1、P_2 兩點、、切割圓O_k於 P_{k-1}、P_k 兩點、切割圓O_{k+1}於 P_k、B 兩點。且作$\overline{O_1H_1}\perp\overline{AP_1}$於$H_1$、$\overline{O_2H_2}\perp\overline{P_1P_2}$於$H_2$ 、 、$\overline{O_kH_k}\perp\overline{P_{k-1}P_k}$於$H_k$ 、$\overline{O_{k+1}H_{k+1}}\perp\overline{P_kB}$於$H_{k+1}$。圓的位置關係如圖 8 所示。

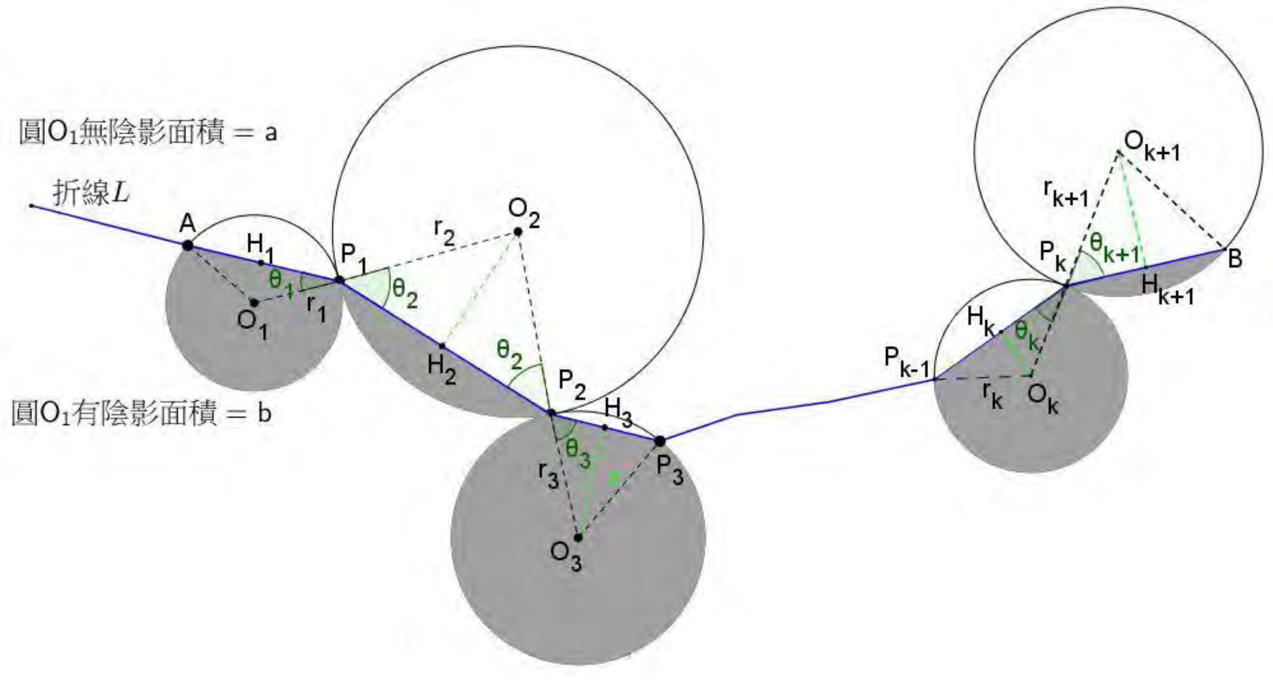


圖 8　折線切割 $k+1$ 個相切的圓

假設$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}$成立（$\boldsymbol{i}$為圓的個數），欲證明$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$成立

證明

假設i為奇數時，圓$O_k\begin{cases}\textbf{無陰影面積}=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi-2\theta_k)-\sin 2\theta_k]\\ \textbf{有陰影面積}=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi+2\theta_k)+\sin 2\theta_k]\end{cases}$成立，則當$i=\mathrm{k}+1$時，折線 L 切割圓O_{k+1}於 P_{k-1}、P_k 兩點。

圓心O_{k+1}與圓O_{k+1}上 P_k、B 形成$\Delta O_{k+1}P_k\mathrm{B}$，其中$\overline{O_{k+1}P_k}=\overline{O_{k+1}B}=r_{k+1}$，所以$\Delta O_{k+1}P_k\mathrm{B}$為等腰三角形，$\angle O_{k+1}P_k\mathrm{B}=\angle O_{k+1}\mathrm{B}P_k=\theta_{k+1}$。又$\overline{O_{k+1}H_{k+1}}\perp\overline{P_kB}$於$H_{k+1}$，因此$\overline{O_{k+1}H_{k+1}}$為圓$O_{k+1}$的弦心距。由垂徑定理與弦心距性質可知，$\overline{O_{k+1}H_{k+1}}\perp\overline{P_kB}$，$\Delta O_{k+1}P_kH_{k+1}$為直角三角形，且$\overline{O_{k+1}H_{k+1}}$平分$\overline{P_kB}$。

直角$\Delta O_{k+1}P_kH_{k+1}$中，$\angle O_{k+1}P_kH_{k+1}=\theta_{k+1}$且$\overline{H_{k+1}P_k}=\frac{1}{2}\overline{P_kB}$，由三角函數定義可知，$\sin\theta_{k+1}=\frac{\overline{O_{k+1}H_{k+1}}}{\overline{O_{k+1}P_k}}=\frac{\overline{O_{k+1}H_{k+1}}}{r_{k+1}}$、$\cos\theta_{k+1}=\frac{\overline{H_{k+1}P_k}}{\overline{O_{k+1}P_k}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{P_kB}}{r_{k+1}}=\frac{\overline{P_kB}}{2r_{k+1}}$，因此，$\overline{O_{k+1}H_{k+1}}=r_{k+1}\sin\theta_{k+1}$、$\overline{H_{k+1}P_k}=r_{k+1}\cos\theta_{k+1}$、$\overline{P_kB}=2r_{k+1}\cos\theta_{k+1}$。

假設圓O_k中，無陰影面積為$\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi-2\theta_k)-\sin 2\theta_k]$，我們想要推論圓$O_{k+1}$中，有陰影面積為$\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_{k+1})-\sin 2\theta_{k+1}]$

在圓$\boldsymbol{O_{k+1}}$中，

有陰影面積 = 扇形$\mathrm{O_{k+1}P_kB}$ 面積 − $\Delta\mathrm{O_{k+1}P_kB}$ 的面積

$$=\left(\frac{\angle\mathrm{P_kO_{k+1}B}\text{ 所對的弧度}}{2\pi}\right)\times\pi \mathrm{r}_{k+1}^2-\frac{1}{2}\left(\Delta\mathrm{O_{k+1}P_kB}\text{ 的高}\right)\left(\Delta\mathrm{O_{k+1}P_kB}\text{ 的底}\right)$$
$$=\left(\frac{\pi-2\theta_{k+1}}{2\pi}\right)\times\pi r_{k+1}^2-\frac{1}{2}\left(\overline{O_{k+1}H_{k+1}}\times\overline{P_kB}\right)$$
$$=\frac{1}{2}r_{k+1}^2(\pi-2\theta_{k+1})-\frac{1}{2}(r_{k+1}\sin\theta_{k+1})(2r_{k+1}\cos\theta_{k+1})$$
$$=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_{k+1})-2\sin\theta_{k+1}\cos\theta_{k+1}]$$
$$=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_{k+1})-\sin 2\theta_{k+1}]\text{(倍角公式)}$$

因此，圓O_{k+1}中，有陰影面積為$\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_{k+1})-\sin 2\theta_{k+1}]$成立

同理，假設圓O_k中，有陰影面積$=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi+2\theta_k)+\sin 2\theta_k]$，我們想要推論圓$O_{k+1}$中，無陰影面積為$\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi+2\theta_{k+1})+\sin 2\theta_{k+1}]$

無陰影面積 = 優弧$\mathrm{P_kB}$ 與圓心所形成的面積 + $\Delta\mathrm{O_{k+1}P_kB}$ 的面積

$$=\left(\frac{\text{優弧}\mathrm{P_kB}\text{ 所對的圓心角}}{2\pi}\right)\times\pi {\mathrm{r}_{k+1}}^2+\frac{1}{2}\left(\Delta\mathrm{O_{k+1}P_kB}\text{ 的高}\right)\left(\Delta\mathrm{O_{k+1}P_kB}\text{ 的底}\right)$$
$$=\left[\frac{2\pi-(\pi-2\theta_{k+1})}{2\pi}\right]\times\pi \mathrm{r}_{k+1}^2+\frac{1}{2}\left(\overline{O_{k+1}H_{k+1}}\times\overline{P_kB}\right)$$
$$=\frac{1}{2}r_{k+1}^2(\pi+2\theta_{k+1})+\frac{1}{2}(r_{k+1}\sin\theta_{k+1})(2r_{k+1}\cos\theta_{k+1})$$
$$=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi+2\theta_{k+1})+2\sin\theta_{k+1}\cos\theta_{k+1}]$$
$$=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi+2\theta_{k+1})+\sin 2\theta_{k+1}]\text{ (倍角公式)}$$

因此，圓O_{k+1}中，無陰影面積為$\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi+2\theta_{k+1})+\sin 2\theta_{k+1}]$成立，所以圓

$O_{k+1}\begin{cases}\textbf{無陰影面積}=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi+2\theta_{k+1})+\sin 2\,\theta_{k+1}]\\ \textbf{有陰影面積}=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_{k+1})-\sin 2\,\theta_{k+1}]\end{cases}$成立。

當$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k=\theta_{k+1}$時，折線 L 切割 $k+1$ 個圓之陰影部分與無陰影部分面積，

假設i爲奇數時，且$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k$，圓$O_1$中，$b=\frac{1}{2}{r_1}^2[(\pi+2\theta_1)+\sin 2\,\theta_1]$，$[(\pi+2\theta_1)+$ sin2*θ1=2br12*、*a=12r12π−2θ1−*sin2*θ1*，*π−2θ1−*sin2*θ1=2ar12*

所以，圓O_k中，

$$\textbf{無陰影面積}=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi-2\theta_k)-\sin 2\,\theta_k]=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi-2\theta_1)-\sin 2\,\theta_1]=\frac{1}{2}{r_k}^2\times\frac{2a}{{r_1}^2}=\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$$

$$\textbf{有陰影面積}=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi+2\theta_k)+\sin 2\,\theta_k]=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi+2\theta_1)+\sin 2\,\theta_1]=\frac{1}{2}{r_2}^2\times\frac{2b}{{r_1}^2}=\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$$

因此，**假設$i=k$爲奇數時**，且$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k$，圓$O_k\begin{cases}\textbf{無陰影面積}=\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a\\ \textbf{有陰影面積}=\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$成立

當$i=k+1$時，且$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k=\theta_{k+1}$，圓$O_k$中，無陰影面積$=\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$成立時，我們想要推論圓$O_{k+1}$中，有陰影面積爲$\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 a$，因爲$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k=\theta_{k+1}$，且圓$O_{k+1}$中，

$$\textbf{有陰影面積}=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_{k+1})-\sin 2\,\theta_{k+1}]=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_1)-\sin 2\,\theta_1]=\frac{1}{2}r_{k+1}^2\times\frac{2a}{{r_1}^2}$$

$$=\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 a$$

同理，當$i=k+1$時，且$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k=\theta_{k+1}$，圓$O_k$中，有陰影面積$=\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$

我們想要推論圓O_{k+1}中，無陰影面積爲$\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b$，因爲$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k=\theta_{k+1}$，

圓O_{k+1}中

$$\textbf{無陰影面積}=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi+2\theta_{k+1})+\sin 2\,\theta_{k+1}]=\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi+2\theta_1)+\sin 2\,\theta_1]=\frac{1}{2}r_{k+1}^2\times\frac{2b}{{r_1}^2}$$

$$=\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b$$

所以，$i=k+1$時，且$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k=\theta_{k+1}$，圓$O_{k+1}\begin{cases}\textbf{無陰影面積}=\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b\\ \textbf{有陰影面積}=\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 a\end{cases}$成立

同理，假設i爲偶數時，圓$O_k\begin{cases}\textbf{無陰影面積}=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi+2\theta_k)+\sin 2\,\theta_k]\\ \textbf{有陰影面積}=\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi-2\theta_k)-\sin 2\,\theta_k]\end{cases}$成立。則，當$i=k+1$時，

圓O_k、圓O_{k+1}中，折線 L 交圓O_k於P_{k-1} 、P_k兩點，交圓O_{k+1}於P_k 、B兩點，P_k爲圓O_k、圓O_{k+1}的共同切點與折線 L 的折點。我們如同上述方式推導，可以得到

圓$O_{k+1}\begin{cases}\textbf{無陰影面積} = \frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_{k+1})-\sin 2\,\theta_{k+1}]\\ \textbf{有陰影面積} = \frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi+2\theta_{k+1})+\sin 2\,\theta_{k+1}]\end{cases}$與$i = \mathrm{k}+1$時，且$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k=\theta_{k+1}$，圓$O_{k+1}\begin{cases}\textbf{無陰影面積}\text{爲}\left(\frac{r_{k+1}}{r_{k1}}\right)^2 a\\ \textbf{有陰影面積}\text{爲}\left(\frac{r_{k+1}}{r_1}\right)^2 b\end{cases}$因此假設成立。

(五) 結論：我們由上述歸納的過程中，發現折線 L 分割 k 個圓，當$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k=\theta_{k+1}$時，可以找到得到探討第一個圓至第 k 個圓各圓的陰影部分及無陰影部分的面積關係，並且將其整理如下表 4。

表 4

各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積關係

		圓的個數爲奇數	**圓的個數爲偶數**
	圓O_1	**圓O_k**	**圓O_k**
無陰影面積	a	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$
有陰影面積	b	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$

五、 探討平面切割多球，各球與第一個球的無陰影部分及有陰影部分之體積比例關係。

(一) 球缺體積公式

設球心爲空間直角坐標的原點，球缺的中心落在 x 軸上。可以把球缺看成是一個旋轉體，由半徑爲 r，高度爲 h 的弓形繞 x 軸旋轉而成。弓形的圓弧線方程式爲 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ，積分可得旋轉體體積公式如下：

$$V=\int_{r-h}^{r}\pi y^2 dx=\int_{r-h}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{r-h}^{r}=\left[r^3-r^2\left(r-h\right)-\frac{r^3}{3}+\frac{\left(r-h\right)^3}{3}\right]$$

$$=\pi\left[r^2h+\frac{-3r^2h+3rh^2-h^3}{3}\right]=\pi\left[rh^2-\frac{h^3}{3}\right]=\pi h^2\left[r-\frac{h}{3}\right]$$

故得證，球缺體積公式爲$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$。

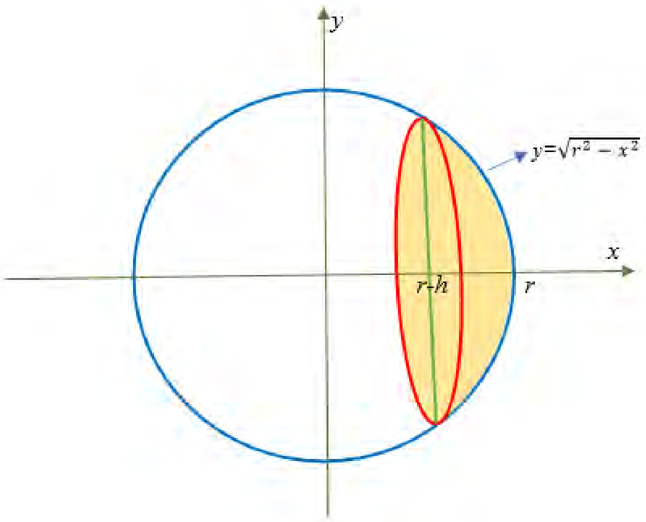


圖 9　高度爲 h 的球缺體積

透過前面推導觀察，我們發現球的個數一樣會影響相互對應的有陰影體積與無陰影體積。因此，我們推導 k 個球相切時，必須分別探討球的個數爲奇數或是偶數情況。

首先，坐標空間中，令平面 L 爲球體 O_1 、 O_2 、……、 O_k 、 O_{k+1} 的切割面，且此平面通過 O_1 與 O_2 ， O_2 與 O_3 ，……， O_k 與 O_{k+1} 相鄰兩球的切點。球的半徑分別爲 r_1 、 r_2 、……、 r_k 、 r_{k+1} ，截面至球心的距離則分別爲 h_1 、 h_2 、…、 h_k 、 h_{k+1} ，如圖 10 所示。

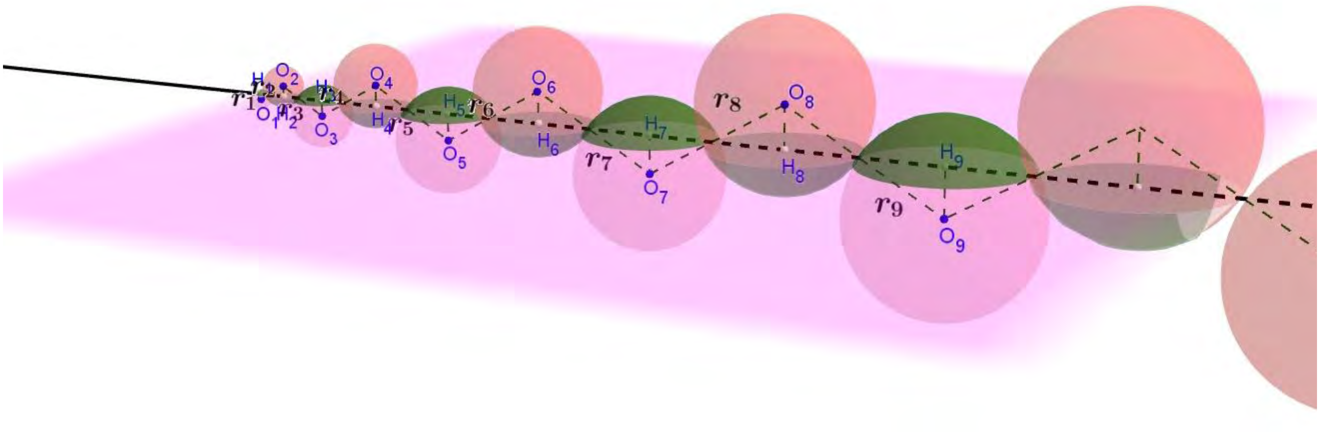


圖 10　平面切割 k+1 個兩兩相切的球

(二) 2 個球相切，第 2 個球和第 1 個球無陰影、有陰影部分的體積關係

$$\text{球 } O_1 \text{ 的球缺體積}\begin{cases}\text{無陰影部分爲 }\pi\left(r_1-h_1\right)^2\left[r_1-\dfrac{\left(r_1-h_1\right)}{3}\right]\\[2ex]\text{有陰影部分爲 }\pi\left(r_1+h_1\right)^2\left[r_1-\dfrac{\left(r_1+h_1\right)}{3}\right]\end{cases}$$

球 O_2 的球缺體積 $\begin{cases} \text{無陰影部分為} \pi\left(r_2+h_2\right)^2\left[r_2-\dfrac{\left(r_2+h_2\right)}{3}\right] \\ \text{有陰影部分為} \pi\left(r_2-h_2\right)^2\left[r_2-\dfrac{\left(r_2-h_2\right)}{3}\right] \end{cases}$

已知 $h_2:h_1=r_2:r_1$，令 $h_2=kr_2$，$h_1=kr_1\left(k\neq 0\right)$

又 $r_2+h_2:r_1+h_1=r_2:r_1$，$r_2-h_2:r_1-h_1=r_2:r_1$

比較 O_1、O_2 有無陰影的球缺體積比

O_2 無陰影部分：O_1 有陰影部分

$$=\pi\left(r_2+h_2\right)^2\left[r_2-\frac{\left(r_2+h_2\right)}{3}\right]:\pi\left(r_1+h_1\right)^2\left[r_1-\frac{\left(r_1+h_1\right)}{3}\right]$$

$$=\pi\left(r_2+h_2\right)^2\left[\frac{2r_2-h_2}{3}\right]:\pi\left(r_1+h_1\right)^2\left[\frac{2r_1-h1}{3}\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(r_2+h_2\right)^2\left(2r_2-kr_2\right):\frac{\pi}{3}\left(r_1+h_1\right)^2\left(2r_1-kr_1\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(r_2+h_2\right)^2 r_2\left(2-k\right):\frac{\pi}{3}\left(r_1+h_1\right)^2 r_1\left(2-k\right)$$

$$=\frac{\left(r_2+h_2\right)^2}{\left(r_1+h_1\right)^2}\frac{r_2}{r_1}=\left(\frac{r_2+kr_2}{r_1+kr_1}\right)^2\frac{r_2}{r_1}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\frac{r_2}{r_1}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

O_2 有陰影部分：O_1 無陰影部分

$$=\pi\left(r_2-h_2\right)^2\left[r_2-\frac{\left(r_2-h_2\right)}{3}\right]:\pi\left(r_1-h_1\right)^2\left[r_1-\frac{\left(r_1-h_1\right)}{3}\right]$$

$$=\pi\left(r_2-h_2\right)^2\left[\frac{2r_2+h_2}{3}\right]:\pi\left(r_1-h_1\right)^2\left[\frac{2r_1+h_1}{3}\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(r_2-h_2\right)^2\left(2r_2+h_2\right):\frac{\pi}{3}\left(r_1-h_1\right)^2\left(2r_1+h_1\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(r_2-h_2\right)^2\left(2r_2+kr_2\right):\frac{\pi}{3}\left(r_1-h_1\right)^2\left(2r_1+kr_1\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(r_2-h_2\right)^2 r_2\left(2+k\right):\frac{\pi}{3}\left(r_1-h_1\right)^2 r_1\left(2+k\right)$$

$$=\frac{\left(r_2-h_2\right)^2}{\left(r_1-h_1\right)^2}\frac{r_2}{r_1}=\left(\frac{r_2-kr_2}{r_1-kr_1}\right)^2\frac{r_2}{r_1}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\frac{r_2}{r_1}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

(三) 3 個球相切，第 3 個球和第 1 個球無陰影、有陰影部分的體積關係

假設球 O_1 的球缺體積 $\begin{cases} \text{無陰影部分為} a \\ \text{有陰影部分為} b \end{cases}$

球O_2的球缺體積$\begin{cases} 無陰影部分爲\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^3 b \\ 有陰影部分爲\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^3 a \end{cases}$ 由以上推論得知， 球O_3的球缺體積$\begin{cases} 無陰影部分爲\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)^3\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^3 a=\left(\dfrac{r_3}{r_1}\right)^3 a \\ 有陰影部分爲\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)^3\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^3 b=\left(\dfrac{r_3}{r_1}\right)^3 b \end{cases}$

(四) 結論：k 個球相切，第 k 個球和第 1 個球無陰影、有陰影部分的體積關係

透過上述的推論結果，以及坐標平面中圓的歸納研究所得，我們發現平面 L 分割 k 個球，第 k 個球與第一個球無陰影部分及有陰影部分的體積關係，並將其整理如下表 5。

表 5

各球與第一個球的無陰影部分及有陰影部分之體積關係

		球的個數爲奇數	**球的個數爲偶數**
	圓O_1	**圓O_k**	**圓O_k**
無陰影體積	a	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 a$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 b$
有陰影體積	b	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 b$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 a$

陸、 討論與結論

一、原題幹之解題想法說明及證明。

我們利用數學歸納法發現，若兩圓外切並同時被直線 L（直線 L 通過兩圓切點）分割時，被分割後兩圓較小塊部分的弓形具有固定比例關係。同理，兩圓較大塊部分的弓形面積也具有固定比例關係。

二、探討直線分割多圓，各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。

(一) 我們發現第 k 個圓（k 爲奇數）的無陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$，有陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$；第 k 個圓（k 爲偶數）的無陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$，有陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$。其中 a 爲第一個圓之無陰影面積，b 爲第一個圓之有陰影面積。

(二) 當圓的個數爲奇數時，第k個圓之無陰影面積會與第一個圓之無陰影面積產生比例關係。反之，當圓的個數爲偶數時，第 k 個圓之無陰影面積會與第一個圓之有陰影面積產生比例關係。

三、探討直線分割多圓，有陰影及無陰影部分的面積總和與第一個圓的面積比例關係。

(一) 我們發現 k 個圓中（k 爲奇數），有陰影面積總和m_1及無陰影面積總和m_2，與第一個圓無陰影面積 a 及有陰影面積 b 的比例關係如下：

$$m_2\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]} r_{2i-1}^2 - m_1\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]} r_{2i}^2 : m_1\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]} r_{2i-1}^2 - m_2\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]} r_{2i}^2 = a:b$$ 。

(二) 我們發現 k 個圓中（k 爲偶數），有陰影面積總和m_1及無陰影面積總和m_2，與第一個圓無陰影面積 a 及有陰影面積 b 的比例關係如下：

$$m_1\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]} r_{2i}^2 - m_2\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]} r_{2i-1}^2 : m_2\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]} r_{2i}^2 - m_1\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]} r_{2i-1}^2 = a:b$$ 。

四、探討折線分割多圓，各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。

(一) 我們發現當θ角相同的情況下，第 k 個圓（k 爲奇數）的無陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$，有陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$；第 k 個圓（k 爲偶數）的無陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 b$，有陰影面積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2 a$。其中 a 爲第一個圓之無陰影面積，b 爲第一個圓之有陰影面積。

(二) 我們發現當θ角不相等時，第k個圓（k爲偶數）的無陰影面積爲$\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi+2\theta_k)+\sin 2\theta_k]$，有陰影面積爲$\frac{1}{2}{r_k}^2[(\pi-2\theta_k)-\sin 2\theta_k]$；第 k+1 個圓的無陰影面積爲$\frac{1}{2}r_{k+1}^2[(\pi-2\theta_{k+1})-$ sin2*θk+1*，有陰影面積爲 *12rk+12π+2θk+1+*sin2*θk+1*。

五、探討平面切割多球，各球與第一個球的無陰影部分及有陰影部分之體積比例關係。

(一) 我們發現第 k 個球（k 爲奇數）的無陰影體積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 a$，有陰影體積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 b$；第 k 個球（k 爲偶數）的無陰影體積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 b$，有陰影體積爲$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 a$。其中 a 爲第一個球之無陰影體積，b 爲第一個球之有陰影體積。

(二) 當球的個數爲奇數時，第k個球之無陰影體積會與第一個球之無陰影體積產生比例關係。反之，當球的個數爲偶數時，第 k 個球之無陰影體積會與第一個球之有陰影體積產生比例關係。

經過上述研究結果發現，當 k 個圓被直線分割或是折線分割時，圓的個數（奇數或偶數個）會影響圓的面積比例關係，並且不論是無陰影部分或是有陰影部分，都存在**半徑平方比**的關係。若是 k 個球被平面分割時，則無陰影部分及有陰影部分的體積則存在**半徑立方比**的關係。此外，給定直線 L（即爲割線），並經過兩兩相切的圓的切點，我們也會發現所有圓被分割的同方向所組成的面積與另一個方向所組成的面積比，與第一個圓被分割的兩個區域面積比之間的關係與規律。

透過我們研究所得，可以將此結果應用在設計多個圓組成的霓虹彩燈，藉由每個相切圓被分割的關係與規律，搭配電子線路設計，可以控制霓虹彩燈的閃爍有一定的規律；也可以應與於物理上的折射率，因爲光在介質間的速率不同，所以當光穿透兩介質時會偏折，藉由光線偏折時，產生不同角度並搭配每個相切圓被折線分割的關係與規律。

柒、 未來展望

一、未來希望可以進一步延伸討論多條割線分割圓的問題。

二、未來希望可以進一步延伸討論多個平面切割立體圖形的問題。

三、未來希望可以進一步延伸討論曲線分割圓的問題。

捌、 參考資料

一、洪有倩(2016)。**國中數學教科書第五冊**。第二章圓形。新北市：康軒文教事業。

二、朱華偉，孫文先(2013)。**澳洲數學能力檢定試題解析與評註中學中級卷（含 2006~2013 中英文試題）**。臺北市：九章出版社。

三、孫文先(2014)。**初級中學數學自學教材－幾何**。第七單元圓。臺北市：九章出版社。

四、汪曉勤、張小明(2006)。圓之吻：阿波羅尼斯問題的歷史。**數學傳播，30(2)**，40-50。

【評語】030404

探討過相切兩圓的切點做一直線，將兩圓分割為上下兩部分，一圓的上半部與另一圓的下半部的面積比值問題。這是一個單純的比例問題。作者針對兩個圓到多個圓的情形作了討論。說明的過程稍嫌繁瑣了些。事實上，一般化的結論可以藉由乘法簡單的推導出來。富研究精神值得鼓勵，可惜題目本身的發展性不大，是不足之處。後半部關於過切點的折線的討論有點模糊了焦點。

作品海報

摘要

本研究靈感來自2013澳洲數學能力測驗中級卷第22題，我們發現直線L分割互相外切的兩圓，其無陰影面積與有陰影面積形成固定之比例關係。於是我們繼續探討直線L分割多個圓時，第k個圓與第一個圓的面積關係，得知圓的個數（k為奇數或偶數）會影響其比例，**無陰影面積及有陰影面積皆存在半徑平方比的關係**。接著，我們將總陰影部分面積固定，探討其與第一個圓之面積比例關係，並利用數學歸納法整理出關係式。

最後，我們改變直線，利用折線來進行分割，進一步探討其面積比例關係，並進一步延伸至球體，發現平面切割多個球時，**第k個球與第一個球無陰影部分及有陰影部分的體積亦存在半徑立方比的關係**。

壹、研究動機

在台灣網路科教館全國中小學科展作品中搜尋「圓」、「切割」，發現研究主題大部分都與正方形、三角形、多邊形或錐體有關，且探討圓切割的問題也多半圍繞在1到3、4個圓。

所以，看到2013澳洲數學能力測驗中級卷第22題：「半徑分別為1與2 的二個圓互相外切於點P。一條經過點P 的直線將這二個圓所圍成的區域分割為面積比為 1：2（如圖1中陰影部分：無陰影部分）的二塊。請問此直線將小圓分割成二塊的面積比（圖1中無陰影部分：陰影部分）是什麼？」，這個問題引起我想探索在k個兩兩相切圓中，一條直線分割k個圓所圍成無陰影與有陰影兩部分的面積，對第一個圓所圍成的無陰影與有陰影兩部分之面積，是否有規則可以依循呢？於是我便從此題進行發想，並與老師開始討論，從兩個圓至k個圓的面積逐一推導，進而討論圓與割線所造成之無陰影部分與有陰影部分之面積比例關係。

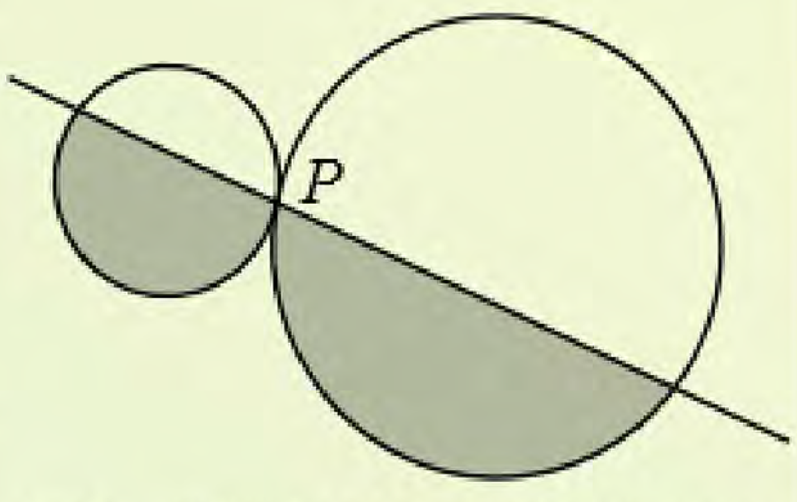


圖1　澳洲數學能力測驗中級卷第22題直線分割兩圓

貳、研究目的

一、原題幹之解題想法說明及證明。
二、探討**直線**分割**多圓**，**各圓與第一個圓**的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。
三、探討**直線**分割**多圓**，有陰影及無陰影部分的**面積總和與第一個圓**的面積比例關係。
四、探討**折線**分割**多圓**，**各圓與第一個圓**的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。
五、探討**平面**切割**多球**，**各球與第一個球**的無陰影部分及有陰影部分之體積比例關係。

參、研究設備及器材

電腦、GeoGebra軟體、小畫家

肆、名詞釋義

一~五、圓的基本性質

六、上取整函數x=min n∈Z|n≤x　下取整函數x=max n∈Z|n≤x

1.上取整函數

$$\left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil=2=2\times1+1、\left\lceil\frac{5}{2}\right\rceil=3=2\times2+1、\left\lceil\frac{7}{2}\right\rceil=4=2\times3+1\cdots\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil=2\times i+1，i=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$$

2.下取整函數

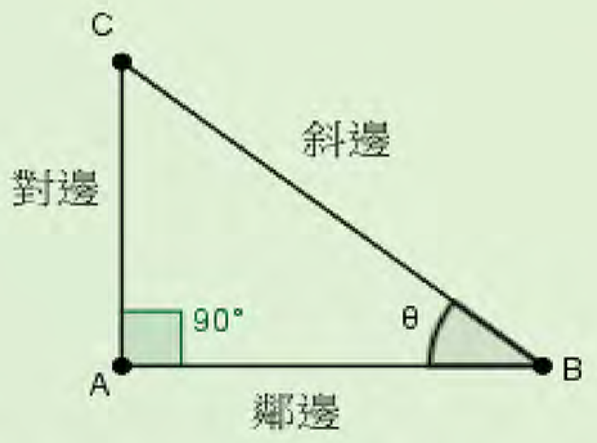
$$\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor=1、\left\lfloor\frac{5}{2}\right\rfloor=2、\left\lfloor\frac{7}{2}\right\rfloor=3、\left\lfloor\frac{9}{2}\right\rfloor=4、\left\lfloor\frac{11}{2}\right\rfloor=5\cdots\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor=2\times i，i=\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$$

七、三角函數定義：

直角ΔABC中，$\angle ABC=\theta$

正弦是對邊與斜邊的比值，$\sin\theta=\frac{對邊}{斜邊}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

餘弦是鄰邊與斜邊的比值，$\cos\theta=\frac{鄰邊}{斜邊}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$



八、三角函數性質：已知兩角分別為α、β

和角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

倍角公式：$\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

伍、研究過程與結果

一、原題幹之解題想法說明及證明。

命題：「如果兩圓相切，那麼過切點的直線將兩圓分成的兩個部分相似」

這是數學傳播季刊30卷2期探討圓之吻問題的文獻中，提到數學家帕普斯所知道的命題之一。

證明 ΔO_1AP、ΔO_2BP 為等腰三角形 → 證明 $\Delta O_1PH_1\sim\Delta O_2PH_2$ $\Delta O_1PA\sim\Delta O_2PB$ → 利用**扇形面積減三角形**算出有陰影及無陰影面積

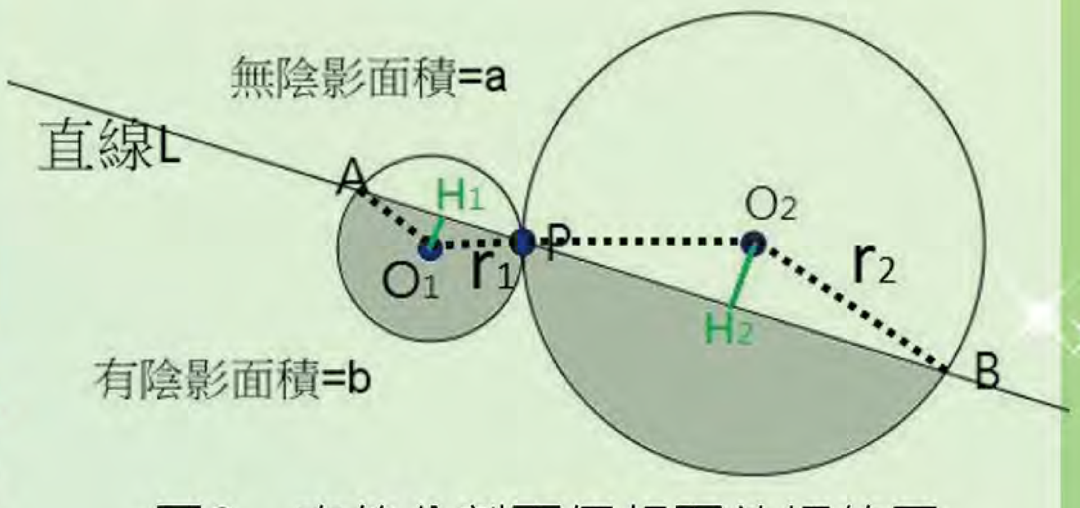


圖2　直線分割兩個相互外切的圓

結論：由證明(一)~(七)說明「**如果兩圓相切，那麼過切點的直線將兩圓分成的兩個部分相似**」此命題。也就是說，直線L切割相切的兩圓，第一個圓中較小的區域面積會與第二個圓中較小的區域面積相似且有固定比例存在。

二、探討直線分割多圓，各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。

如果**已知直線分割第一個圓有陰影與無陰影區域的面積**，為了想要知道直線分割第k個圓有陰影與無陰影區域的面積，我們先說明圓彼此相切的位置關係（如圖3所示），接著我們從兩個圓開始探討至k個圓。

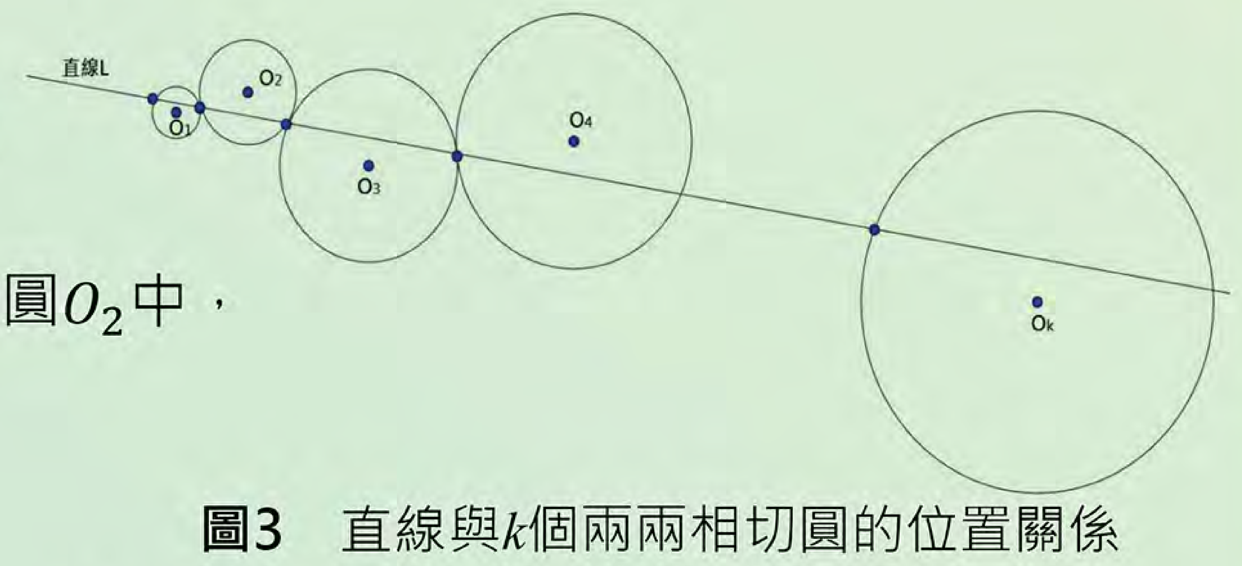


圖3　直線與k個兩兩相切圓的位置關係

(一)兩個圓互相相切，第2個圓和第1個圓有陰影、無陰影部分的面積關係

結論：假設第1個圓O_1中無陰影面積為a、有陰影面積為b，則第2個圓O_2中，

$$\begin{cases}無陰影面積為\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2b\\有陰影面積為\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2a\end{cases}$$

第2個圓O_2中有陰影部分的面積

1. 令第1個圓O_1中無陰影的面積為a，
$a=\pi\times r_1^{\,2}\left(\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}\right)$(扇形面積−三角形面積)，
第2個圓中有陰影部份為$\pi\times r_2^{\,2}\times\left(\frac{\angle PO_2B\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_2H_2}\times\overline{PB}\right)$
2. 因為$\angle BO_2P=\angle AO_1P$，所以$\frac{\angle PO_1A\text{所對的弧度}}{2\pi}=\frac{\angle PO_2B\text{所對的弧度}}{2\pi}=\frac{a+\frac{\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}}{2}}{\pi r_1^{\,2}}$
3. 由(1)、(2)知第2個圓O_2中，有陰影部分的面積為

$$\pi\times r_2^{\,2}\times\left(\frac{\angle PO_2B\text{所對的弧度}}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{O_2H_2}\times\overline{PB}\right)$$
$$=\pi r_2^2\times\frac{a+\frac{\overline{O_1H_1}\times\overline{AP}}{2}}{\pi r_1^{\,2}}-\frac{\frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)}{2}$$
$$=\frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}\left(a+\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}\right)-\frac{r_2^{\,2}}{2r_1^{\,2}}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)$$
$$=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2a+\frac{r_2^{\,2}}{2r_1^{\,2}}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)-\frac{r_2^{\,2}}{2r_1^{\,2}}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2a$$

第2個圓O_2中，無陰影部分的面積

1. 令第1個圓O_1中有陰影部分為b，
$b=\pi r_2^{\,2}\times\frac{\text{優弧}AO_1P\text{之對應角}}{2\pi}+\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}$，優弧$AO_1P$之對應角=360°$-\angle BO_2P$
2. 第2個圓O_2中，無陰影部分的面積為

$$\pi\times r_2^{\,2}\times\frac{\text{優弧}AO_1P\text{之對應角}}{2\pi}+\frac{\overline{BP}\times\overline{O_2H_2}}{2}$$
$$=\pi\times r_2^{\,2}\times\frac{b-\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}}{\pi r_1^{\,2}}+\frac{\left(\overline{BP}\times\overline{O_2H_2}\right)}{2}$$
$$=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left(\frac{b-\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}}{\pi r_1^{\,2}}\right)+\frac{\left(\overline{BP}\times\overline{O_2H_2}\right)}{2}$$
$$=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left(b-\frac{\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}}{2}\right)+\frac{\frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)}{2}$$
$$=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2b-\frac{r_2^{\,2}}{2r_1^{\,2}}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)+\frac{r_2^{\,2}}{2r_1^{\,2}}\left(\overline{AP}\times\overline{O_1H_1}\right)=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2b$$

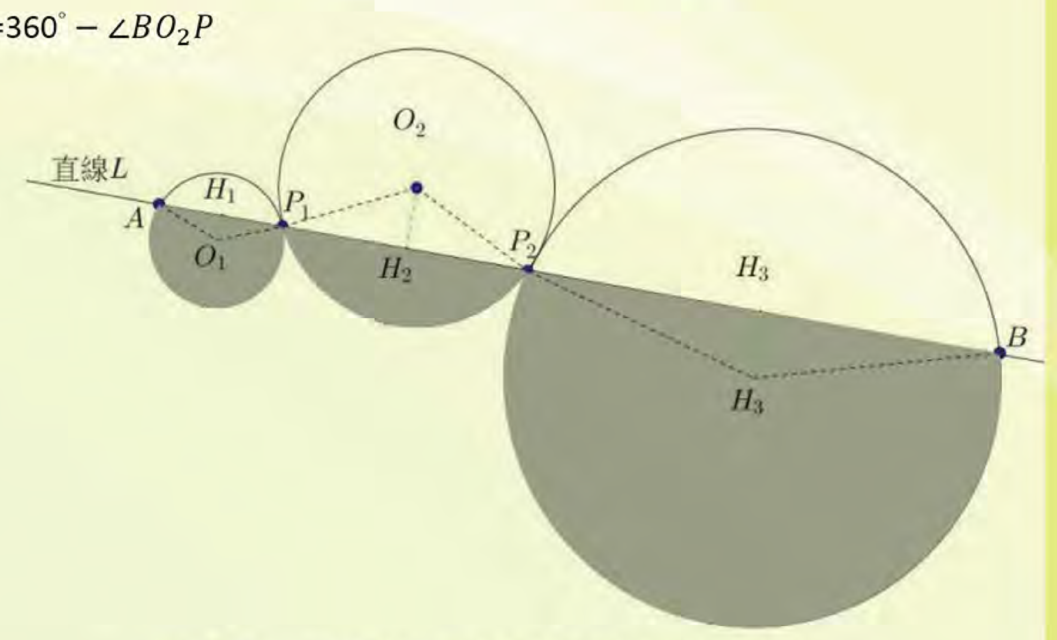


圖4　切割三個相互相切的圓

(二)三個圓相切，第3個圓和第1個圓有陰影、無陰影部分的面積關係

利用上述之推導方式得出結論，假設第1個圓O_1中無陰影面積為a、有陰影面積為b，

則第3個圓O_3中，$\begin{cases}\text{無陰影的部分為}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]a=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2a\\ \text{有陰影的部分為}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]b=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2b\end{cases}$

(三)k個圓相切，第k個圓和第1個圓有陰影、無陰影部分的面積關係

透過前面推導觀察，我們發現圓的個數為奇數或是偶數會影響最後一個圓與第一個圓相互對應的有陰影面積與無陰影面積。因此，我們推導k個圓相切時，必須分別探討圓的個數為奇數或是偶數情況。

結論：由上述歸納的過程中，我們發現直線L分割k個圓，可以找到第一個圓至第k個圓，各圓的陰影部分及無陰影部分之面積關係，並將其整理如下表1。

表1 各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積關係

		圓的個數為奇數	圓的個數為偶數
	圓O_1	圓O_k	圓O_k
無陰影面積	a	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2a$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2b$
有陰影面積	b	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2b$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^2a$

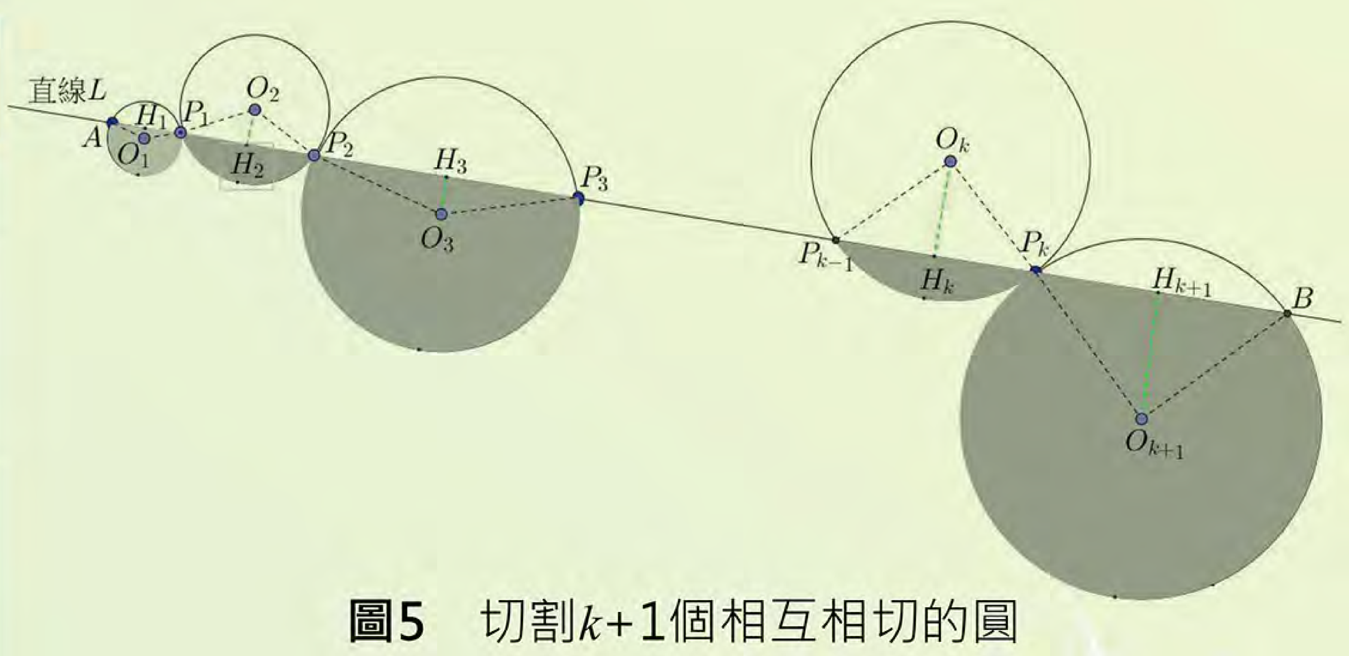


圖5　切割k+1個相互相切的圓

三、探討直線分割多圓，有陰影及無陰影部分的面積總和與第一個圓的面積比例關係。

由研究目的二得到的結果，我們接續想了解直線分割多個圓的時候，每一個圓都被分成兩部分：有陰影面積、無陰影面積。當給定這兩個部分一定比例的時候，對第一個圓無陰影面積與有陰影面積之間比例關係是如何變化。

1.i=2到i=6，i表示圓的個數

一直線分割圓O_1、圓O_2的面積為兩種情況：有陰影部分與無陰影部分。兩個圓圍成的區域分割面積比為$m_1{:}m_2$，m_1為有陰影面積，m_2為無陰影面積。其中，r_1為圓O_1半徑，r_2為圓O_2半徑。

利用**研究二**推導之公式列出等式，並化簡 → 將**限制條件（半徑必須為正數）**考慮進簡式中 → 重複前二步驟推導出2~6個圓之面積比例

結論：當圓的個數為2個時，此直線將圓O_1分割成兩塊的面積比為$\frac{a}{b}=\frac{m_1(r_2^2)-m_2(r_1^2)}{m_2(r_2^2)-m_1(r_1^2)}$。

我們由上述步驟發現此直線將小圓分割成兩塊的面積比可以嘗試找出規律，因此，將前面的推導先整理成表2。 一直線分割圓的面積為兩種情況：有陰影部分與無陰影部分，其中，圓圍成的區域分割面積比為$m_1{:}m_2$，m_1為有陰影部分、m_2為無陰影部分。

圓O_1中，$\begin{cases}\text{無陰影面積為}a\\ \text{有陰影面積為}b\end{cases}$

表2 直線分割圓的有陰影部分及無陰影部分之面積關係

圓的個數	第一個圓無陰影面積 a	:	第一個圓有陰影面積 b
2	$m_1(r_2^2)-m_2(r_1^2)$	:	$m_2(r_2^2)-m_1(r_1^2)$
3	$m_2(r_3^2+r_1^2)-m_1(r_2^2)$	:	$m_1(r_3^2+r_1^2)-m_2(r_2^2)$
4	$m_1(r_4^2+r_2^2)-m_2(r_3^2+r_1^2)$	:	$m_1(r_4^2+r_2^2)-m_2(r_3^2+r_1^2)$
5	$m_2(r_5^2+r_3^2+r_1^2)-m_1(r_4^2+r_2^2)$	:	$m_1(r_5^2+r_3^2+r_1^2)-m_2(r_4^2+r_2^2)$
6	$m_1(r_6^2+r_4^2+r_2^2)-m_2(r_5^2+r_3^2+r_1^2)$	:	$m_2(r_6^2+r_4^2+r_2^2)-m_1(r_5^2+r_3^2+r_1^2)$

2.推導k+1個圓的情況

在研究二中發現**奇數個圓與偶數個圓**時，**圓面積比例關係不同**，因此以下討論圓的個數在偶數與奇數情況下的不同。

結論：我們由歸納的過程中，發現直線L分割圓，可以得到第k個圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積關係，並且將此整理如下表3。

表3 第k個圓與第一個圓無陰影部分及有陰影部分的面積關係

	第一個圓無陰影面積 a	:	第一個圓有陰影面積 b
奇數	$m_2\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]}r_{2i-1}^2-m_1\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]}r_{2i}^2$	:	$m_1\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]}r_{2i-1}^2-m_2\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]}r_{2i}^2$
偶數	$m_1\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]}r_{2i}^2-m_2\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]}r_{2i-1}^2$	:	$m_2\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]}r_{2i}^2-m_1\sum_{i=1}^{i=\left[\frac{k}{2}\right]}r_{2i-1}^2$

四、探討折線分割多圓，各圓與第一個圓的無陰影部分及有陰影部分之面積比例關係。

原題的直線改為折線時，重新將兩圓與折線的關係，圓O_1與圓O_2相切於P_1（即為切點P_1），同時，P_1為折線L的折點。折線L分割圓O_1，且與圓O_1相交於A、P_1兩點，$\angle AP_1O_1=\theta_1$；折線L分割圓O_2，且與圓O_2相交於B、P_1兩點，$\angle BP_1O_2=\theta_2$。圓O_1中，作$\overline{O_1H_1}\perp\overline{AP_1}$於$H_1$，圓$O_2$中，作$\overline{O_2H_2}\perp\overline{P_1B}$於$H_2$。圓$O_1$的半徑為$r_1$，圓$O_2$的半徑為$r_2$。其中折線將圓$O_1$與圓$O_2$分別切割為兩部分：無陰影部分與有陰影部分，且圓$O_1$中，無陰影面積為$a$、有陰影面積為$b$（如圖6所示）。

探討折線切割圓O_1與圓O_2兩個圓之前，我們先討論折線L切割圓O_1時，當折點在圓O_1的圓周上，而且這個折點也是圓O_1與圓O_2的切點，這樣的情況下，**我們討論圓O_1中無陰影面積與有陰影面積比例關係**。

將圓的位置關係重新繪製如圖 6 → 利用倍角公式（名詞釋義八）整理扇形減三角形之簡式 → 分別推導出有陰影及無陰影面積的式子 → 重複步驟1~3求出通式

結論：我們發現直線L分割k個圓，當θ角相等時，其面積關係與研究目的二相符。當θ角不相等時，可以找到第k個圓無陰影部分及有陰影部分之面積關係，並將其整理如下表4。

表4 第k個圓（k為偶數）無陰影部分及有陰影部分之面積關係

	第k個圓	第$k+1$個圓
無陰影面積	$\frac{1}{2}r_k^2\left[\left(\pi+2\theta_k\right)+\sin 2\theta_k\right]$	$\frac{1}{2}r_{k+1}^2\left[\left(\pi-2\theta_{k+1}\right)-\sin 2\theta_{k+1}\right]$
有陰影面積	$\frac{1}{2}r_k^2\left[\left(\pi-2\theta_k\right)-\sin 2\theta_k\right]$	$\frac{1}{2}r_{k+1}^2\left[\left(\pi+2\theta_{k+1}\right)+\sin 2\theta_{k+1}\right]$

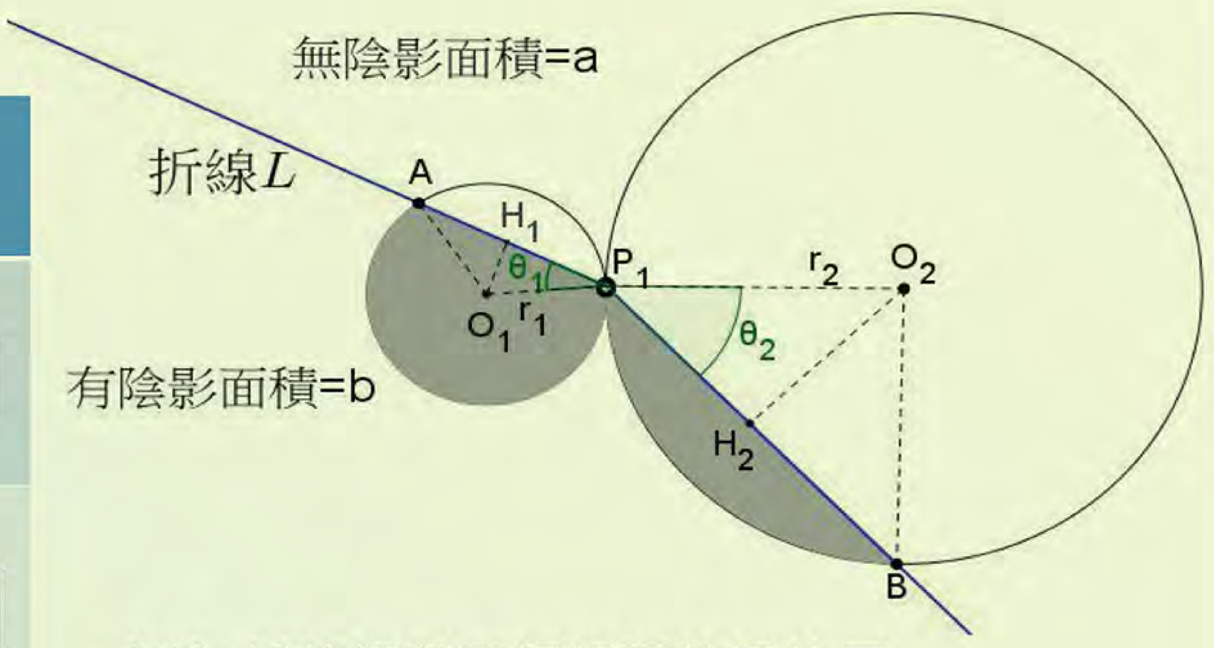


圖6 折線切割兩個相互外切的圓

五、探討平面切割多球，各球與第一個球的無陰影部分及有陰影部分之體積比例關係。

球缺體積公式：

設球心為空間直角坐標的原點，球缺的中心落在x軸上。可以把球缺看成是一個旋轉體，由半徑為r，高度為h的弓形繞x軸旋轉而成。弓形的圓弧線方程式為 $y=\sqrt{r^2-x^2}$，積分可得旋轉體體積公式 $V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$

透過前面推導觀察，**我們發現球的個數一樣會影響相互對應的有陰影體積與無陰影體積**。因此，我們推導k個球相切時，必須分別探討球的個數為奇數或是偶數情況。首先，坐標空間中，令平面L為球體O_1、O_2 、......、O_k、O_{k+1}的切割面，且此平面通過O_1與O_2，O_2與O_3，......，O_k與O_{k+1}相鄰兩球的切點。球的半徑分別為r_1、r_2、......、r_k、r_{k+1}，截面至球心的距離則分別為h_1、h_2、......、h_k、h_{k+1}，如圖7所示。

結論：我們發現平面L分割k個球，第k個球與第一個球無陰影部分及有陰影部分的體積關係，並將其整理如下表5。

表5 各球與第一個球的無陰影部分及有陰影部分之體積關係

		球的個數為奇數	球的個數為偶數
	圓O_1	圓O_k	圓O_k
無陰影體積	a	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 a$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 b$
有陰影體積	b	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 b$	$\left(\frac{r_k}{r_1}\right)^3 a$

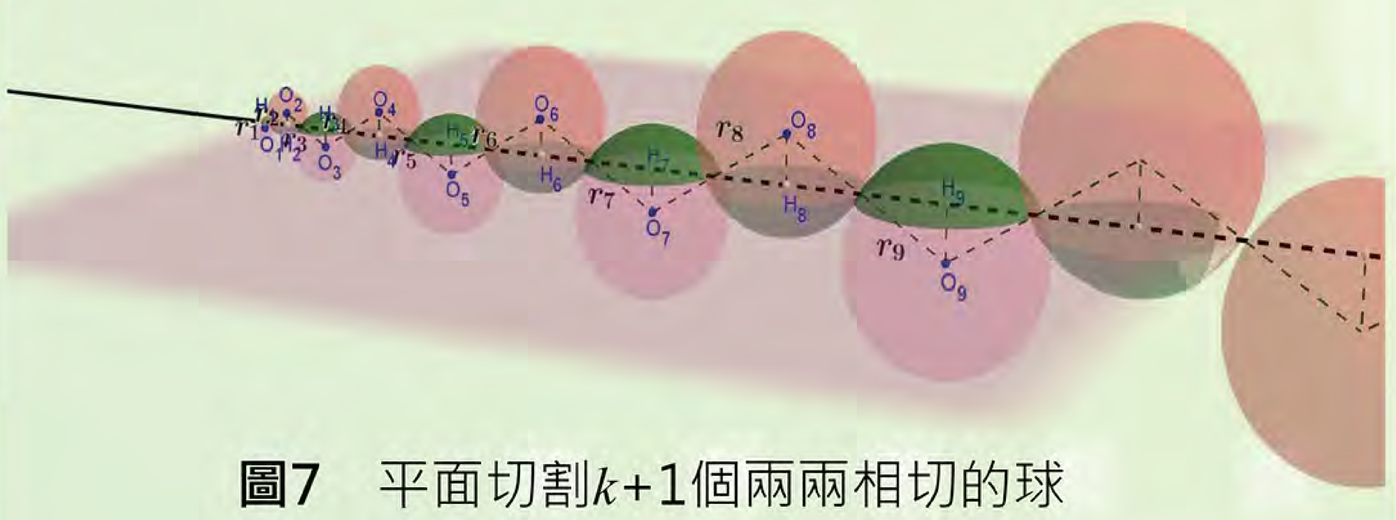


圖7 平面切割$k+1$個兩兩相切的球

陸、討論與結論

經過上述研究結果發現，當k個圓被直線分割或是折線分割時，圓的個數（奇數或偶數個）會影響**圓的面積比例關係**，並且不論是無陰影部分或是有陰影部分，都存在**半徑平方比**的關係。若是**k個球**被平面分割時，則無陰影部分及有陰影部分的體積則存在**半徑立方比**的關係。此外，給定直線L（即為割線），並經過兩兩相切的圓的切點，我們也發現所有圓被分割的同方向所組成的面積與另一個方向所組成的面積比，與第一個圓被分割的兩個區域面積比之間的關係與規律。

透過我們研究所得，可以將此結果應用在設計多個圓組成的**霓虹彩燈**，藉由**每個相切圓被分割的關係與規律**，搭配電子線路設計，可以控制霓虹彩燈的閃爍有一定的規律；也可以應用於物理上的**折射率**，因為光在介質間的速率不同，所以當光穿透兩介質時會偏折，**藉由光線偏折時，產生不同角度並搭配每個相切圓被折線分割的關係與規律**。

柒、未來展望

一、未來希望可以進一步延伸討論多條割線分割圓的問題。
二、未來希望可以進一步延伸討論多個平面切割立體圖形的問題。
三、未來希望可以進一步延伸討論曲線分割圓的問題。

捌、參考資料

一、洪有情(2016)。**國中數學教科書第五冊**。第二章圓形。新北市：康軒文教事業。
二、朱華偉，孫文先(2013)。**澳洲數學能力檢定試題解析與評註中學中級卷（含2006~2013中英文試題）**。臺北市：九章出版社。
三、孫文先(2014)。**初級中學數學自學教材 - 幾何**。第七單元圓。臺北市：九章出版社。
四、汪曉勤、張小明(2006)。圓之吻：阿波羅尼斯問題的歷史。**數學傳播，30(2)**，40-50。