# 中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

國中組　數學科

## 第三名

030403

## 多邊形自守點曲線上的翻滾

學校名稱：基隆市立中正國民中學



| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國二 李品萱 | 吳劭文 |
| 國二 劉垣妏 | 林耀南 |




關鍵詞：同側分角、自守點軌跡、共軛點

# 壹、摘要

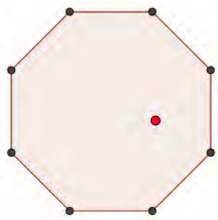
本文先證明任意 n 邊形從平面上一定點對各邊連續外翻 n 次後，所得最後 n 邊形和原 n 邊形必相似，但不一定有相似中心。假設那個定點又恰好是兩者的相似中心，本文稱此點為一個自守點。若外翻 n 次後要保持成為相似中心，則同側分角和需為$(n-2)\times90^{\circ}$。在一般△中，文中用尺規作圖找出 22 個自守點，透過這 22 點可大約勾勒出此△的自守點軌跡。緊接著利用相似中心的特性求出軌跡方程式，並畫出軌跡。n 邊形的自守點曲線有 n 條，對稱軸必為其中一條。

在正 n 邊多邊形上，本文利用對應邊長比值函數式畫出邊長比值曲線，並求出最大比值倍數，文中發現 n≥4 的正多邊形都在中心點產生最大比值，但△例外，它是在外部且比值最大為 3 倍。

# 貳、研究動機

日復一日，周而復始，重複的生活是我們這群正在求學的國中生無法逃脫的宿命。然而在這看似無聊呆板的意象裡，只要你發揮你那無限的想像力，便可以隨時自由翱翔在神秘有趣的空間中。例如有一天早自習導師還沒到時，<u>小妏</u>拿出一面心愛的八邊形玲瓏寶鏡，如圖（乙）照著自己的臉，如圖（甲），突然發現鼻頭上冒出一顆超大的青春痘(因為最近熬了幾夜做功課)，不得了，不得了，怎麼辦，怎麼消滅它呢？好朋友<u>小萱</u>說別急別急，我們不是剛學會作線對稱的尺規作圖嗎？也許我們就從這顆青春痘當起點，分別對寶鏡的八邊作線對稱，得到一面更大的八邊形寶鏡，這樣那顆痘子看起來就會小一點。而如果你還不滿意，那就連續再操作下去，直到找到一面最大的寶鏡，這時那顆痘子就小到看不出來了。最好是這樣，但就不知這樣周而復始重複的操作下去，是否有它的極限，亦或有一天發現寶鏡變小，痘子變大，那可慘了，看來我們得好好先研究一下。


圖（甲）


圖（乙）

# 參、研究目的

一、 利用尺規作圖，外翻n邊多邊形n次後，探討原多邊形和新多邊形的相關性質

二、 利用尺規作圖，盡量找出三角形的自守點

三、 探討n邊多邊形的自守點曲線計算及性質

四、 在正n邊多邊形的自守點曲線上，探討外翻後多邊形和原多邊形對應邊長比值函數式計算及其最大比值

五、 利用尺規作圖，在正△平面上畫出各整數倍放大倍數的自守點位置，並探討他們之間的關係。

## 肆、研究過程或方法

一、名詞定義

（一）外翻：從平面上的一定點P，任取$\Delta ABC$的一邊當對稱軸，例如$\overline{BC}$，用尺規作圖做出$\Delta PBC$的對稱$\Delta$，$\Delta A_1BC$，如圖(丙-1)，即$\Delta PBC$被外翻成全等的$\Delta A_1BC$，此動作叫外翻。

（二）外翻$\Delta$：經過圖(丙-1)、(丙-2)、(丙-3)後，連接$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{A_1C_1}$，得$\Delta A_1B_1C_1$，此$\Delta A_1B_1C_1$稱為從P點對原$\Delta ABC$操作出的一個外翻$\Delta$。如圖(丁)。

（三）連續外翻：在圖(丁)中，若接著再一次從P點針對$\Delta A_1B_1C_1$，操作出下一個外翻$\Delta$，$\Delta A_2B_2C_2$，則這一系列動作稱為連續外翻。

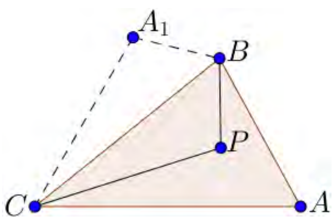
（四）相似中心：若兩多邊形相似，且所有的對應頂點兩兩連線後都共點，此點即為這兩相似圖形的相似中心，如圖（8），P點為$\Delta ABC$和$\Delta A_3B_3C_3$的相似中心。

（五）自守點：以圖(丁)中的P點為例，連續外翻三次後可得$\Delta A_3B_3C_3$，若P點為$\Delta ABC$和$\Delta A_3B_3C_3$的相似中心點，則稱此P點為$\Delta ABC$內的一個自守點，這種自守點不是到處都有。

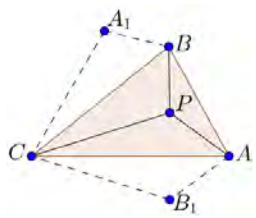
（六）自守點軌跡：$\Delta$中的自守點有無限多個，它們分布成曲線狀，這些曲線被稱為$\Delta$中所有自守點的軌跡。

（七）同側分角：如圖（戊），$\angle 1$、$\angle 3$、$\angle 5$為一組同側分角(同順時針方向)，$\angle 2$、$\angle 4$、$\angle 6$為另一組同側分角(同逆時針方向)。

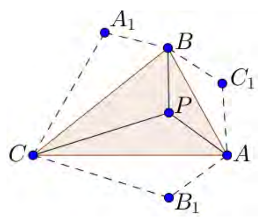
（八）共軛點：已知P為$\Delta ABC$平面上一點，$\overline{AX}$、$\overline{BY}$、$\overline{CZ}$各為分角線，D、E、F分別為P對$\overline{AX}$、$\overline{BY}$、$\overline{CZ}$的對稱點，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於Q，則稱Q為P的共軛點，如圖（己）。



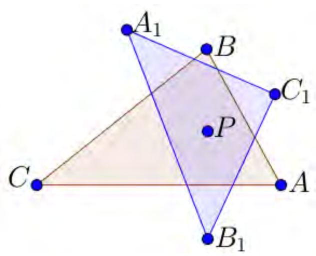
圖(丙-1)



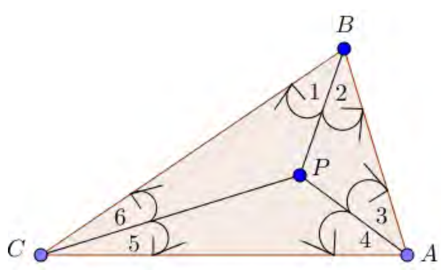
圖(丙-2)



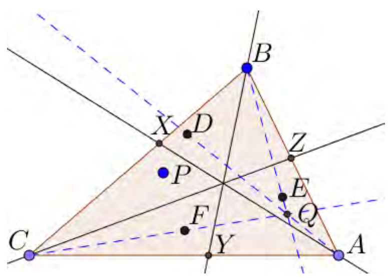
圖(丙-3)



圖(丁)



圖（戊）

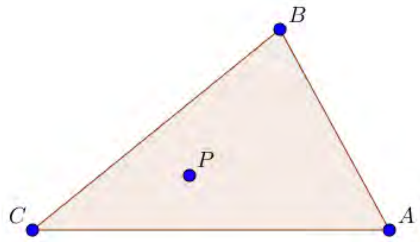


圖(己)

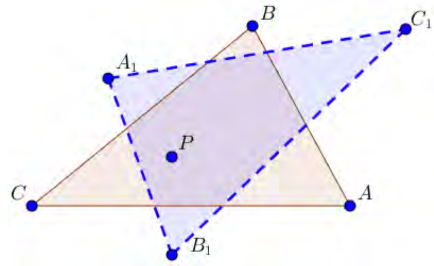
二、n邊形從平面上任一定點P處外翻n次後，會與原多邊形相似

（一）三角形中，從定點P，依尺規作圖操作連續外翻三次，舉兩個例子，示範如下：

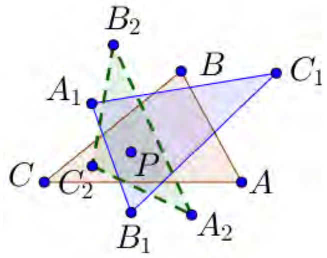
例1、 P為任意點，連續外翻，如圖（1）～（4），得$\Delta A_3B_3C_3 \sim \Delta ABC$ 恆成立，但P非相似中心。



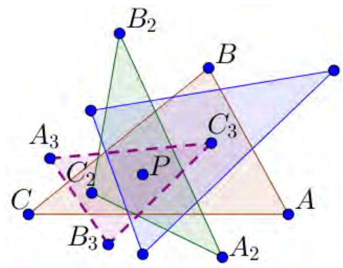

圖（1）原圖




圖（2）第一次外翻

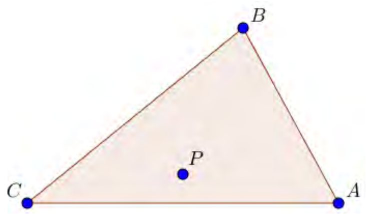



圖（3）第二次外翻

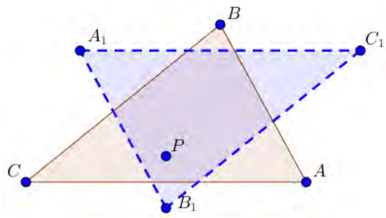



圖（4）第三次外翻$\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$

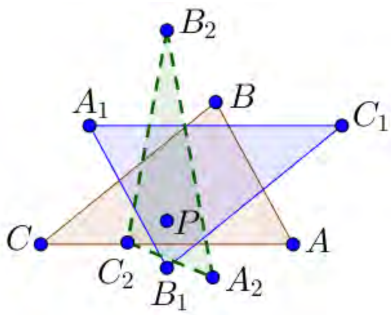
例 2、當 P 在外心處，連續外翻，如圖（5）～（8），得$\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$ 恆成立，值得注意的是此時 P 為兩者的相似中心



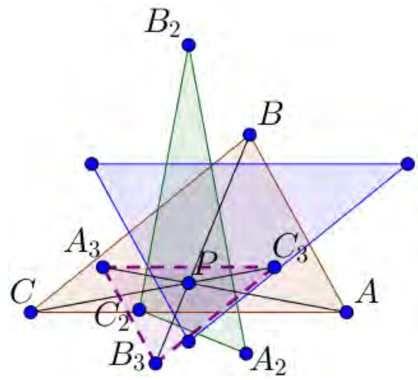

圖（5）原圖




圖（6）第一次外翻




圖（7）第二次外翻

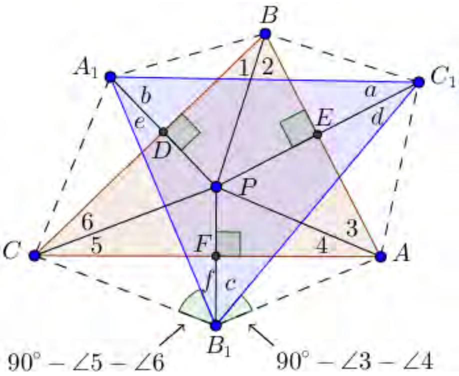



圖（8）第三次外翻，$\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle ABC$

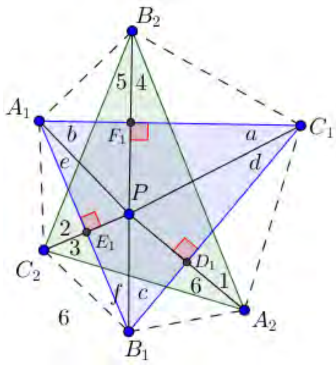
發現：（1）原三角形經由三次外翻後其圖形會與原圖形相似，如圖（4）、（8）。

（2）圖(4)中，明顯的看出C、P、$C_3$不共線，故P點不是$\triangle ABC$和$\triangle A_3B_3C_3$的相似中心。

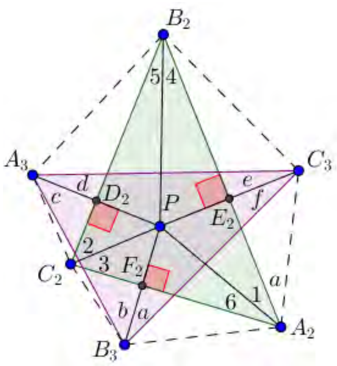
（3）當P點在外心上時，外翻三次圖形會與原圖形相似，且P恰為相似中心，如圖(8)，此時我們稱P點即為一個**自守點**。



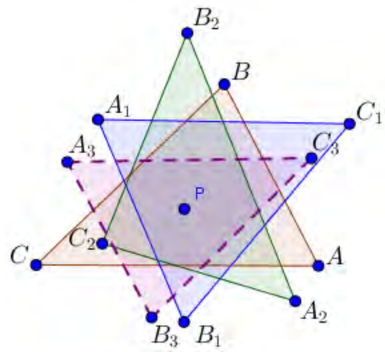

圖（9）P為平面上任一點，作第一次外翻




圖（10）作第二次外翻




圖（11）作第三次外翻




圖（12）$\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$

已知：$\triangle ABC$為任意三角形，P為平面上任一點

求證：原圖形與外翻三次圖形為相似圖形

證明如下:

(1)如圖(9)，設$\angle PBC = \angle 1 = a^\circ$，$\angle PBA = \angle 2 = b^\circ$，$\angle PAB = \angle 3 = c^\circ$，$\angle PAC = \angle 4 = d^\circ$，$\angle PCA = \angle 5 = e^\circ$，$\angle PCB = \angle 6 = f^\circ$ 分別作第一次外翻得$\triangle A_1B_1C_1$

(2)第一次外翻時，$\triangle AB_1C_1$為一等腰三角形$\therefore \angle B_1AC_1 = (2c+2d)^\circ$(頂角)，

$\therefore \angle C_1B_1A = (180^\circ - 2c - 2d) \div 2 = (90-c-d)^\circ$ (底角)

(3) $\because \triangle B_1FA$ 為直角三角形，$\therefore \angle FB_1C_1 = (90-d-(90-c-d))^\circ = c^\circ$

(4)同理 $\triangle B_1CA_1$為一等腰三角形

$\therefore \angle A_1CB_1 = (2e+2f)^\circ$(頂角)，$\therefore \angle CB_1A_1 = (90-e-f)^\circ$(底角)

(5) $\because \triangle B_1FC$ 為直角三角形

$\therefore \angle FB_1A_1 = \left(90-e-(90-e-f)\right)^\circ = f^\circ$，故$\angle A_1B_1C_1 = (c+f)^\circ$

(6)$\angle B_1A_1C_1$和$\angle A_1C_1B_1$以此類推

如圖（9），得$\angle B_1A_1C_1 = (b+e)^\circ$，$\angle A_1C_1B_1 = (a+d)^\circ$

(7)第二次外翻時，$\triangle B_2C_1A_2$為一等腰三角形，如圖（10）

$\therefore \angle B_2C_1A_2 = (2a+2d)^\circ$(頂角)，$\therefore \angle B_2A_2C_1 = (90-a-d)^\circ$(底角)

(8) $\because \triangle C_1D_1A_2$為直角三角形，$\therefore \angle D_1A_2B_2 = \left(90-d-(90-a-d)\right)^\circ = a^\circ$

(9) $\triangle B_1C_2A_2$為一等腰三角形

$\therefore \angle C_2B_1A_2 = (2c+2f)^\circ$(頂角)，$\therefore \angle C_2A_2B_1 = (90-c-f)^\circ$(底角)

(10) $\because \triangle B_1D_1A_2$為直角三角形

$\therefore \angle D_1A_2C_2 = (90 - c - (90 - c - f))^{\circ} = f^{\circ}$，$\angle B_2A_2C_2 = (a + f)^{\circ}$

(11) $\angle C_2B_2A_2$和$\angle A_2C_2B_2$以此類推

如圖(10)，得$\angle C_2B_2A_2 = (e + d)^{\circ}$，$\angle A_2C_2B_2 = (b + c)^{\circ}$

(12)第三次外翻以此類推

如圖(11)，得$\angle B_3C_3A_3 = (e + f)°$ $\angle C_3A_3B_3 = (c + d)°$ $\angle A_3B_3C_3 = (a + b)°$

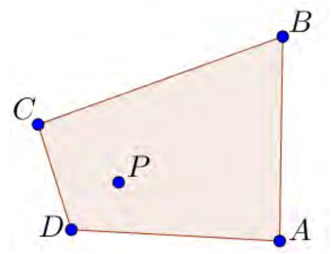
明顯的知道$\angle CBA = \angle C_3B_3A_3$，$\angle BCA = \angle B_3C_3A_3$，$\angle BAC = \angle B_3A_3C_3$

因此由AAA相似性質知$\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle ABC$，如圖(12)

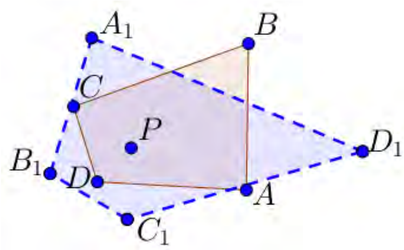
**性質一:從平面上任一點開始外翻，連續外翻 △三次，最後得到的外翻△必和原△相似。**

(二)、四邊形：外翻幾次會與母四邊形相似？

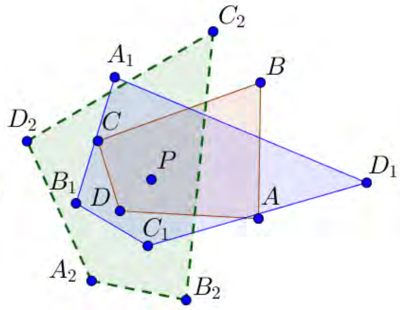
例 1：P為平面上任一定點，連續外翻四邊形 ABCD 四次，如圖（13）~（17）得 $A_4B_4C_4D_4 \sim ABCD$



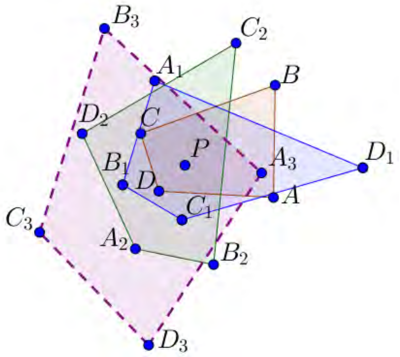

圖(13)P為任一定點



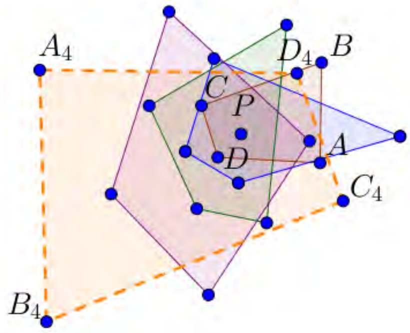

圖(14) 第一次外翻




圖(15) 第二次外翻



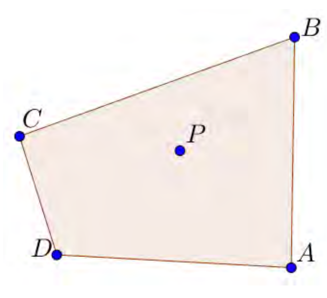

圖(16) 第三次外翻



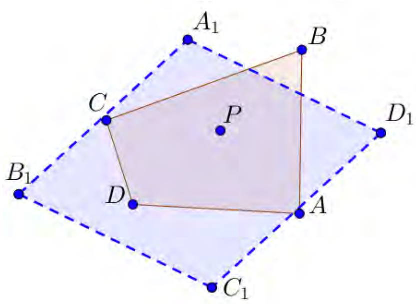

圖(17) 第四次外翻，A、P、$A_4$不共線

$ABCD \sim A_4B_4C_4D_4$，P非自守點

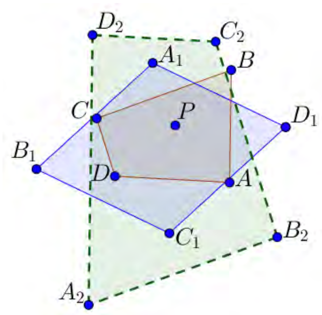
例 2：若ABCD有外心，且P在外心上，則連續外翻四次，如圖（18）~圖（22），得 $A_4B_4C_4D_4 \sim ABCD$，且P為兩者相似中心



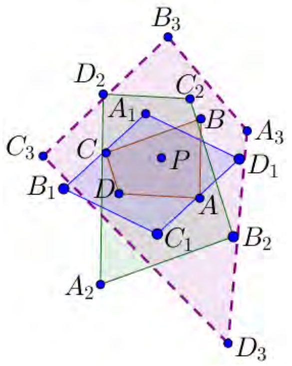

圖(18)取P為外心



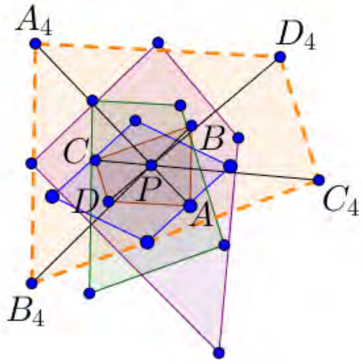

圖(19) 第一次外翻




圖(20) 第二次外翻




圖(21) 第三次外翻

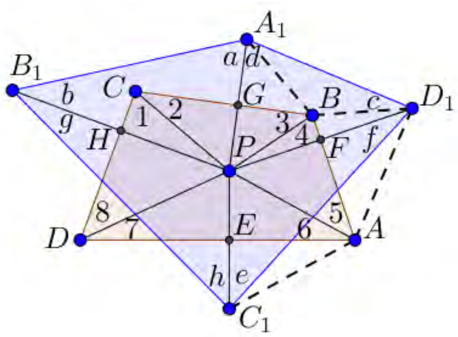



圖(22) 第四次外翻，P為相似中心

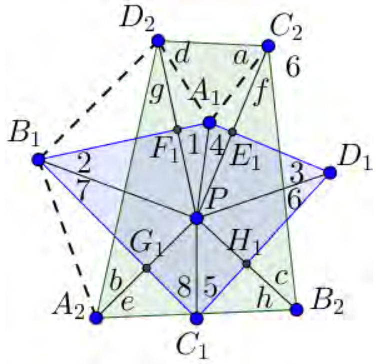
$ABCD \sim A_4B_4C_4D_4$，P 為自守點

發現：（1）四邊形經由四次外翻後其圖形會與原圖形相似，如圖（17）、（22）

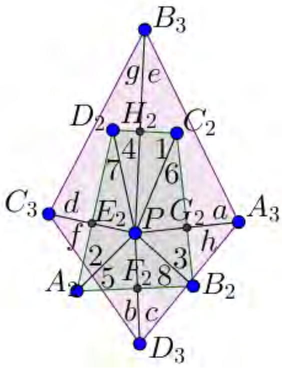
（2）若四邊形有外心，當P點在外心上時，外翻四次圖形會與原圖形相似，且P恰為相似中心，如圖(22)，此時P點即為一個**自守點**。



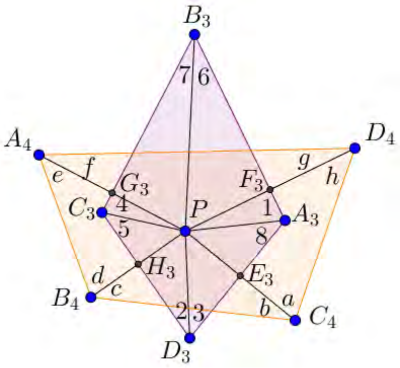

圖(23)第一次外翻



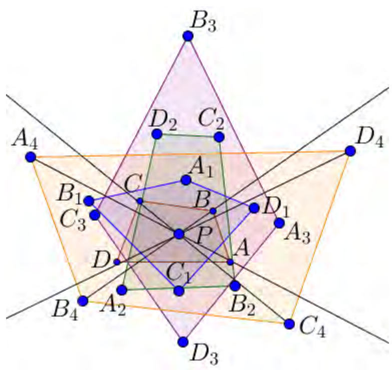

圖(24) 第二次外翻




圖(25) 第三次外翻




圖(26) 第四次外翻




圖(27)$ABCD \sim A_4B_4C_4D_4$，P非自守點

已知：如圖(23)，P為平面上任一定點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$分別將$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$分成兩角

設$\angle PCD = a = \angle 1$，$\angle PCB = b = \angle 2$，$\angle PBC = c = \angle 3$，

$\angle PBA = d = \angle 4$，$\angle PAB = e = \angle 5$，$\angle PAD = f = \angle 6$，

$\angle PDA = g = \angle 7$，$\angle PDC = h = \angle 8$接著分別用$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$、$\overline{AB}$作Ｐ線對稱點，分別為$A_1$、$B_1$、$C_1$、$D_1$，依同法，連續外翻得$A_2B_2C_2D_2$、$A_3B_3C_3D_3$、$A_4B_4C_4D_4$。

求證：$ABCD \sim A_4B_4C_4D_4$

證明：(1)外翻第一次時，$\triangle A_1BD_1$為一等腰三角形

$\therefore \angle A_1BD_1$為$(360-2c-2d)°$(頂角)，

$\therefore \angle A_1D_1B$ 為$(-90+c+d)°$(底角)

(2) $\because \triangle BD_1F$ 為直角$\triangle$，$\therefore \angle FD_1A_1 = (90-d+(-90+c+d))^{\circ} = c^{\circ}$

(3) $\triangle C_1D_1A$ 為一等腰三角形

$\therefore \angle D_1AC_1$頂角為$(2e+2f)^{\circ}$(頂角)　$\therefore \angle C_1D_1A$ 為$(90-e-f)^{\circ}$(底角)

(4) $\because \triangle D_1FA$ 為直角三角形

$\therefore \angle FD_1C_1 = (90-e-(90-e-f))^{\circ} = f^{\circ}$，故$\angle A_1D_1C_1 = (c+f)$

(5)$\angle D_1A_1B_1$和$\angle B_1C_1D_1$和$\angle A_1B_1C_1$以此類推，如圖(23)

(6)外翻第二次時，$\triangle D_2B_1A_2$為一等腰三角形

$\therefore \angle D_2B_1A_2$為$(2b+2g)^{\circ}$(頂角)，$\therefore \angle B_1D_2A_2$為$(90-b-g)^{\circ}$(底角)

(7) $\because \triangle B_1F_1D_2$為直角$\triangle$，$\therefore \angle F_1D_2A_2 = (90-b-(90-b-g))^{\circ} = g^{\circ}$

(8) $\triangle A_1C_2D_2$為一等腰三角形

$\therefore \angle D_2A_1C_2$為$(360-2a-2d)^{\circ}$(頂角)，

$\therefore \angle A_1C_2D_2$為$(-90+a+d)^{\circ}$(底角)

(9) $\because \triangle A_1F_1D_2$為直角三角形

$\therefore \angle F_1D_2A_1 = (90-a+(-90+a+d))^{\circ} = d^{\circ}$，故$\angle A_2D_2C_2$為$(d+g)^{\circ}$

(10)$\angle D_2A_2B_2$和$\angle B_2C_2D_2$和$\angle C_2B_2A_2$以此類推，如圖(24)

(11)外翻第三次以此類推，如圖(25)

(12)外翻第四次以此類推，如圖(26)

(13) $\because \triangle PA_4B_4 \sim \triangle PAB$(AA 相似)　$\triangle PB_4C_4 \sim \triangle PBC$(AA 相似)

$\triangle PC_4D_4 \sim \triangle PCD$(AA 相似)　$\triangle PD_4A_4 \sim \triangle PDA$(AA 相似)

$\therefore \overline{PA} : \overline{PA_4} = \overline{AB} : \overline{A_4B_4}$　又$\overline{PA} : \overline{PA_4} = \overline{DA} : \overline{D_4A_4}$

$\overline{PB} : \overline{PB_4} = \overline{BC} : \overline{B_4C_4}$　$\overline{PB} : \overline{PB_4} = \overline{BA} : \overline{B_4A_4}$

$\overline{PC} : \overline{PC_4} = \overline{CD} : \overline{C_4D_4}$　$\overline{PC} : \overline{PC_4} = \overline{CB} : \overline{C_4B_4}$

$\overline{PD} : \overline{PD_4} = \overline{DA} : \overline{D_4A_4}$　$\overline{PD} : \overline{PD_4} = \overline{DC} : \overline{D_4C_4}$

$\therefore \overline{AB} : \overline{A_4B_4} = \overline{BC} : \overline{B_4C_4} = \overline{CD} : \overline{C_4D_4} = \overline{DA} : \overline{D_4A_4}$

又四內角對應相等，故$A_4B_4C_4D_4 \sim ABCD$，如圖(27)，同理可推至ｎ邊形

**性質二：從平面上任一定點起，外翻任凸四邊形四次後的四邊形必與原四邊形相似。**

**性質三：從平面上一定點起，外翻任意凸 n 邊形 n 次後的 n 邊形必與原 n 邊形相似。**

三、外翻 n 邊形n次而能使最後n邊形和原n邊形有相似中心的條件探討

當 P 為相似中心時，這 n 邊多邊形的同側分角和有一個漂亮的關係式

（一)、三角形

(1)在本證明中常常出現一個算式是"在等腰$\Delta$中，若頂角角度為$2x+2y$度，則兩底角必為$90-x-y$度"

(2)在圖(9)中，觀察五邊形$BPB_1AC_1$，得

$$\angle BPB_1 = 540° - (90° - a - b) - a - d - (90° - c - d) - 2c - 2d - (90° - c - d) - c = 270° - b - c - d$$

(3)在圖(10)中，觀察五邊形$B_2PB_1C_2A_1$得

$$\angle B_2PB_1 = 540° - (90° - b - e) - e - 2f - (90° - c - f) - c - b - (90° - b - e) - 2b - 2e = 270° - f - b - e$$

(4)在圖(11)中，觀察五邊形$B_2PB_3A_2C_3$得

$$\angle B_2PB_3 = 540° - 2d - (90° - e - d) - e - f - (90° - a - f) - 2a - 2f - (90° - a - f) - a = 270° - a - f - d$$

(5)因要使得三次外翻的$\overrightarrow{PB}$和$\overrightarrow{PB_3}$共線，就必須要依順時針(當然逆時針計算也可以)從$\overrightarrow{PB}$轉成$\overrightarrow{PB_1}$再轉成$\overrightarrow{PB_2}$最後再轉成$\overrightarrow{PB_3}$，即共要轉成**一圈半** 540°，方可使得$\overrightarrow{PB}$和$\overrightarrow{PB_3}$成一直線，因此令$\angle BPB_1 + \angle B_1PB_2 + \angle B_2PB_3 = 540°$

即 $270° - b - c - d + 270° - f - b - e + 270° - a - f - d = 540°$

$810° - a - 2b - c - 2d - e - 2f = 540°$

$810° - (a + b + c + d + e + f) - b - d - f = 540°$

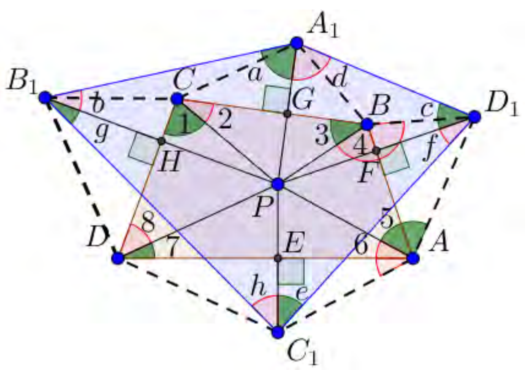
$810° - 180° - b - d - f = 540°$

$\therefore$ 同側分角和 $b + d + f = 90°$

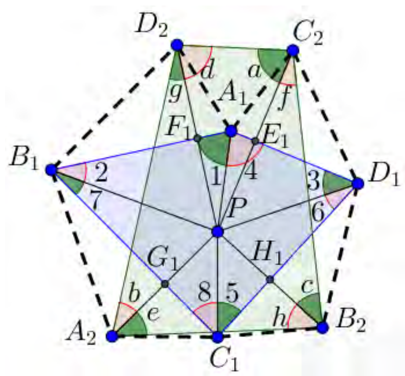
此時 $a + c + e = 180° - (b + d + f) = 180° - 90° = 90°$

**性質四: 若$\Delta$ ABC和 $\Delta$ $A_3B_3C_3$有共同的相似中心 (即自守點)，則同側分角和必為 $90^{\circ}$，即$a+c+e=90^{\circ}$，$b+d+f=90^{\circ}$**

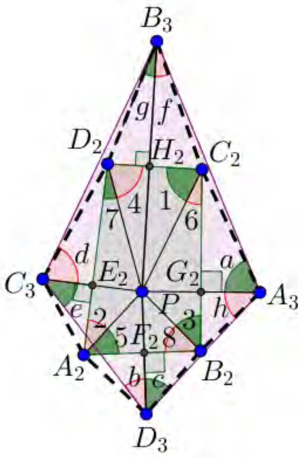
（二）四邊形



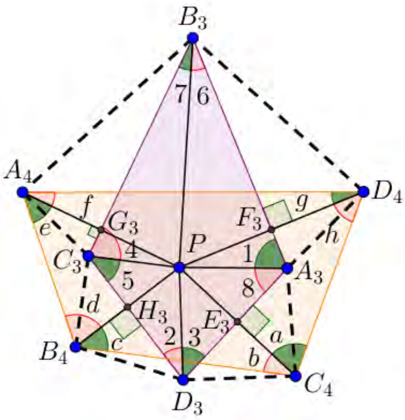

圖(28)



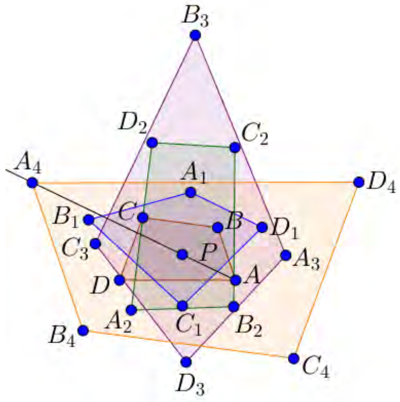

圖(29)




圖(30)




圖(31)




圖(32)

已知：P為平面上任一定點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$將各內角分成∠1、∠2、∠3、∠4、∠5、∠6、∠7、∠8，分別為a、b、c、d、e、f、g、h度數，如圖(28)，連續四次將四邊形外翻成$A_1B_1C_1D_1$、$A_2B_2C_2D_2$、$A_3B_3C_3D_3$、$A_4B_4C_4D_4$

求證：$A_4B_4C_4D_4$和ABCD的相似中心點仍是P點的條件是$a+c+e+g=180^\circ$或$b+d+f+h=180^\circ$

證明：(1)四邊形ABCD第一次外翻$A_1B_1C_1D_1$，如圖(28)，觀察六邊形$PCA_1D_1AC_1$中

$\angle CPC_1 = 720^\circ-(2b+90^\circ-b+d+c+90^\circ-e+2e+2f+90^\circ-f)$

$= 450^\circ-b-c-d-e-f$ ―――――――― ①

(2)接著再外翻成$A_2B_2C_2D_2$，如圖(29)，觀察六邊形$PC_1A_2B_1D_2C_2$中

$\angle C_1PC_2 = 720^\circ-(2h+90^\circ-h+90^\circ-g+2g+2b+90^\circ-b-d+a)$

$= 450^\circ-h-g-b-d-a$ ――――――――― ②

(3)再外翻成$A_3B_3C_3D_3$，如圖(30)，觀察六邊形$PC_2A_3D_3A_2C_3$中

$\angle C_2PC_3 = 720^\circ-(2f+90^\circ-f+h+c+90^\circ-e+2e+2b+90^\circ-b)$

$= 450^\circ-f-h-c-e-b$ ――――――――― ③

(4)最後外翻成$A_4B_4C_4D_4$，如圖(31)，觀察六邊形$PC_3A_4B_3D_4C_4$中

$\angle C_3PC_4 = 720^\circ-(2d+90^\circ-d+90^\circ-g+2g+2f+90^\circ-f+h+a)$

$= 450^\circ-d-g-f-h-a$ ―――――――― ④

(5)欲使 P 點為ABCD和$A_4B_4C_4D_4$的相似中心，要且必要使$\overrightarrow{PA}$順時針(逆時針亦可)旋轉**兩圈半** 900°和$\overrightarrow{PA_4}$保持一直線

兩圈半 $= 360^\circ\times 2+180^\circ = 900^\circ$，故①＋②＋③＋④ $= 900^\circ$

化簡得$1800^\circ-(2a+3b+2c+3d+2e+3f+2g+3h) = 900^\circ$

$\therefore 1800^\circ-(720^\circ+b+d+f+h)=900^\circ$，$\therefore b+d+f+h = 180^\circ$ 得證

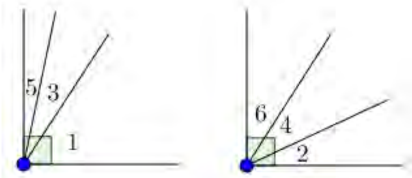
**性質五：在連續外翻四邊形四次的操作中，起點P是原四邊形和第四次外翻四邊形的自守點(相似中心)，則 $\mathbf{a+c+e+g=180^\circ}$，或 $\mathbf{b+d+f+h=180^\circ}$**

**性質六：在連續外翻 n 邊形 n 次的操作中，起點P是原 n 邊形和第 n 次外翻 n 邊多邊形的自守點（相似中心），則**

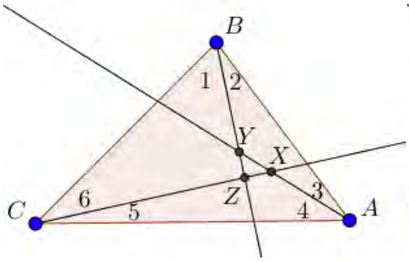
（１）同一對應線段必旋轉$(2n-3)\times 180°$，$n\geq 3$，例如$\overline{PA}$轉成$\overline{PA_4}$

（２）分角和等於$(n-2)\times 90°$，$n\geq 3$（證明仿照三邊形、四邊形）

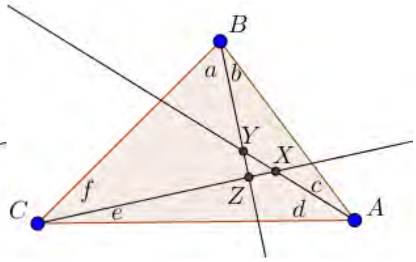
（三）反過來思考，性值四、五、六的逆性質是否會成立？例如：在圖（33-1）的兩直角中，我們利用尺規作圖，先將兩個直角隨意剖開成$\angle 1$、$\angle 3$、$\angle 5$和$\angle 2$、$\angle 4$、$\angle 6$再畫到∆內，如圖（33-2），觀察到很可能$\overline{AX}$、$\overline{BY}$、$\overline{CZ}$三條分界線不一定會交於同一點 P，故逆性質不成立，但要使這三線都通過P點，使P點為相似中心，我們發現要有一個條件，說明如下：



圖(33-1)



圖(33-2)



圖(33-3)

在圖（33-3），由∆內角和定理知$\angle BZC = 180° - a - f$，$\angle BYA = 180° - b - c$

再由∆ BZC 及 ∆ BCY的正弦定理知 $\frac{\overline{BZ}}{\sin f} = \frac{\overline{BC}}{\sin(180°-a-f)}$，$\frac{\overline{BY}}{\sin c} = \frac{\overline{BA}}{\sin(180°-b-c)}$

因為$a+c+e=90°$或$b+d+f=90°$並不一定保證三線共點，這樣就沒有相似中心了，所以我們加入條件，令$\overline{BZ}=\overline{BY}$，即可保證X、Y、Z重合

故 $\frac{\sin f\cdot\overline{BC}}{\sin(a+f)} = \frac{\sin c\cdot\overline{BA}}{\sin(b+c)}$

**性質七: 在連續外翻∆三次的操作中，起點P是原 ∆和第三次外翻∆的相似中心，若且唯若同側分角組合的角度和為90°，且$\sin f\cdot\sin(b+c)\cdot\overline{BC} = \sin c\cdot\sin(a+f)\cdot\overline{BA}$**

四、連續外翻n邊形n次的自守點軌跡探討

（一）三角形中的特殊自守點的尺規作圖操作探討

函數定義：

$Y=f^{(1)}(X)$：原∆ ABC中的X點，經第一次外翻後，對應到$\Delta A_1B_1C_1$中的Y點

$Y=f^{(2)}(X)$：$\Delta A_1B_1C_1$中的X點，經第二次外翻後，對應到$\Delta A_2B_2C_2$中的Y點

$Y=f^{(3)}(X)$：$\Delta A_2B_2C_2$中的X點，經第三次外翻後，對應到$\Delta A_3B_3C_3$中的Y點

$Y=f(X)$：原∆ ABC中的X點，經三次外翻後，對應到$\Delta A_3B_3C_3$中的Y點

甲、觀察外心、內心、垂心在外翻過程中的相互關係，說明如下:

1、當外翻起點為外心O時，O是$\Delta A_1B_1C_1$的垂心，是$\Delta A_2B_2C_2$的內心，也是$\Delta A_3B_3C_3$的外心，故O為原∆和$\Delta A_3B_3C_3$的自守點。簡述成由$f^{(1)}(外心)=垂心$，$f^{(2)}(垂心)=內心$，$f^{(3)}(內心)=外心$，推得$f(外心)=外心$

2、當外翻起點為垂心H時，H 是$\Delta A_1B_1C_1$的內心，是$\Delta A_2B_2C_2$的外心，也是$\Delta A_3B_3C_3$的垂心，故H為原∆ 和$\Delta A_3B_3C_3$的自守點。簡述成由$f^{(1)}(垂心)=內心$，$f^{(2)}(內心)=外心$，$f^{(3)}(外心)=垂心$，推得$f(垂心)=垂心$

3、當外翻起點為內心I時，I是$\triangle A_1B_1C_1$的外心，是$\triangle A_2B_2C_2$垂心，也是$\triangle A_3B_3C_3$的內心，故I亦為原$\triangle$ 和 $\triangle A_3B_3C_3$的自守點。簡述成由$f^{(1)}(\text{內心}) =$ 外心，$f^{(2)}(\text{外心}) =$ 垂心，$f^{(3)}(\text{垂心}) =$ 內心，推得$f(\text{內心}) =$內心

4、如圖(34)，外心O、垂心H、內心I依順時針方向輪替在$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$之間且過程中無論何時當輪到外翻外心狀態時，所翻成的$\triangle$和當下$\triangle$保持全等。(以上各類$\triangle$的心之間的外翻證明見附件一、二)


圖(34)外翻過程中三心循環「接棒」

**性質八：若O、H、I分別為$\triangle$的外心、垂心、內心，定義$Y = f(X)$為將原$\triangle$中的X點外翻三次後對應到新$\triangle$的Y點，則在外翻的過程中，O、H、I三心名稱循環變換，且 f(外心)=外心、f(內心)=內心、f(垂心)=垂心，如圖(34)。**

**性質九：承上個性質，在輪動的外心、垂心、內心外翻操作時，當輪到從外心做外翻時，所翻成的$\triangle$和當下$\triangle$保持全等，全等自然面積相等。**

乙、一般三角形中，**自守點**和對應的**共軛點**的關係探討

已知：P為$\triangle ABC$的一個自守點，如圖(35)。

求作：P 點的共軛點，並證明此共軛點亦為自守點

作法：（1）分別作$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的分角線$\overrightarrow{AX_a}$ $\overrightarrow{BX_b}$ $\overrightarrow{CX_c}$

（2）過 P 分別作$\overrightarrow{AX_a}$ $\overrightarrow{BX_b}$ $\overrightarrow{CX_c}$的對稱點$Y_a$、$Y_b$、$Y_c$

（3）分別作$\overrightarrow{AY_a}$ $\overrightarrow{BY_b}$ $\overrightarrow{CY_c}$，相交於$P'$，則$P'$即為所求

證明：（欲證明$P'$點也是自守點）

（1）連$\overline{P'A}$、$\overline{P'B}$、$\overline{P'C}$

（2）∵在圖（35）（36）中，點 P 和點$Y_b$是直線$\overleftrightarrow{BX_b}$的兩對稱點

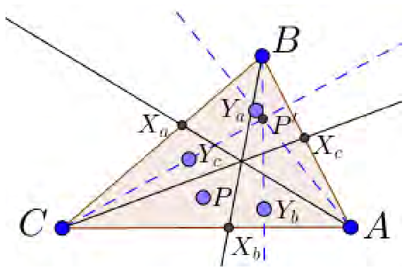
$\therefore \angle P'BI = \angle PBI$（I 是內心）　　$\therefore \angle P'BC = \angle PBA$・・・（1）

同理$\angle P'AB = \angle PAC$・・・（2）　　$\angle P'CA = \angle PCB$・・・（3）

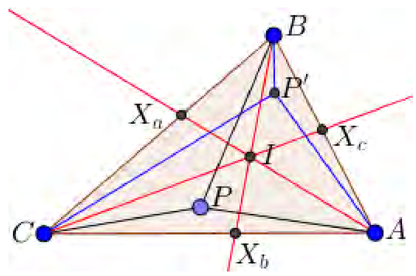
（3）由（1）+（2）+（3）

$\angle P'BC + \angle P'CA + \angle P'AB = \angle PBA + \angle PAC + \angle PCB$

$= \angle 2 + \angle 4 + \angle 6 \;= 90°$（P 為自守點），得證 P′亦為自守點




圖(35)




圖(36)

**性質十：若P為$\triangle$ ABC的一個自守點，則其共軛點$P'$亦為此$\triangle$的自守點。**

丙、一般$\triangle$中較簡易的自守點有外心、內心、垂心、三個旁心及三個頂點，這些點都能尺規作圖，檢驗**分角和**如下:

1、$\triangle$的外心如圖(37)

$\because \angle 1=\angle 6$，$\angle 2=\angle 3$，$\angle 5=\angle 4$ 且$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$

$\therefore 2a+2c+2e=180°$， $\therefore \angle 1+\angle 3+\angle 5=90°$吻合，

當然$\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{BO}$、$\overrightarrow{CO}$交於同一點O也吻合，故$\triangle$的外心是一個自守點。

2、內心：如圖(38)，$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$

且 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$

$\therefore 2a+2c+2e=180°$

$\therefore \angle 1+\angle 3+\angle 5=90°$ 吻合，故$\triangle$的內心是一個自守點。

3、垂心：如圖(39)

$\because \angle 2=\angle 5$，$\angle 4=\angle 1$，$\angle 3=\angle 6$ 且$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$

$\therefore 2\angle 1+2\angle 3+2\angle 5=180°$

$\therefore \angle 1+\angle 3+\angle 5=90°$吻合，故$\triangle$的垂心是一個自守點。

4、旁心:如圖(40)、圖(41)，$\because$ 圖中$\angle 3$ 的取向為順時針，令旁心$J_c=P$

$\therefore$同側分角和$\angle 1+\angle 3+\angle 5=90°$應改為$\angle 1-\angle 3+\angle 5=90°$，檢驗如下:

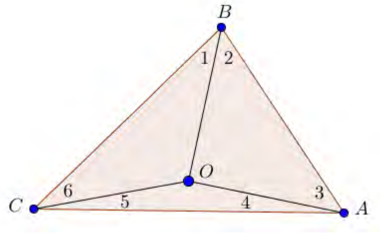
$\angle 1-\angle 3+\angle 5=\angle PBC-\angle PAB+\angle PCA$

$=\left(\angle B+\frac{180°-\angle B}{2}\right)-\frac{180°-\angle A}{2}+\frac{\angle C}{2}=\frac{2\angle B+180°-\angle B-180°+\angle A+\angle C}{2}=90°$ 吻合

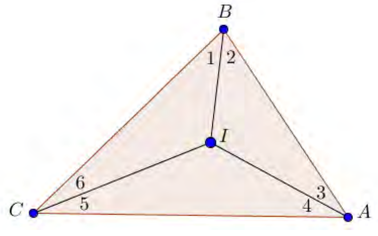
同理另兩個旁心亦吻合自守點的條件

註：(1)當自守點P在$\triangle$ ABC外側時，兩組同側分角和亦應維持同順時針(奇數角)或同逆時針(偶數角)計算，若遇到順逆相反，則「$+$」改成「$-$」，如圖(42)，應表示為$\angle 1+\angle 3-\angle 5=90°$及$\angle 2-\angle 4+\angle 6=90°$

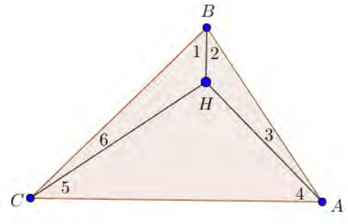
(2)圖(42)中，P在$\triangle$ ABC外部，除了要注意各分角的順、逆時針方向性之外，還應注意其角度大小，如$\angle 1=\angle PBC$、$\angle 3=\angle PAB$、$\angle 5=\angle PCA$、$\angle 2=\angle PBA$、$\angle 4=\angle PAC$、$\angle 6=\angle PCB$



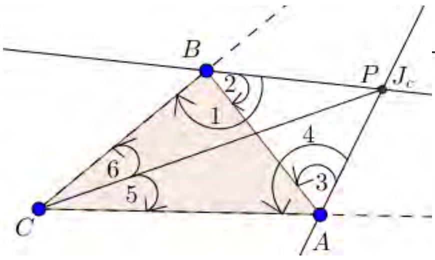

圖(37)



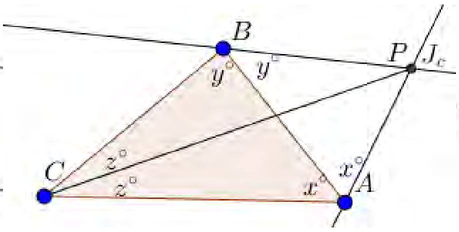

圖(38)



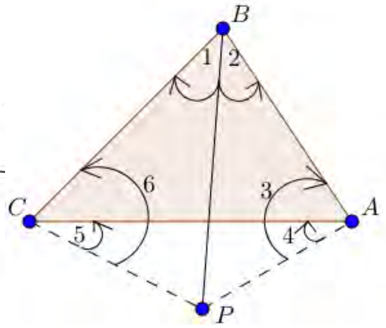

圖(39)




圖(40)

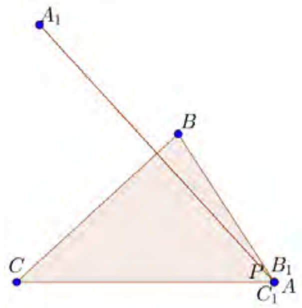



圖(41) 旁心$J_c$

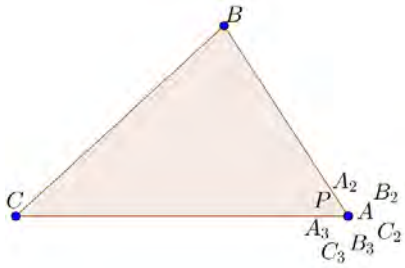



圖(42)

5、頂點A、B、C:如圖(43)、圖(44)。當P落在頂點A時，$\Delta A_1B_1C_1$退化成$\overline{AA_1}$，如圖(43)，而$\Delta A_2B_2C_2$及$\Delta A_3B_3C_3$則退化成頂點A，如圖(44)，故頂點A為相似中心，吻合。同理另兩個頂點亦吻合自守點的條件。




圖(43)




圖(44) $\Delta$的頂點皆為自守點

丁、$\Delta$中更深一層的自守點可由外心、旁心及頂點相互間的連線交叉而成

6、定義點$D_1$、$D_2$、$D_3$：外心和各頂點所做的直線與對邊的交點，如圖(45)

已知：O為外心，$\overrightarrow{BO}$交$\overline{AC}$於$D_3$

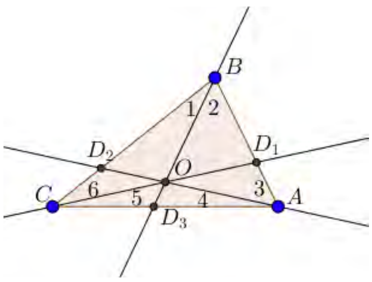
求證：$D_3$為自守點

證明：(1) $\because$ O為外心，$\therefore \angle 1 = \angle 6$、$\angle 2 = \angle 3$、$\angle 4 = \angle 5$

(2)觀察$D_3$的同側分角和：$= \angle D_3BC + \angle D_3AB + \angle D_3CA$

$= \angle 1 + (\angle 3 + \angle 4) + 0° = \angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = 90°$ 得證$D_3$為自守點。

同理可證$D_1, D_2$皆為自守點。

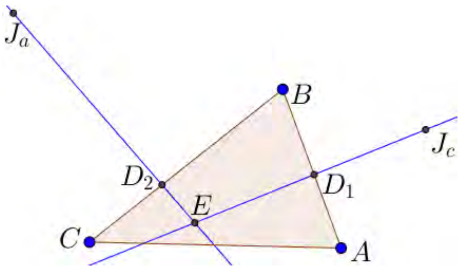



圖(45)$D_1$、$D_2$、$D_3$皆為自守點

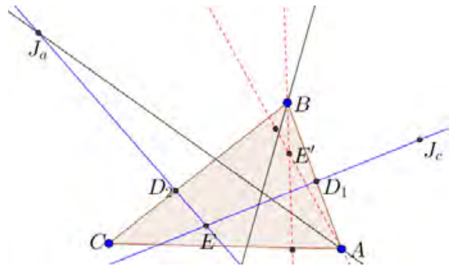
7、定義點 E：為$\overleftrightarrow{D_1J_c}$ $\overleftrightarrow{D_2J_a}$ $\overleftrightarrow{D_3J_b}$的交點E，如圖(48)，則E點為自守點

（其證明方式為利用直角坐標平面先算出三直線的交點 E，再帶入自守點曲線檢驗）

8、E′：為 E 的共軛點，由性質十知此點即為自守點，如圖(49)



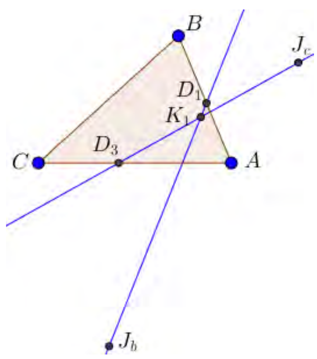

圖(48) E為自守點



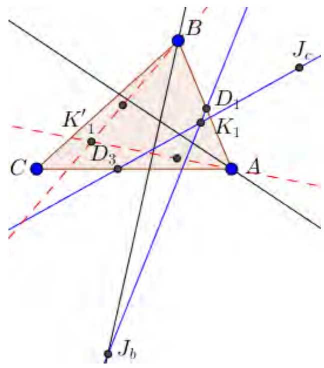

圖（49）E′為自守點

9、定義$K_1$、$K_2$、$K_3$：分別為 $\overline{D_1J_b}$ 和 $\overline{D_3J_c}$、$\overline{D_2J_c}$ 和 $\overline{D_1J_a}$、$\overline{D_3J_a}$ 和 $\overline{D_2J_b}$的交點，如圖(50)，則此三點$K_1$、$K_2$、$K_3$皆為自守點。

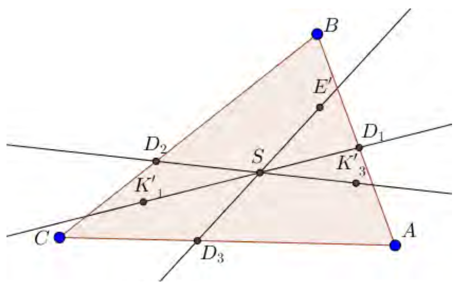
10、 $K'_1$、$K'_2$、$K'_3$：分別為$K_1$ $K_2$ $K_3$的共軛點，由性質十知這些點皆為自守點，如圖（51）




圖（50）$K_1$為自守點




圖（51）K′為自守點

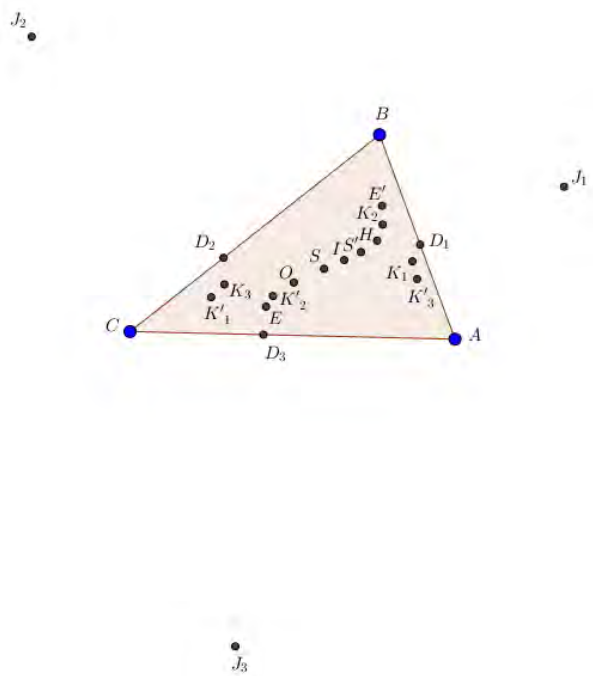



圖（52） S為自守點

11、定義S：為$\overline{D_1K'_1}$、 $\overline{D_2K'_3}$、 $\overline{D_3E'}$ 的交點，如圖(52)，則S為自守點。

12、S′：為S的共軛點，由性質十知此點即為自守點。

註：以上E、K、S證明見附件(四)。




圖(53) 22 個自守點分布圖

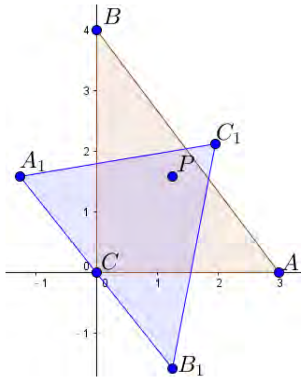
結論：(1）綜合上述丙、丁兩部分，對任意三角形我們用**尺規作圖**至少可畫出 22 點自守點，如圖(53)，我們隱約可以看出這些自守點分成左、中、右三群。

(2）承(1）這三群中約可看出四個彎曲處，依國中畫彎曲的拋物線要給五個點定位，$4 \times 5 = 20$，需 20 個點，$22 > 20$可見已足夠顯現出整個圖形了。

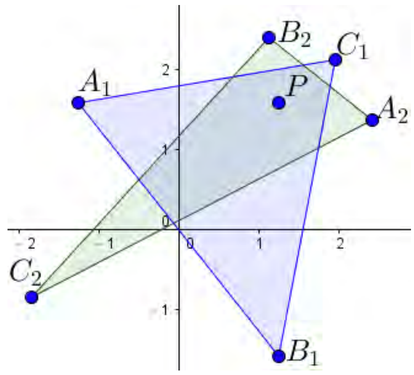
研究到這裡，我們發現，除了上述 22 點外，絕大多數起點P都不是相似中心，我們好奇想要探討**外翻哪些點當起點能成為原∆和第三個∆的共同相似中心(自守點)?**

（二）三角形的自守點軌跡計算並繪出軌跡圖

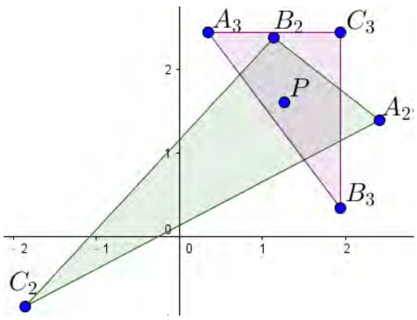
以三邊長的比為$3:4:5$的直角∆為例



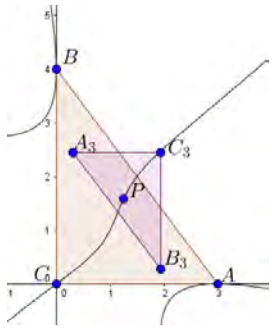

圖(54)




圖(55)




圖(56)




圖(57)

已知：如圖(54)，設$A(3,0)$、$B(0,4)$、$C(0,0)$，內有一點 $P(s,t)$，

且$\overleftrightarrow{AB}$：$4x+3y=12$、$\overleftrightarrow{BC}$：$x=0$、$\overleftrightarrow{AC}$：$y=0$，P符合前文自守點之條件

試求：自守點軌跡之方程式

計算：先以P點做第一次外翻，則$A_1\left(s-\frac{32s+24t-96}{25}, t-\frac{24s+18t-72}{25}\right)$、$B_1(-s,t)$、

$C_1(s,-t)$，假設$\frac{32s+24t-96}{25}$為$a_1$、$\frac{24s+18t-72}{25}$為$a_2$，求出

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{A_1B_1}：tx+sy=0 \\ \overleftrightarrow{B_1C_1}：(2t-a_2)x+a_1y=-ta_1+2st-sa_2 \\ \overleftrightarrow{A_1C_1}：a_2x+(2s-a_1)y=-ta_1+2st-sa_2 \end{cases}$$

假設$2t-a_2$為$a_3$、$-ta_1+2st-sa_2$為$a_4$、$2s-a_1$為$a_5$，接著再做第二次

外翻，如圖(55)，得$A_2(s-\frac{2a_3(a_3s+a_1t-a_4)}{a_1^2+a_3^2},t-\frac{2a_1(a_3s+a_1t-a_4)}{a_1^2+a_3^2})$

、$B_2(s-\frac{2a_2(a_2s+a_5t-a_4)}{a_2^2+a_5^2},t-\frac{2a_5(a_2s+a_5t-a_4)}{a_2^2+a_5^2})$、$C_2(s-\frac{4t^2s}{s^2+t^2},t-\frac{4s^2t}{s^2+t^2})$，

並假設$\frac{4t^2s}{s^2+t^2}$為$a_7$、$\frac{4s^2t}{s^2+t^2}$為$a_8$、$\frac{2a_3(a_3s+a_1t-a_4)}{a_1^2+a_3^2}$為$a_9$、$\frac{2a_1(a_3s+a_1t-a_4)}{a_1^2+a_3^2}$為$b_1$

、$\frac{2a_2(a_2s+a_5t-a_4)}{a_2^2+a_5^2}$為$b_2$、$\frac{2a_5(a_2s+a_5t-a_4)}{a_2^2+a_5^2}$為$b_3$，求出

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{A_2B_2}:(b_3-b_1)x+(a_9-b_2)y=(t-b_1)(a_9-b_2)+(s-a_9)(b_3-b_1)\\ \overleftrightarrow{B_2C_2}:(b_3-a_8)x+(a_7-b_2)y=(t-a_8)(a_7-b_2)+(s-a_7)(b_3-a_8)\\ \overleftrightarrow{A_2C_2}:(b_1-a_8)x+(a_7-a_9)y=(t-a_8)(a_7-a_9)+(s-a_7)(b_1-a_8)\end{cases}$$

假設$b_3-a_8$為$b_4$、$a_7-b_2$為$b_5$、$(t-a_8)(a_7-b_2)+(s-a_7)(b_3-a_8)$為$b_6$、$b_1-a_8$為$b_7$、$a_7-a_9$為$b_8$、$(t-a_8)(a_7-a_9)+(s-a_7)(b_1-a_8)$為$b_9$、$b_3-b_1$為$c_1$、$a_9-b_2$為$c_2$、$(t-b_1)(a_9-b_2)+(s-a_9)(b_3-b_1)$為$c_3$，最後做第三次外翻，如圖(56)，可得

$A_3(s-\frac{2b_4(b_4s+b_5t-b_6)}{b_4^2+b_5^2},t-\frac{2b_5(b_4s+b_5t-b_6)}{b_4^2+b_5^2})$

$B_3(s-\frac{2b_7(b_7s+b_8t-b_9)}{b_7^2+b_8^2},t-\frac{2b_8(b_7s+b_8t-b_9)}{b_7^2+b_8^2})$

$C_3(s-\frac{2c_1(c_1s+c_2t-c_3)}{c_1^2+c_2^2},t-\frac{2c_2(c_1s+c_2t-c_3)}{c_1^2+c_2^2})$

並假設$\frac{2b_4(b_4s+b_5t-b_6)}{b_4^2+b_5^2}$為$c_4$、$\frac{2b_5(b_4s+b_5t-b_6)}{b_4^2+b_5^2}$為$c_5$、$\frac{2b_7(b_7s+b_8t-b_9)}{b_7^2+b_8^2}$為$c_6$

、$\frac{2b_8(b_7s+b_8t-b_9)}{b_7^2+b_8^2}$為$c_7$、$\frac{2c_1(c_1s+c_2t-c_3)}{c_1^2+c_2^2}$為$c_8$、$\frac{2c_2(c_1s+c_2t-c_3)}{c_1^2+c_2^2}$為$c_9$

求出其直線方程式如下

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{A_3B_3}:(c_7-c_5)x+(c_4-c_6)y=(t-c_5)(c_4-c_6)+(s-c_4)(c_7-c_5)\\ \overleftrightarrow{B_3C_3}:(c_9-c_7)x+(c_6-c_8)y=(t-c_7)(c_6-c_8)+(s-c_6)(c_9-c_7)\\ \overleftrightarrow{A_3C_3}:(c_9-c_5)x+(c_4-c_8)y=(t-c_5)(c_4-c_8)+(s-c_4)(c_9-c_5)\end{cases}$$

在前文研究過程中我們知道了一個重要性質:“若外翻起點為自守點，則外翻三次後的$\Delta$和原$\Delta$的對應邊必相互平行“。因此我們使用兩線平行的條件，以$\overleftrightarrow{A_3C_3}\parallel\overleftrightarrow{AC}$，則有等式：$3(c_7-c_5)=4(c_4-c_6)$，將假設代入後得方程式：$4x^3-3y^3-12xy^2+9x^2y-24x^2+24y^2+14xy+36x-48y=0$，並繪出軌跡圖，如圖(57)，軌跡分成三條，且 22 個特殊自守點都位在曲線上。

**性質十一: 我們利用相同計算方法推出任意三角形自守點軌跡一般式，(計算過程請見附件(五))，通式如下：**

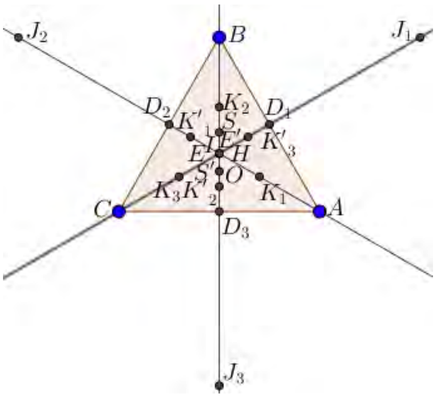
$b^2x^3-aby^3-acx^3-ab^2c^2-2ab^2x^2+2ab^2y^2-ab^3y+ac^2x^2-ac^2y^2-bcy^3$
$+a^2cx^2-a^2cy^2-a^2b^2c+a^2b^2x-a^2c^2x-2b^2cx^2+2b^2cy^2-3b^2xy^2+b^2c^2x$
$-b^3cy+2b^3xy+2abc^2y+3abx^2y+3acxy^2+3ab^2cx+3bcx^2y-2bc^2xy$
$+2a^2bcy-2a^2bxy-6abcxy=\ 0$，並繪出軌跡圖，軌跡分成三條，觀察之前那 22 個特殊自守點都位在曲線上，其中規定$A(a,0)$、$B(0,b)$、$C(-c,0)$，只要給定 a、b、c 代入通式，即可繪出該$\Delta$的自守點軌跡，非常方便。

（三）外翻各類三角形自守點軌跡的觀察與探討

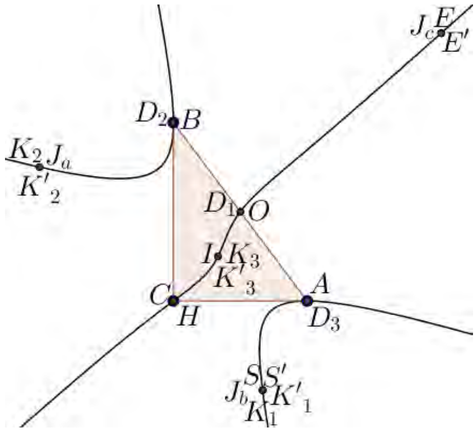
1、正三角形的外翻，如圖（58）

2、等腰直角$\Delta$外翻，如圖（59）

給定正$\Delta$ ABC的三頂點坐標，代入性質十一的通式，得到如圖（58）的自守點軌跡



圖（58）正三角形



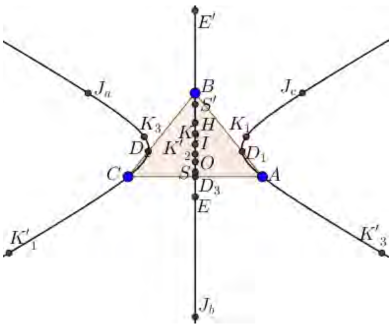
圖（59）直角$\Delta$ ABC

發現(1)正$\Delta$的自守點軌跡為圖形的三條對稱軸
(2)22 個特殊自守點均勻的分散在三條對稱軸上

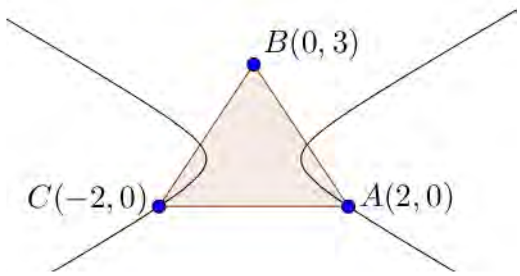
發現(1)軌跡分成三部分，中央一條雙曲線，及左右兩條像雙曲線的曲線
(2) 22 個特殊自守點都在軌跡上

**性質十二：正$\Delta$的自守點軌跡為三條對稱軸，由圖中可看出 22 點皆位在軌跡上。**

3、頂角$>60°$的等腰$\Delta$外翻，如圖（60）



圖（60）等腰$\Delta$且頂角$\angle B>60°$



圖(60-1)消除對稱軸後剩一組雙曲線

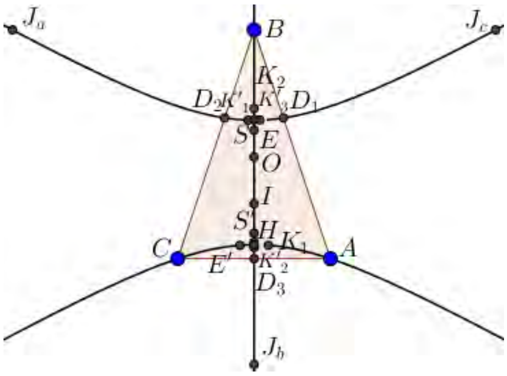
分別取A(2,0)、B(0,3)、C(−2,0)代入前文的一般式，以 P 在 y 軸上外翻三次後得三次曲線為$13x^3-39xy^2+78xy-52x=0$ 清去 y 軸（方程式$x=0$）後，得方程式為$13x^2-39y^2+78y-52=0$，如圖(60-1)，配方後得 $\frac{x^2}{1^2}-\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$，明顯的為

一條雙曲線，且中心點為(0,1)，貫軸長$2a = 2$，共軛軸長 $2b = \frac{2}{\sqrt{3}}$。

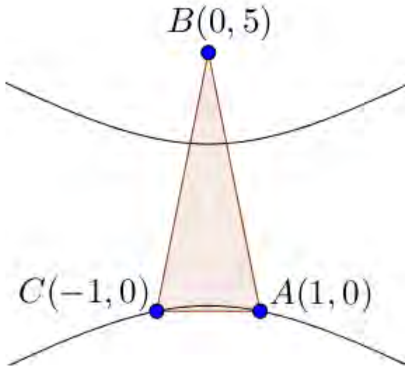
發現 (1)三條自守點軌跡，有一條是對稱軸 (2) 22 個特殊自守點都在軌跡上

(3)有一組雙曲線

4、頂角$< 60°$的等腰Δ外翻，如圖（61）



圖（61）等腰Δ，且$\angle B < 60°$




圖（61-1）消除對稱軸後剩一組雙曲線

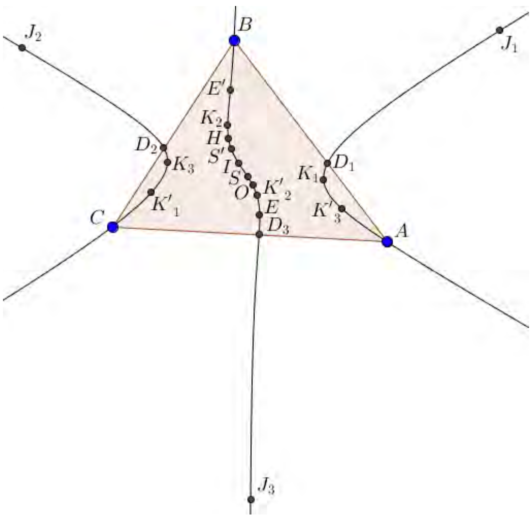
發現：(1)當一等腰三角形的頂角$< 60°$，則其自守點軌跡為一條過頂點的對稱軸直線，及兩條位於圖形上下的雙曲線，而當原圖形頂角$> 60°$時則呈左右擺放的雙曲線，及同樣一條對稱軸直線

(2)22 個特殊自守點都在軌跡上

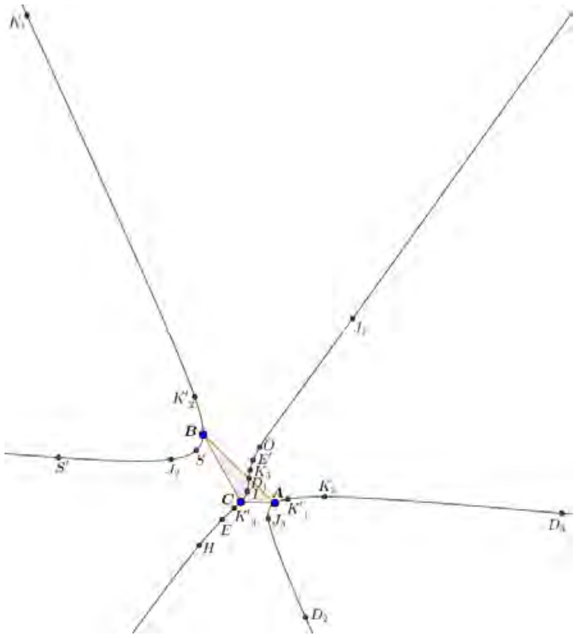
**性質十三：一般Δ的自守點軌跡曲線中，左右兩條像是雙曲線，但其實絕大多數都不是，只有在非正Δ的等腰Δ時，左右或上下才形成雙曲線。**

5、銳角Δ的外翻，如圖（62）

6、鈍角Δ的外翻，如圖（63）



圖（62）銳角三角形，各內角皆$< 90°$



圖（63）鈍角三角形，$\angle ACB > 90°$

說明：觀察上圖我們發現：三角形自守點軌跡是三次曲線，左右兩條皆通過頂點，中間則穿過Δ的內部且恆過其垂心、內心、外心。又當Δ為等腰Δ 時，左右為一雙曲線，而非等腰Δ時則不共軸。又 22 個特殊自守點皆位在軌跡上

**性質十三：△的自守點軌跡為三次曲線，左右兩條曲線通過△兩個頂點，中間那條曲線(或直線)則除了過△頂點外並穿過△的內部且恆過其垂心、內心、外心。**

證明：外心座標 $O=(\frac{a+c}{2},\frac{b^2+ac}{2b})$

內心座標 $I=(\frac{a\sqrt{b^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{|a-c|+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}},\frac{ab-bc}{|a-c|+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}})$

垂心座標 $H=(0,\frac{ac^2-a^2c}{ab-bc})$，分別代入一般式方程式皆得 $0=0$，得證。

（四）外翻各類四邊形自守點軌跡的計算探討

已知：設$A(2,0)$、$B(2,4)$、$C(0,4)$、$D(0,0)$，內有一點$P(m,n)$，且$\overleftrightarrow{AB}：x=2$、$\overleftrightarrow{BC}：y=4$、$\overleftrightarrow{CD}：x=0$、$\overleftrightarrow{AD}：y=0$若 P 符合前文自守點之條件

試求：自守點軌跡之方程式

計算：以P點做第一次外翻，$A_1(m,8-n)$、$B_1(-m,n)$、$C_1(m,-n)$、$D_1(4-m,n)$

求出$\begin{cases}\overleftrightarrow{A_1B_1}：(n-4)x+my=4m\\ \overleftrightarrow{B_1C_1}：nx+my=0\\ \overleftrightarrow{C_1D_1}：nx+(m-2)y=0\\ \overleftrightarrow{A_1D_1}：(n-4)x+(m-2)y=4m+2n-16\end{cases}$

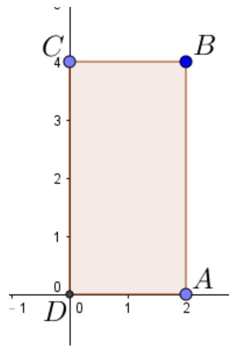
假設$n-4$為$a_1$、$m-2$為$a_2$、$4m+2n-1$為$a_3$，接著再做第二次外翻，

得$A_2(m-\frac{4mn^2}{m^2+n^2},n-\frac{4m^2n}{m^2+n^2})$、

$B_2(m-\frac{2mn^2+2a_2n^2-4n^2}{n^2+a_2^2},n-\frac{2a_2mn+2a_2^2n-4a_2n}{n^2+a_2^2})$、

$C_2(m-\frac{2a_1m+2a_1a_2n-2a_1a_3}{a_1^2+a_2^2},n-\frac{2a_1a_2m+2a_2^2n-2a_2a_3}{a_1^2+a_2^2})$、

$D_2(m-\frac{2a_1^2m+2a_1mn-8a_1m}{a_1^2+m^2},n-\frac{2a_1m^2+2m^2n-8m^2}{a_1^2+m^2})$，



圖(64)

並假設$\frac{4mn^2}{m^2+n^2}$為$a_4$、$\frac{4m^2n}{m^2+n^2}$為$a_5$、$\frac{2mn^2+2a_2n^2-4n^2}{n^2+a_2^2}$為$a_6$、$\frac{2a_2mn+2a_2^2n-4a_2n}{n^2+a_2^2}$為$a_7$、$\frac{2a_1m+2a_1a_2n-2a_1a_3}{a_1^2+a_2^2}$為$a_8$、$\frac{2a_1a_2m+2a_2^2n-2a_2a_3}{a_1^2+a_2^2}$為$a_9$、$\frac{2a_1^2m+2a_1mn-8a_1m}{a_1^2+m^2}$為$b_1$、$\frac{2a_1m^2+2m^2n-8m^2}{a_1^2+m^2}$為$b_2$，求出

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{A_2B_2}：(a_5-a_7)x+(a_6-a_4)y=(m-a_4)(n-a_7)+(n-a_5)(m-a_6)\\ \overleftrightarrow{B_2C_2}：(a_7-a_9)x+(a_8-a_6)y=(m-a_6)(n-a_9)+(n-a_7)(m-a_8)\\ \overleftrightarrow{C_2D_2}：(a_9-b_2)x+(b_1-a_8)y=(m-a_8)(n-b_2)+(n-a_9)(m-b_1)\\ \overleftrightarrow{A_2D_2}：(a_5-b_2)x+(b_1-a_4)y=(m-a_4)(n-b_2)+(n-a_5)(m-b_1)\end{cases}$$

設$a_5-a_7$為$b_3$、$a_6-a_4$為$b_4$、$(m-a_4)(n-a_7)+(n-a_5)(m-a_6)$為$b_5$、$a_7-a_9$為$b_6$、$a_8-a_6$為$b_7$、$(m-a_6)(n-a_9)+(n-a_7)(m-a_8)$為$b_8$、$a_9-b_2$為$b_9$、$b_1-a_8$為$c_1$、$(m-a_8)(n-b_2)+(n-a_9)(m-b_1)$為$c_2$、$a_5-b_2$為$c_3$、$b_1-a_4$為$c_4$、$(m-a_4)(n-b_2)+(n-a_5)(m-b_1)$為$c_5$

做第三次外翻，可得 $A_3(m-\frac{2b_6^2m+2b_6b_7n-2b_6b_8}{b_6^2+b_7^2},n-\frac{2b_6b_7m+2b_7^2n-2b_7b_8}{b_6^2+b_7^2})$

$B_3(m-\frac{2b_9^2m+2b_9c_1n-2b_9c_2}{b_9^2+c_1^2},n-\frac{2b_9c_1m+2c_1^2n-2c_1c_2}{b_9^2+c_1^2})$

$C_3(m-\frac{2c_3^2m+2c_3c_4n-2c_3c_5}{c_3^2+c_4^2},n-\frac{2c_3c_4m+2c_4^2n-2c_4c_5}{c_3^2+c_4^2})$

$D_3(m-\frac{2b_3^2m+2b_3b_4n-2b_3b_5}{b_3^2+b_4^2},n-\frac{2b_3b_4m+2b_4^2n-2b_4b_5}{b_3^2+b_4^2})$

並設$\frac{2b_6^2m+2b_6b_7n-2b_6b_8}{b_6^2+b_7^2}$為$c_6$、$\frac{2b_6b_7m+2b_7^2n-2b_7b_8}{b_6^2+b_7^2}$為$c_7$、$\frac{2b_9^2m+2b_9c_1n-2b_9c_2}{b_9^2+c_1^2}$為$c_8$、$\frac{2b_9c_1m+2c_1^2n-2c_1c_2}{b_9^2+c_1^2}$為$c_9$、$\frac{2c_3^2m+2c_3c_4n-2c_3c_5}{c_3^2+c_4^2}$為$d_1$、$\frac{2c_3c_4m+2c_4^2n-2c_4c_5}{c_3^2+c_4^2}$為$d_2$、$\frac{2b_3^2m+2b_3b_4n-2b_3b_5}{b_3^2+b_4^2}$為$d_3$、$\frac{2b_3b_4m+2b_4^2n-2b_4b_5}{b_3^2+b_4^2}$為$d_4$，求出其直線方程式如下

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{A_3B_3}：(c_7-c_9)x+(c_8-c_6)y=(m-c_9)(n-c_6)+(n-c_7)(m-c_8)\\ \overleftrightarrow{B_3C_3}：(c_9-d_2)x+(d_1-c_8)y=(m-c_8)(n-d_2)+(n-c_9)(m-d_1)\\ \overleftrightarrow{C_3D_3}：(d_2-d_4)x+(d_3-d_1)y=(m-d_1)(n-d_4)+(n-d_2)(m-d_3)\\ \overleftrightarrow{A_3D_3}：(c_7-d_4)x+(d_3-c_6)y=(m-c_6)(n-d_4)+(n-c_7)(m-d_3)\end{cases}$$

設$c_7-c_9$為$d_5$、$c_8-c_6$為$d_6$、$(m-c_9)(n-c_6)+(n-c_7)(m-c_8)$為$d_7$、$c_9-d_2$為$d_8$、$d_1-c_8$為$d_9$、$(m-c_8)(n-d_2)+(n-c_9)(m-d_1)$為$e_1$、$d_2-d_4$為$e_2$、$d_3-d_1$為$e_3$、$(m-d_1)(n-d_4)+(n-d_2)(m-d_3)$為$e_4$、$c_7-d_4$為$e_5$、$d_3-c_6$為$e_6$、$(m-c_6)(n-d_4)+(n-c_7)(m-d_3)$為$e_7$，最後做第四次外翻，可得

$A_4(m-\frac{2d_8^2m+2d_8d_9n-2d_8e_1}{d_8^2+d_9^2},n-\frac{2d_8d_9m+2d_9^2n-2d_9e_1}{d_8^2+d_9^2})$

$B_4(m-\frac{2e_2^2m+2e_2e_3n-2e_2e_4}{e_2^2+e_3^2},n-\frac{2e_2e_3m+2e_3^2n-2e_3e_4}{e_2^2+e_3^2})$

$C_4(m-\frac{2e_5^2m+2e_5e_6n-2e_5e_7}{e_5^2+e_6^2},n-\frac{2e_5e_6m+2e_6^2n-2e_6e_7}{e_5^2+e_6^2})$

$D_4(m-\frac{2d_5^2+2d_5d_6n-2d_5d_7}{d_5^2+d_6^2},n-\frac{2d_5d_6m+2d_6^2n-2d_6d_7}{d_5^2+d_6^2})$

設$\frac{2d_8^2m+2d_8d_9n-2d_8e_1}{d_8^2+d_9^2}$為$e_8$、$\frac{2d_8d_9m+2d_9^2n-2d_9e_1}{d_8^2+d_9^2}$為$e_9$、$\frac{2e_2^2m+2e_2e_3n-2e_2e_4}{e_2^2+e_3^2}$為$f_1$

、$\frac{2e_2e_3m+2e_3^2n-2e_3e_4}{e_2^2+e_3^2}$為$f_2$、$\frac{2e_5^2m+2e_5e_6n-2e_5e_7}{e_5^2+e_6^2}$為$f_3$、$\frac{2e_5e_6m+2e_6^2n-2e_6e_7}{e_5^2+e_6^2}$為$f_4$、

$\frac{2d_5^2+2d_5d_6n-2d_5d_7}{d_5^2+d_6^2}$為$f_5$、$\frac{2d_5d_6m+2d_6^2n-2d_6d_7}{d_5^2+d_6^2}$為$f_6$，求出其直線方程式

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{A_4B_4}：(e_9-f_2)x+(f_1-e_8)y=(m-e_8)(n-f_2)-(n-e_9)(m-f_1) \\ \overleftrightarrow{B_4C_4}：(f_2-f_4)x+(f_3-f_1)y=(m-f_1)(n-f_4)-(n-f_2)(m-f_3) \\ \overleftrightarrow{C_4D_4}：(f_4-f_6)x+(f_5-f_3)y=(m-f_3)(n-f_6)-(n-f_4)(m-f_5) \\ \overleftrightarrow{A_4D_4}：(e_9-f_6)x+(f_5-e_8)y=(m-e_8)(n-f_6)-(n-e_9)(m-f_5) \end{cases}$$

和前文計算Δ自守點軌跡時相同，我們使用對應邊兩線平行的條件，以$\overleftrightarrow{A_4D_4}$和$\overleftrightarrow{AD}$為例，則有下列等式：$f_1-e_8=0$ ，我們將假設的符號慢慢代入等式 $-xy^3+x^3y-2x^3+y^3+6xy^2-3x^2y+6x^2-6y^2-6xy-4x+8y=0$並繪出圖形(66)，關於四邊形自守點軌跡的一般式，將它放在附件（三）

（五）四邊形軌跡探討

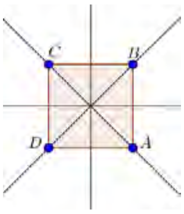
利用我們建立的四邊形自守點軌跡一般通式，就像前文在Δ中的做法一樣，我們將 A、B、C、D 四頂點的座標帶入，即可繪出四邊形的自守點軌跡舉例如下:

1、正方形的軌跡，如圖(65)，為四條對稱軸直線

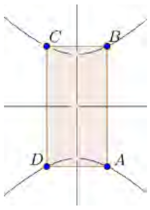
2、長方形的軌跡，如圖(66)，為二條對稱軸及上、下兩條為雙曲線

3、等腰梯形的軌跡，如圖(67)，為一條對稱軸及上、下三條曲線

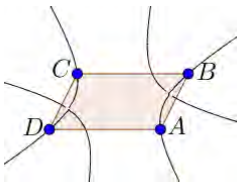
4、雙心四邊形的軌跡，如圖(68)，為一條對稱軸及三條曲線



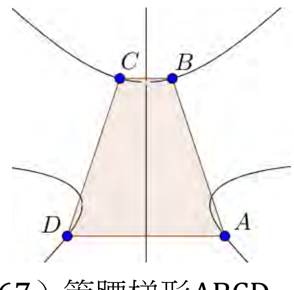

圖（65）正方形ABCD



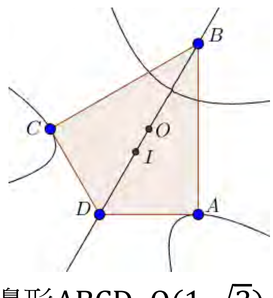

圖（66-1）長方形ABCD




圖（66-2）平形四邊形ABCD




圖（67）等腰梯形ABCD




圖（68）雙心四邊形ABCD $O(1,\sqrt{3})$、$I(\sqrt{3}-1,3-\sqrt{3})$

觀察上圖，我們發現正方形的自守點軌跡是由四條對稱軸組成，長方形及等腰梯形則是由過頂點的曲線和對稱軸組成；在同時有外心、內心的雙心四邊形中，自守點曲線恆通過這兩個心。又原四邊形的四個頂點都位在自守點曲線上。

**性質十四：一般四邊形的自守點軌跡有四條，通過四個頂點，若有外心、內心也必在曲線上，特別的是正方形的自守點軌跡是四條對稱軸。**

（六）任意 n 邊形軌跡計算和探討

同理可計算並畫出任意 n 邊形的自守點軌跡，五、六邊形見圖(88)(89)及附件(六)

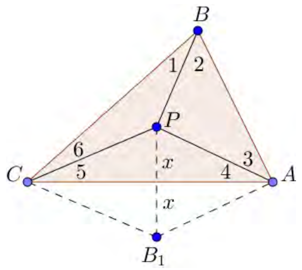
（七）正 n 邊形軌跡計算和探討

由前文的觀察探討，我們可以看出當原圖形是正多邊形時，其自守點軌跡為所有對稱軸，計算過程及圖形見附件(七)。

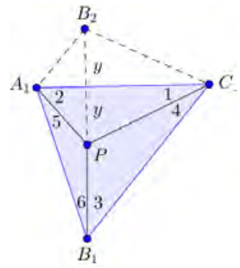
**性質十五：正 n 邊多邊形的自守點軌跡即為它的 n 條對稱軸。**

五、n 邊形與從自守點軌跡上外翻 n 次圖形邊長比值探討

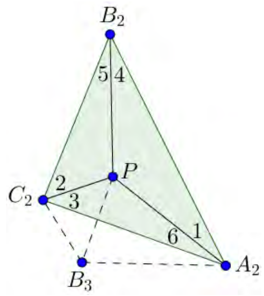
（一）三角形外翻$\Delta A_3B_3C_3$和原$\Delta$ ABC邊長比值函數式推導



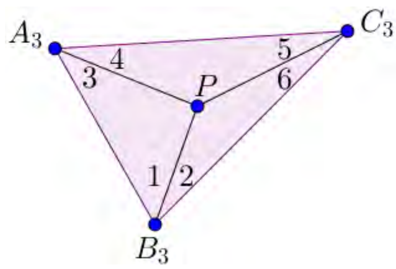

圖(69)




圖(70)




圖(71)




圖(72)

已知：P 點在自守點軌跡上

求算：外翻三次後的$\Delta A_3B_3C_3$和原$\Delta$ ABC的對應邊長比值

(1)∵圖(69)中，$\overline{CP}\times\sin\angle 5 = x \quad \overline{B_1P}=2x \quad \therefore 2\overline{CP}\cdot\sin\angle 5 = \overline{B_1P}$

(2)∵圖(70)中，$\overline{C_1P}\cdot\sin\angle 3 = y \quad \overline{B_2P}=2y \quad \therefore 2\overline{C_1P}\cdot\sin\angle 3 = \overline{B_2P}$

(3)以此類推圖(71)中，$2\overline{C_2P}\cdot\sin\angle 5 = \overline{B_3P}$

(4)圖(69)$\Delta$ ABP中，$\frac{\sin\angle 1}{\overline{CP}} = \frac{\sin\angle 6}{\overline{BP}}$，得$\overline{BP} = \frac{\overline{CP}\cdot\sin\angle 6}{\sin\ \angle 1}$

(5)圖(70)$\Delta A_1B_1P$中，$\frac{\sin\angle 4}{\overline{B_1P}} = \frac{\sin\angle 5}{\overline{C_1P}}$，$\overline{C_1P} = \frac{\overline{B_1P}\cdot\sin\angle 5}{\sin\ \angle 4} = \frac{2\,\overline{CP}\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 5}{\sin\ \angle 4}$

(6)圖(71)$\Delta A_2B_2P$中，$\frac{\sin\angle 6}{\overline{B_2P}} = \frac{\sin\angle 1}{\overline{C_2P}}$

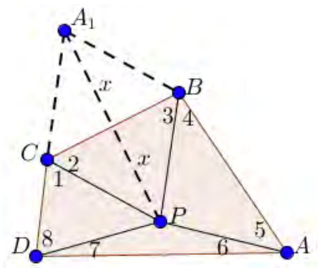
得$\overline{C_2P} = \frac{\overline{B_2P}\cdot\sin\angle 1}{\sin\ \angle 6} = \frac{2\,\overline{C_1P}\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 1}{\sin\ \angle 6} = \frac{4\,\overline{CP}\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 1^2}{\sin\ \angle 6\cdot\sin\angle 2}$

(7)$\overline{B_3P} = 2\overline{C_2P}\cdot\sin\angle 5 = \frac{8\,\overline{CP}\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5\cdot\sin^2\angle 1}{\sin\ \angle 6\cdot\sin\angle 2}$

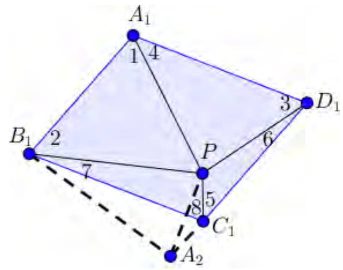
(8) $\frac{\overline{B_3P}}{\overline{BP}} = \frac{\frac{8\,\overline{CP}\cdot\sin\angle3\cdot\sin\angle5\cdot\sin^2\angle1}{\sin\ \angle6\cdot\sin\angle2}}{\frac{\overline{CP}\cdot\sin\angle6}{\sin\ \angle1}} = \frac{8\sin^2\angle3\cdot\sin^2\angle5\cdot\sin^2\angle1}{\sin\angle6\cdot\sin\angle4\cdot\sin\angle2}$ 即為所求

**性質十六：若△ ABC外翻三次成△ $A_3B_3C_3$，起點 P 是相似中心，則△ $A_3B_3C_3$ 和△ ABC 對應邊長比值為$\frac{8\sin^2\angle1\cdot\sin^2\angle3\cdot\sin^2\angle5}{\sin\angle2\cdot\sin\angle4\cdot\sin\angle6}$**

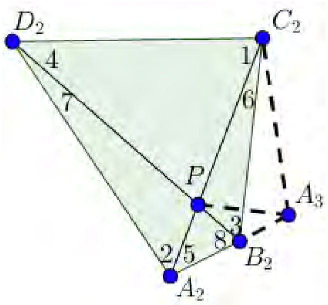
（二）四邊形外翻$A_4B_4C_4D_4$和原四邊形ABCD邊長比值函數式推導



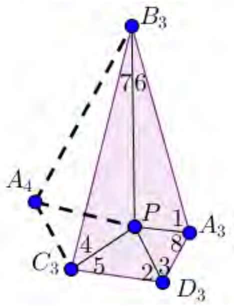

圖(73)



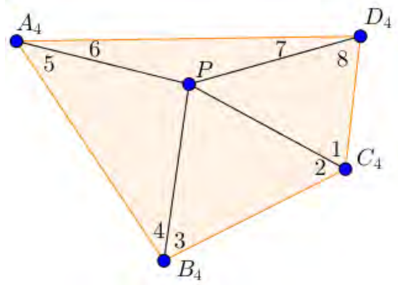

圖(74)




圖(75)




圖(76)




圖(77)

已知：P 點是四邊形ABCD的自守點

求算：p(x)：以P點外翻四次後四邊形與原四邊形對應邊長比值函數式

算法：(1)∵圖(73)中，$\overline{BP}\cdot\sin\angle3 = x$　$\overline{A_1P}$=2x，∴$2\overline{BP}\cdot\sin\angle3 = \overline{A_1P}$

(2)∵圖(74)中，$\overline{B_1P}\cdot\sin\angle7 = y$　$\overline{A_2P} = 2y$，∴$2\overline{B_1P}\cdot\sin\angle7 = \overline{A_2P}$

(3)以此類推圖(75)中，$2\overline{B_2P}\cdot\sin\angle3 = \overline{A_3P}$，圖(76)中，$2\overline{B_3P}\cdot\sin\angle7 = \overline{A_4P}$

(4)圖(73)△ ABP中，$\frac{\sin\angle5}{\overline{BP}} = \frac{\sin\angle4}{\overline{AP}}$，得$\overline{AP} = \frac{\overline{BP}\cdot\sin\angle4}{\sin\angle5}$

(5)圖(74)△ $A_1B_1P$中，$\frac{\sin\angle2}{\overline{A_1P}} = \frac{\sin\angle1}{\overline{B_1P}}$，$\overline{B_1P} = \frac{\overline{A_1P}\cdot\sin\angle1}{\sin\angle2} = \frac{2\,\overline{BP}\cdot\sin\angle1\cdot\sin\angle3}{\sin\angle2}$

(6)圖(75)△ $A_2B_2P$中，$\frac{\sin\angle8}{\overline{A_2P}} = \frac{\sin\angle5}{\overline{B_2P}}$

得$\overline{B_2P} = \frac{\overline{A_2P}\cdot\sin\angle5}{\sin\ \angle8} = \frac{2\,\overline{B_1P}\cdot\sin\angle5\cdot\sin\angle7}{\sin\angle8} = \frac{4\,\overline{BP}\cdot\sin\angle1\cdot\sin\angle3\cdot\sin\angle5\cdot\sin\angle7}{\sin\angle2\cdot\sin\angle8}$

(7)圖(76)△ $A_3B_3P$中，$\frac{\sin\angle6}{\overline{A_3P}} = \frac{\sin\angle1}{\overline{B_3P}}$

得$\overline{B_3P} = \frac{\overline{A_3P}\cdot\sin\angle1}{\sin\angle6} = \frac{2\,\overline{B_2P}\cdot\sin\angle1\cdot\sin\angle3}{\sin\ \angle6} = \frac{8\,\overline{BP}\cdot\sin\angle5\cdot\sin\angle7\cdot\sin^2\angle1\cdot\sin^2\angle3}{\sin\angle2\cdot\sin\angle6\cdot\sin\angle8}$

$(8)\overline{A_4P} = 2\overline{B_3P}\cdot\sin\angle 7$

$$=2\sin\angle 7\cdot\frac{8\,\overline{BP}\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 7\cdot\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 6\cdot\sin\angle 8}=\frac{16\,\overline{BP}\cdot\sin\angle 5\cdot\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 7}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 6\cdot\sin\angle 8}$$

(9) $\dfrac{\overline{A_4P}}{\overline{AP}}=\dfrac{\frac{16\,\overline{BP}\cdot\sin\angle 5\cdot\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 7}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 6\cdot\sin\angle 8}}{\frac{\overline{BP}\cdot\sin\angle 4}{\sin\angle 5}}=\dfrac{16\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5\cdot\sin^2\angle 7}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6\cdot\sin\angle 8}$ 即為所求

**性質十七：若四邊形 ABCD 外翻四次成 $A_4B_4C_4D_4$，起點 P 是自守點，則四邊形 $A_4B_4C_4D_4$ 和 ABCD 對應邊長比值為** $\dfrac{16\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5\cdot\sin^2\angle 7}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6\cdot\sin\angle 8}$

**性質十八：推廣至 n 邊形時，外翻 n 次後其邊長比值為** $\dfrac{2^n\cdot\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5\ldots}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6\cdot\ldots}$

說明：(1)上述比值公式，明顯的可仿照三邊形或四邊形類似的過程推導出來。

(2)觀察上述比值公式，利用自守點 P 在 y 軸上的移動改變各分角的配置，再利用各分角的三角函數值計算外翻 n 次後的邊長比值。

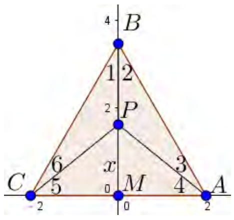
(3)正多邊形時因某些分角是定值，因此比值公式還可化簡並求最大或最小值

（三）正 n 邊形從自守點外翻 n 次後所得的多邊形和原多邊形的最大對應邊長比值探討

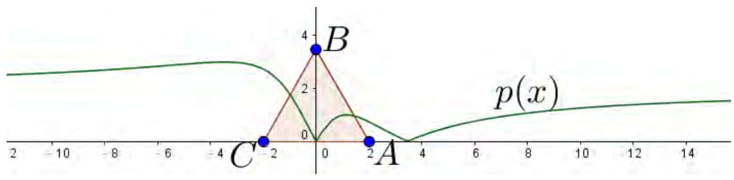
觀察上述的邊長比值函數通式，令 $p(x)=\dfrac{2^n\cdot\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5\ldots}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6\cdot\ldots}, n\geq 3, \overline{MP}=x$，如圖（78），並嘗試畫出正多邊形的函數圖形。因為正多邊形的自守點軌跡皆為其對稱軸，為方便探討起見，我們將此正n邊形的兩頂點分別設在(2,0)、(−2,0)時，其一對稱軸必為y軸。於是正n邊形每邊長均為 4，且將一條對稱軸放在 y 軸上，自守點 P 沿著 y 軸上下移動藉以觀察對應邊長比值的變化。

1、求正Δ在自守點曲線上，外翻三次的Δ和原Δ對應邊長比值關係式及其最大值。

令動點(自守點)P(0, x)如圖(79)，設y軸交底邊$\overline{AC}$於M，即M(0,0)，自守點P是動點， $\overline{MP}=x$單位長，P點沿著y軸上下移動，計算其關係式。過程如下，再繪出可呈現外翻n次圖形與原圖形的邊長比例變化的函數圖形，如圖（79）。



圖(78)



圖(79)　p(x)曲線

x軸代表P點至原點的距離，y軸代表自守點P在當下所在位置，取所計算的對應邊長比值的絕對值

代入公式 $p(x)=2^3\times\dfrac{(\sin\angle 1)^2\times(\sin\angle 3)^2\times(\sin\angle 5)^2}{\sin\angle 2\times\sin\angle 4\times\sin\angle 6}$

$\because\ \sin\angle 1=\sin\angle 2\quad \sin\angle 3=\sin\angle 6\quad \sin\angle 4=\sin\angle 5$

$\therefore$ 得 $p(x)=2^3\times\sin\angle 1\times\sin\angle 3\times\sin\angle 5$

其中 $\sin\angle 1=\sin(\frac{(3-2)\pi}{6})=\frac{1}{2}$ ， $\sin\angle 3=\sin 60°\times\cos\angle 4-\sin\angle 4\times\cos 60°=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{2^2+x^2}}\times\frac{1}{2}$ ， $\sin\angle 5=\frac{x}{\sqrt{2^2+x^2}}$

$\sin\angle 1\times\sin\angle 3\times\sin\angle 5=(\frac{1}{2})\times(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{2^2+x^2}}\times\frac{1}{2})\times(\frac{x}{\sqrt{2^2+x^2}})$

展開並整理後得函數式：$p(x)=\frac{4\sqrt{3}x-2x^2}{4+x^2}$。

以$\overline{MP}=x$，放在x軸上繪出p(x)圖形如圖(79)所示。
接下來分析這個關係式，並求邊長最大比值，計算如下：
計算 ∵ p(x)為一個分式，若要求極值，就要使用分式微分，我們從 google 知道如何微分，並取得其極值

令$p(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-2x^2+4\sqrt{3}x}{x^2+4}$

則 $p'(x)=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{g(x)^2}=\frac{(-4x+4\sqrt{3})(x^2+4)-2x(-2x^2+4\sqrt{3}x)}{(x^2+4)^2}=\frac{-4\sqrt{3}x^2-16x+16\sqrt{3}}{(x^2+4)^2}$

令$p'(x)=0$（斜率是零），$-4\sqrt{3}x^2-16x+16\sqrt{3}=0$

$\sqrt{3}x^2+4x-4\sqrt{3}=0$，解得兩根為$x=\frac{-4\pm 8}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ or $2\sqrt{3}$

（1）取$x=-2\sqrt{3}$，代入比值函數式p(x)

$\therefore p(-2\sqrt{3})=\left|\frac{4\sqrt{3}(-2\sqrt{3})-2(-2\sqrt{3})^2}{4+(-2\sqrt{3})^2}\right|=\left|\frac{-24-24}{16}\right|=\left|\frac{-48}{16}\right|=3$倍（最大值）

(2)取 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，代入p(x)，$p\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{24-8}{12+4}=\frac{16}{16}=1$ 倍

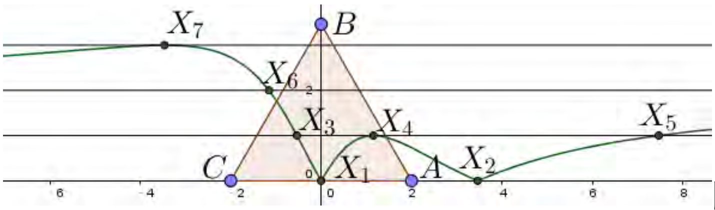
接下來用尺規作圖求作 P 點，使 $\frac{\Delta A_3B_3C_3\text{邊長}}{\Delta ABC\text{ 邊長}}$ 的比值最大

已知：正△ ABC
求作：畫出使△ $A_3B_3C_3$邊長：△ ABC邊長比值最大的自守點 P
作法：以$\overline{AC}$為對稱軸，做 B 點的對稱點 P，則 P 點即為所求。
（同理，另有兩點）接下來我們要找出正△外翻三次後與原△邊長比值 y=
1 或 2 或 3 倍時 P 點的座標，計算如下：見圖（80）
與 $y=0$的交點$(0,0)(0,2\sqrt{3})$共兩點，表示當 P 在這兩點時，△ $A_3B_3C_3$面積為零

與 $y=1$的交點$(0,2\sqrt{3}-4)(0,2\sqrt{3}+4)(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$共三點，其中$(0\ ,\ \frac{2\sqrt{3}}{3})$為中心點

與 $y=2$的交點 $(0,\frac{-2\sqrt{3}}{3})$ 共一點，表示 2 倍的自守點在外接圓上

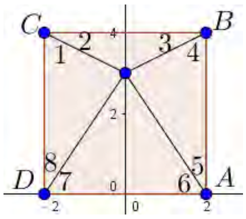
與 $y=3$的交點$(0,-2\sqrt{3})$共一點(最高點)，表示此自守點位在 B 對$\overline{AC}$的對稱點上



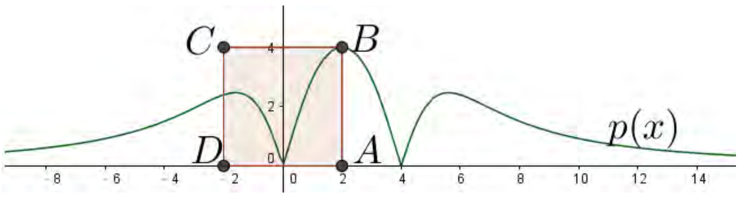
圖（80）

**性質十九：在正▵的一條對稱軸上，比值為 1 時 P 點有三處、比值為 2 時 P 點只有一處、比值為 3 時 P 點也只有一處且為最大邊長比值的位置，即在整個正▵平面上來說，外翻三次後產生最大對應邊長比值的自守點有三處，各位在以任意邊為對稱軸，第三頂點的對稱點上**

2、求正四邊形在自守點曲線上，外翻四次的四邊形和原四邊形對應邊長比值關係式及其最大值



圖(81)



圖(82)　p(x)曲線

x軸代表P點至原點的距離，y軸代表自守點P在當下所在位置，所計算的對應邊長比值，取絕對值。承前文，四邊形自守點對應邊長比值公式為

$16\times\frac{\sin^2\angle1\times\sin^2\angle3\times\sin^2\angle5\times\sin^2\angle7}{\sin\angle2\times\sin\angle4\times\sin\angle6\times\sin\angle8}$ ，約分後得：$16\sin\angle1\times\sin\angle3\times\sin\angle5\times\sin\angle7$

在圖（81）中，$\sin\angle1=\sin90°\times\cos\angle2-\sin\angle2\times\cos90°=\frac{2-4+x}{\sqrt{x^2-8x+32}}$ .

$\sin\angle3=\frac{4-x}{\sqrt{x^2-8x+32}}$　　$\sin\angle5=\sin90°\times\cos\angle6-\sin\angle6\times\cos90°=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$

$\sin\angle7=\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$　　$\therefore\sin\angle1\times\sin\angle3\times\sin\angle5\times\sin\angle7=\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-8x+32}}-\frac{4-x}{\sqrt{x^2-8x+32}}\right)\left(\frac{4-x}{\sqrt{x^2-8x+32}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}\right)$

故得正方形函數式及圖形，如圖（82）：$\left|16\frac{4x(4-x)}{(x^2+4)(x^2-8x+20)}\right|$

$$p(x)=16\times\frac{2(4-x)2x}{(x^2+4)((4-x)^2+4)}=\frac{-64x^2+256x}{x^4+8x^3+24x^2-32x+80}$$

$$\text{微分}p(x)=p'(x)=\frac{(-128x+256)g(x)-(4x^3-24x^2+48x-32)(-64x^2+256x)}{g^2(x)}$$

$$=\frac{-64(-2x^5+20x^4-64x^3+64x^2+160x-320)}{g^2(x)}$$

令$p'(x)=0$，（取最大、最小值）

$$-2x^5+20x^4-64x^3+64x^2+160x-320=0$$

$$x^5-10x^4+32x^3-32x^2-80x+160=0，(x-2)(x^4-8x^3+16x^2-80)=0$$

$x=2\ \text{or}\ \pm 2\sqrt{\sqrt{5}-2}+2$　共有 3 處，斜率為零

當$p'(2)$時 $y=4$(倍)、當$p'\left(\pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}+2\right)$時$y=2$(倍)

故 P 點位於(0,2)，即中心點時外翻四次圖形與原圖形的邊長比值最大

接下來用尺規作圖求作 P 點，使 $\frac{A_4B_4C_4D_4\text{邊長}}{ABCD\text{ 邊長}}$ 的比值最大

已知：正四邊形ABCD，如圖(83)

求作：畫出使$A_4B_4C_4D_4$邊長：ABCD邊長比值最大的自守點 P

作法：畫出四邊形ABCD的兩條對角線，其交點即為所求

接下來我們要找正四邊形外翻四次後與原四邊形邊長比值 y=1 或 2 或 3 或 4 倍時 P 點的座標，計算如下：

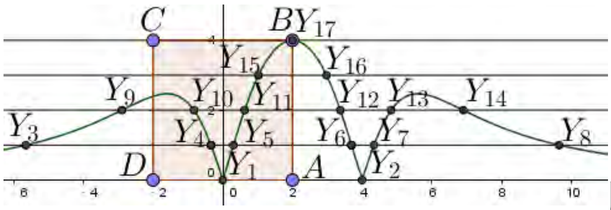
與 y=1 的交點　：$x=\pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{11}+4}+2$ ,$\pm 2\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{11}+4}+2$ ,

$\pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{19}-4}+2$ 共有六點

與 y=2 的交點：$x=\pm 2\sqrt{2}+2$ ,$\pm 2\sqrt{6}+2$ ,$\pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}+2$　共有六點

與 y=3 的交點：$x=\frac{\pm 2\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{19}-4}+6}{3}$　共有兩點

與 y=4 的交點：$x=2$　共有一點(最高點)



圖（83）正四邊形

**性質二十：在正四邊形的平面上，外翻四次後產生最大對應邊長比值的自守點位在圖形的中心點，比值為 1 時的 P 點有六處、比值為 2 時 P 點也有六處、比值為 3 時 P 點有兩處、比值為 4 時 P 點只有一處，此處就是最大邊長比值 4 的位置**

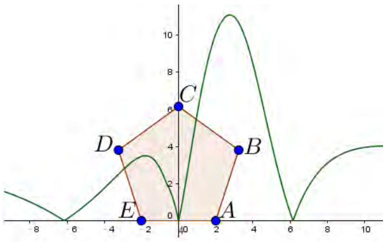
3、同理求出正五、六邊形外翻後各自邊長比值函數關係式及其圖形，並討論最大值

（1） 當 P 落在正五邊形中心點時，有最大邊長比值$\frac{5\sqrt{5}+11}{2}$，如圖(84)。

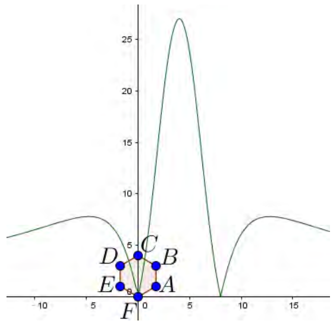
正五邊形關係式：$p(x)=|32\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}\times\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\times\frac{x\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{2}}{\sqrt{\left(x-\sqrt{2\sqrt{5}+10}\right)^2+2\sqrt{5}+6}}\times\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}\times(2\sqrt{5+2\sqrt{5}}-x)}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2+\left(x-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2}}|$

（2） 當 P 落在正六邊形中心點時，有最大邊長比值為 27，正六邊形關係式：

$$p(x)=36|x|\left|\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{(-x+2)^2+12}}\right)^2+4}+\frac{\sqrt{3}1x}{4\sqrt{(-x+2)^2+12}}\right|\left|\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-\left(\frac{\sqrt{3}(-x+8)}{\sqrt{(-x+6)^2+12}}\right)^2+4}+\frac{\sqrt{3}(-x+8)}{4\sqrt{(-x+6)^2+12}}\right|\left|\frac{-x+8}{\sqrt{x^4-16x^3+112x^2-384x+768}}\right|$$




圖(84) 正五邊形 ABCDE




圖(85) 正六邊形 ABCDEF

4、求正 n 邊形外翻 n 次後，對應邊長比值關係式及其圖形，並討論最大值，見圖（87）當 P 在 y 軸上移動，外翻 n 邊形邊長也跟著改變，我們試求外翻多邊形與原多邊形的最大倍數和此時 P 點的位置。經觀察後我們發現，除了正∆，所有的正 n 邊形外翻圖形與原圖形出現最大邊長比例時，P點皆在圖形的中心。觀察後發現正 n 邊形每個夾角度數都為 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$。於是我們求出自守點為正多邊形中心的函數圖形

**性質二十一：(1)正 n 邊形自守點上，最大邊長比值的倍數公式（不含正三角形）：**

$$\mathbf{2^n\times\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}，\text{正整數 } \mathbf{n\geq 4}。$$

**(2)正三角形自守點上，最大邊長比值的倍數為 3**

在正∆ ABC中，觀察這些一倍、二倍、三倍比值得 P 點共有 13 個，若同時畫在同一個圖中，如圖（86），共可出現四個圓，其中二倍的位在∆ABC 外接圓上，三倍的位在∆ABC 旁心圓上，一倍的分在大小兩個圓和一個中心點上，其中小圓和∆ABC 有六個交點，大圓在頂點外側加上一倍邊長處。計算各圓半徑如下:

最小圓半徑 $r_1=4-2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{12-4\sqrt{3}}{3}$、外接圓半徑 $r_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

旁心圓半徑 $r_3=2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$、最大圓半徑 $r_4=\frac{4\sqrt{3}}{3}+4=\frac{12+4\sqrt{3}}{3}$

我們發現這四個圓的半徑有一個有趣的關係式：$r_1\times r_4=r_2\times r_3$

**性質二十二：在正∆平面上，最大圓的半徑和旁心圓半徑的比值等於外接圓半徑和最小圓半徑的比值，如圖(86)。**

因為$r_2$、$r_3$、$r_4$ 都很容易利用尺規作圖畫出來，再利用比例線段作圖，可以作出 $r_1$，利用 O 當圓心，r 當半徑畫出最小圓，取最小圓和對稱軸的交點，即為所求

**性質二十三：任意正∆的自守點中，外翻三次後得到邊長放大 1 倍的 P 點有 7 個， 2 倍及 3 倍的 P 點各有 3 個，這些點都可以用尺規作圖直接畫出來。**

已知: ∆ ABC，如圖（86）

求作: 作出外翻三次後放大 1 倍、2 倍、3 倍的所有 13 個自守點。

作法: (1)作三邊中垂線交於 O，作 $\triangle ABC$的外接圓，交三對稱軸於 $X_8$、$X_9$、$X_{10}$

(2) 作 $\triangle ABC$的旁心 $X_{11}$、$X_{12}$、$X_{13}$

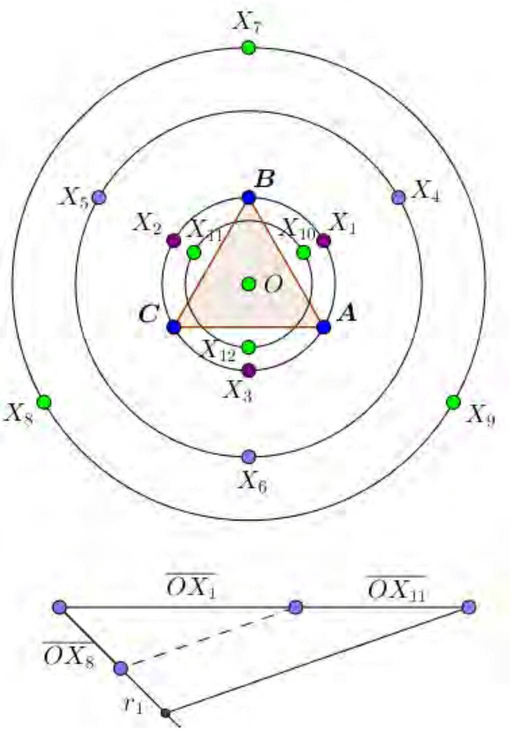
(3) 以 O 為圓心，$\overline{AO}+\overline{AC}$為半徑，畫圓，交三對稱軸於 $X_1$、$X_6$、$X_7$

(4) 利用比例線段作 $\overline{OX_1}$、$\overline{OX_{11}}$、$\overline{OX_8}$的第四比例項$r_1=\overline{OX_2}$

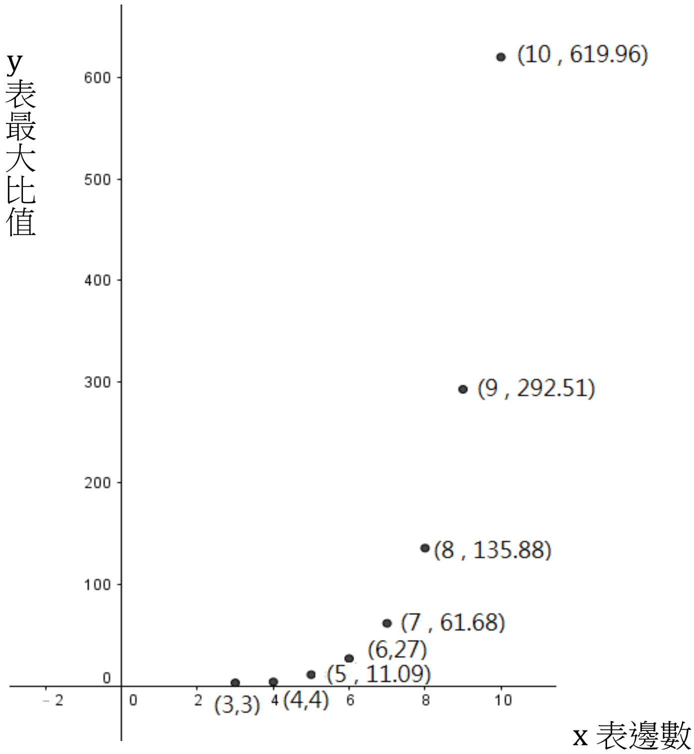
(5)以 O 為圓心，$r_1$為半徑，畫圓，交三對稱軸於 $X_2$、$X_3$、$X_5$，則放大 1 倍的有$X_1$、$X_2$、$X_3$、$O(X_4)$、$X_5$、$X_6$、$X_7$；放大 2 倍的有$X_8$、$X_9$、$X_{10}$；放大 3 倍的有$X_{11}$、$X_{12}$、$X_{13}$，即為所求。

證明：$\because \overline{OX_8}:\overline{OX_2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a:\frac{3-\sqrt{3}}{3}a=(\sqrt{3}+1):2$

又$\overline{OX_1}:\overline{OX_{11}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)a:\frac{2\sqrt{3}}{3}a=(\sqrt{3}+1):2$ $\therefore \overline{OX_8}:\overline{OX_2}=\overline{OX_1}:\overline{OX_{11}}$ 得證




圖(86)




圖(87) 正 n 邊形，最大比值比較圖，$n \geq 3$

## 陸、討論

看過本作品所畫出的各種不同邊數不同形狀的自守點軌跡後，大家一定很好奇，n 邊形的 n 條軌跡是依循何種規則安排上去的？大部分的軌跡線都是通過一頂點再沾上一點邊就直接往外出去了，但至少有一條從最大內角的頂點進入再從對面的一邊或是另一頂點離開，原則上每一個頂點都有一條通過，但若僅 n-k 條就已完全通過 n 個頂點，那就必有另外 k 條沒通過任意頂點。最特別的是進入內部的那一條一定是從最大內角的頂點進入，非常有趣。

## 柒、結論

一、n 邊形從一定點外翻 n 次後的圖形必與原圖形相似

二、從自守點曲線上的任一點外翻，外翻 n 次後的 n 邊形與原 n 邊形有相似中心

三、n邊形中 P 點位在自守點曲線上的條件為同側分角和$=(n-2)\times 90°$

四、可用尺規作圖法直接找到的Δ自守點共發現 22 點，足夠窺探出完整自守點軌跡

五、自守點曲線

（一）非等腰的Δ分成三部分，分別位在中間及左右兩側，且皆各通過一個頂點

（二） 等腰Δ：

(1)、最大角$>60°$時，圖形分成左右一組雙曲線及中間一條對稱軸

(2)、最大角$<60°$時，圖形分成上下一組雙曲線及中間一條對稱軸

(3)、最大角$=60°$時，成為正Δ，自守點曲線為三條對稱軸

（三）一般 n 邊多邊形自守點曲線有 n 條，若有內心、外心時，曲線必通過此兩心

（四） 正 n 邊形自守點曲線為原圖形的所有對稱軸，即 n 條對稱軸

六、 原正 n 邊形與外翻 n 次正 n 邊形的邊長比值變化，可藉由函數圖形$p(x)$清楚發現

（一）當圖形為偶數邊時，其比值函數圖形成三峰，且左右兩峰對稱

（二）當圖形為奇數邊時，其比值函數圖形仍為三峰，但左右兩峰並不對稱

七、原正 n 邊形與外翻 n 次正 n 邊形邊長倍數關係為

（一）欲取整數倍數：利用$y=p(x)$和$y=k$ ,k為正整數，兩者交點即為欲得的倍數

（二）欲取得最大倍數：利用$y=f(n)=2^n\times\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^n, n\geq 4$,但正Δ最大倍數為 3

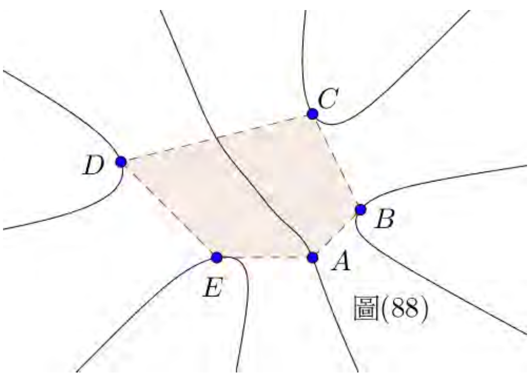
（三）產生最大倍數的自守點位置：

1、當$n\geq 4$，P位在中心點

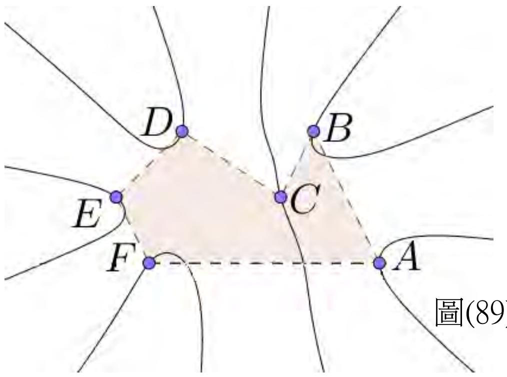
2、當$n=3$，P位在Δ外部，位在各頂點面向對邊的對稱點上

八、在任一正三角形的平面上，可以直接用尺規作圖法把放大 1 倍、2 倍、3 倍的自守點畫出來，共 13 個點，依與中心點的距離來區別，各分布成比值為$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$的兩組。

九、五邊形、六邊形的自守點軌跡，全世界第一次被畫出來，如圖（88）、(89）



圖(88)



圖(89)

## 捌、參考資料

一、國中八年級第四冊線對稱單元------翰林出版社

二、國中八年級第四冊尺規作圖單元------翰林出版社

三、高中數學第一、二冊

四、Geogebra 操作手冊

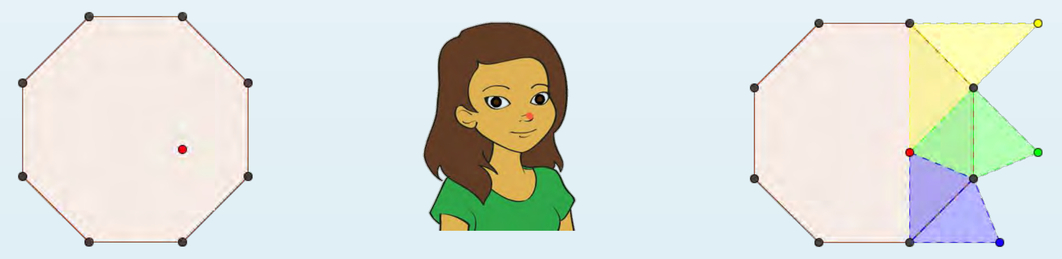
## 【評語】030403

本篇文章先以三角形的自守點出發，進而舉例並討論自守點曲線，最後再用解析幾何及三角函數，計算出自守點座標，有一些有趣的發現。進而推廣到多邊形，內容豐富且多樣，研究過程仔細、證明嚴謹，也討論出符合自守點的條件與分佈曲線。工具是解析幾何與平面幾何的，然則若用向量處理可以大幅簡化。另一部份較有意思的是考慮自守點的軌跡，目前找到的性質不多，未來應該可以繼續朝此方向發展。本作品並未列舉相關參考文獻。

## 作品海報

## 壹、研究動機

日復一日，周而復始，重複的生活是我們這群正在求學的國中生無法逃脫的宿命。然而在這看似無聊呆板的意象裡，只要你發揮你那無限的想像力，便可以隨時自由翱翔在神秘有趣的空間中。例如有一天早自習導師還沒到時，小妏拿出一面心愛的八邊形玲瓏寶鏡，如圖（甲）照著自己的臉，如圖（乙），突然發現鼻頭上冒出一顆超大的青春痘(因為最近熬了幾夜做功課)，不得了，不得了，怎麼辦，怎麼消滅它呢？好朋友小萱說別急別急，我們不是剛學會作線對稱的尺規作圖嗎？也許我們就從這顆青春痘當起點，分別對寶鏡的八邊作線對稱，如圖（丙），得到一面更大的八邊形寶鏡，這樣那顆痘子看起來就會小一點。而如果你還不滿意，那就連續再操作下去，直到找到一面最大的寶鏡，這時那顆痘子就小到看不出來了。最好是這樣，但就不知道這樣周而復始重複的操作下去，是否有它的極限，亦或有一天發現寶鏡變小，痘子變大，那可慘了，看來我們得好好先研究一下。



圖(甲)　圖(乙)　圖(丙)

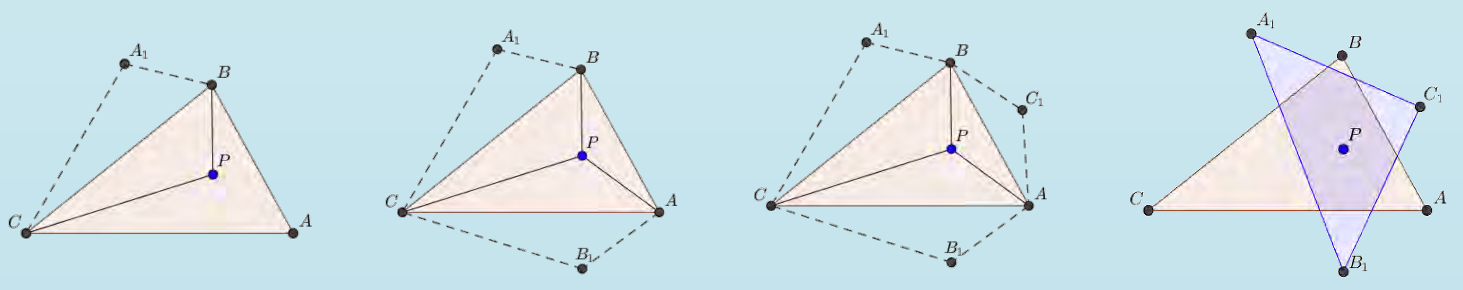
## 貳、研究目的

一、利用尺規作圖外翻n邊多邊形n次後，探討原多邊形和新多邊形的相關性質
二、利用尺規作圖，盡量找出三角形的自守點
三、探討n邊多邊形的自守點曲線計算及性質
四、在正n邊多邊形的自守點曲線上，探討外翻後多邊形和原多邊形對應邊長比值函數式計算及其最大比值
五、利用尺規作圖，在正$\triangle$平面上畫出各整數倍放大倍數的自守點位置，並探討他們之間的關係。

## 參、研究過程或方法

一、名詞定義

(一)外翻　(二)外翻$\triangle$　(三)連續外翻



圖(丁- 1)　圖(丁- 2)　圖(丁- 3)　圖(戊)

(四)相似中心：若兩多邊形相似，且所有的對應頂點兩兩連線後都共點，此點即為這兩相似圖形的相似中心，如圖(8)，P點為 $\triangle ABC$和$\triangle A_3B_3C_3$ 的相似中心。

(五)自守點：以圖(8)中的P點為例，連續外翻三次後可得$\triangle A_3B_3C_3$，若P點為$\triangle ABC$和$\triangle A_3B_3C_3$的相似中心點，則稱此P點為$\triangle ABC$內的一個自守點，這種自守點不是到處都有。

(六)自守點軌跡：$\triangle$中的自守點有無限多個，它們分布成曲線狀，這些曲線被稱為$\triangle$中所有自守點的軌跡。

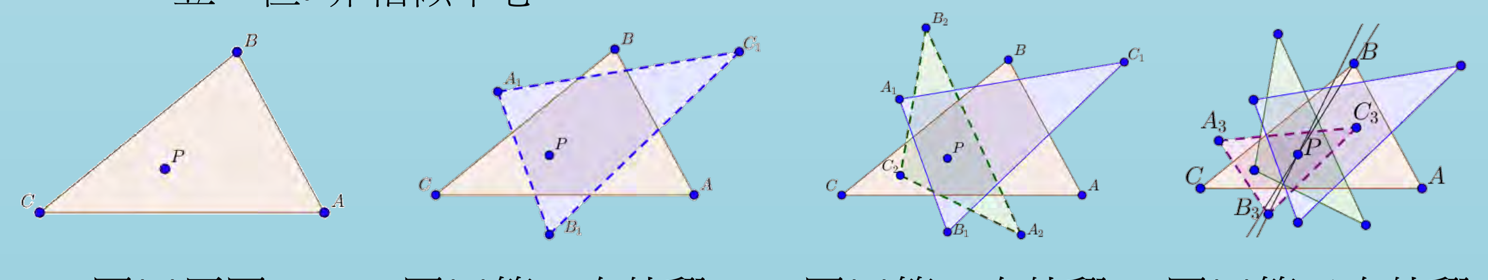
(七)同側分角　(八)共軛點

圖(己)　圖(庚)

二、n邊形從平面上任一定點P處外翻n次後，會與原多邊形相似嗎?

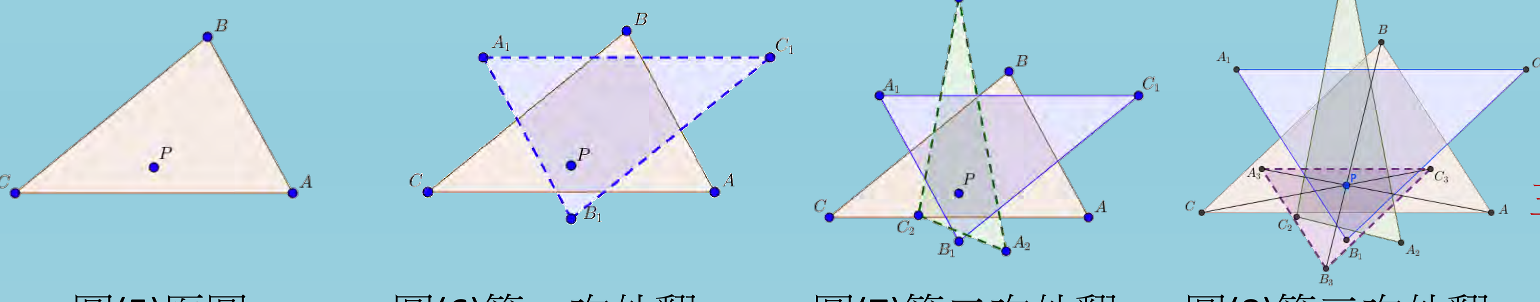
(一)三角形中，從定點P，依尺規作圖操作連續外翻三次，取兩個例子如下：

例1、P為任意點，連續外翻，如圖（1）～（4），得$\triangle A_3B_3C_3\sim\triangle ABC$ 恆成立，但P非相似中心。



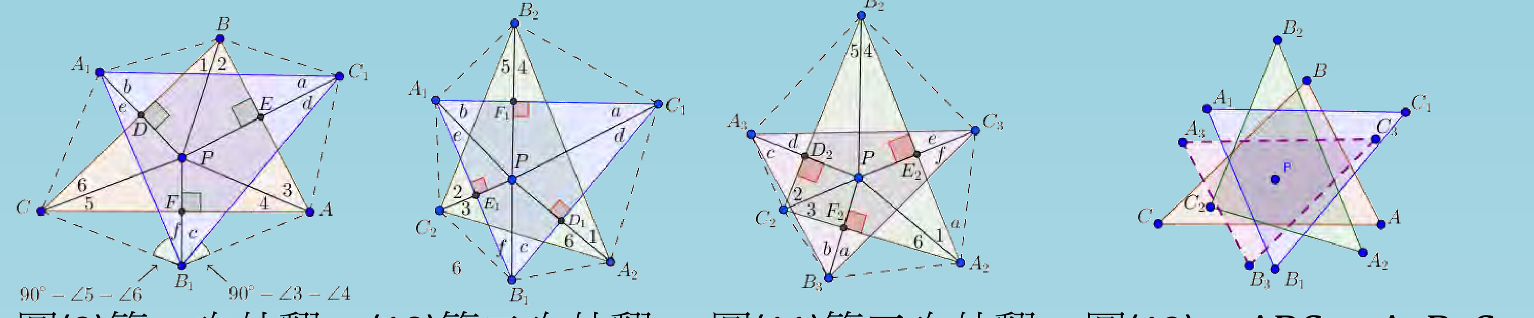
圖(1)原圖　圖(2)第一次外翻　圖(3)第二次外翻　圖(4)第三次外翻 $\triangle ABC\sim\triangle A_3B_3C_3$

例2、當P在外心處，連續外翻，如圖（5）～（8），得$\triangle ABC\sim\triangle A_3B_3C_3$ 恆成立，值得注意的是此時P為兩者的相似中心。



圖(5)原圖　圖(6)第一次外翻　圖(7)第二次外翻　圖(8)第三次外翻 P為相似中心

發現：當P點在外心上時，外翻三次圖形會與原圖形相似，且P恰為相似中心，如圖(8)，此時我們稱具有這種特性的P點即為一個**自守點**。



圖(9)第一次外翻　(10)第二次外翻　圖(11)第三次外翻　圖(12) $\triangle ABC\sim\triangle A_3B_3C_3$

**性質一：從平面上任一點開始外翻，連續外翻$\triangle$三次，最後得到的外翻$\triangle$必和原$\triangle$相似。**

已知：$\triangle ABC$為任意三角形，P為平面上任一點
求證：原圖形與外翻三次圖形為相似圖形
證明如下:

(1)如圖(9)，設$\angle PBC=\angle 1=a°$，$\angle PBA=\angle 2=b°$，$\angle PAB=\angle 3=c°$，$\angle PAC=\angle 4=d°$，$\angle PCA=\angle 5=e°$，$\angle PCB=\angle 6=f°$ 分別作第一次外翻得$\triangle A_1B_1C_1$

(2)第一次外翻時，$\triangle AB_1C_1$為一等腰三角形∴$\angle B_1AC_1=(2c+2d)°$(頂角)，∴$\angle C_1B_1A=(180°-2c-2d)\div 2=(90-c-d)°$(底角)

(3) ∵$\triangle B_1FA$為直角三角形，∴$\angle FB_1C_1=(90-d-(90-c-d))°=c°$

(4)同理$\triangle B_1CA_1$為一等腰三角形 ∴$\angle A_1CB_1=(2e+2f)°$(頂角)，∴$\angle CB_1A_1=(90-e-f)°$(底角)

(5) ∵$\triangle B_1FC$為直角三角形 ∴$\angle FB_1A_1=(90-e-(90-e-f))°=f°$，故$\angle A_1B_1C_1=(c+f)°$

(6)$\angle B_1A_1C_1$和$\angle A_1C_1B_1$以此類推 如圖(9)，得$\angle B_1A_1C_1=(b+e)°$，$\angle A_1C_1B_1=(a+d)°$

(7)第二次外翻時，$\triangle B_2C_1A_2$為一等腰三角形，如圖（10） ∴$\angle C_1A_2=(2a+2d)°$(頂角)，∴$\angle B_1A_2C_1=(90-a-d)°$(底角)

(8) ∵$\triangle C_1D_1A_2$為直角三角形，∴$\angle D_1A_2B_2=(90-d-(90-a-d))°=a°$

(9) $\triangle B_1C_2A_2$為一等腰三角形 ∴$\angle C_2B_1A_2=(2c+2f)°$(頂角)，∴$\angle C_2A_2B_1=(90-c-f)°$(底角)

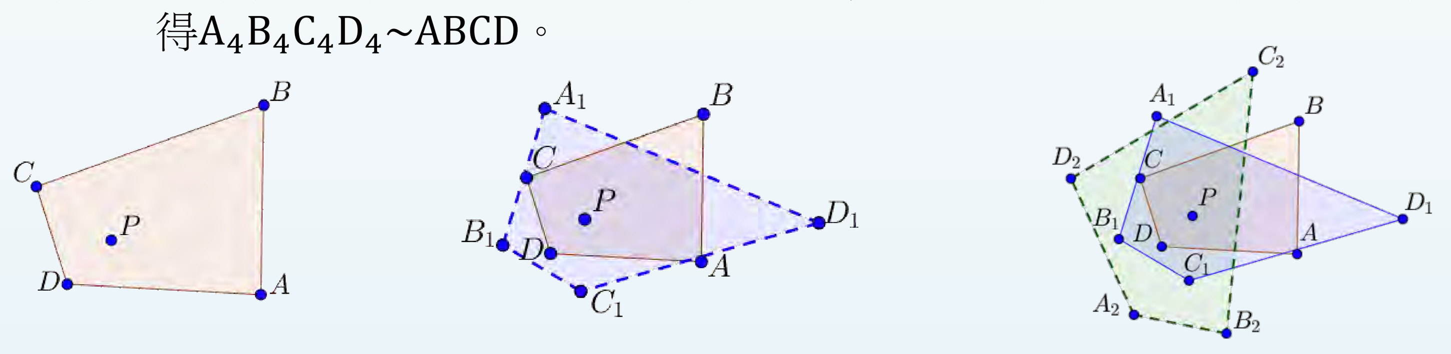
(10) ∵$\triangle B_1D_1A_2$為直角三角形 ∴$\angle D_1A_2C_2=(90-c-(90-c-f))°=f°$，$\angle B_2A_2C_2=(a+f)°$

(11)$\angle C_2B_2A_2$和$\angle A_2C_2B_2$以此類推，如圖(10)，得$\angle C_2B_2A_2=(e+d)°$，$\angle A_2C_2B_2=(b+c)°$

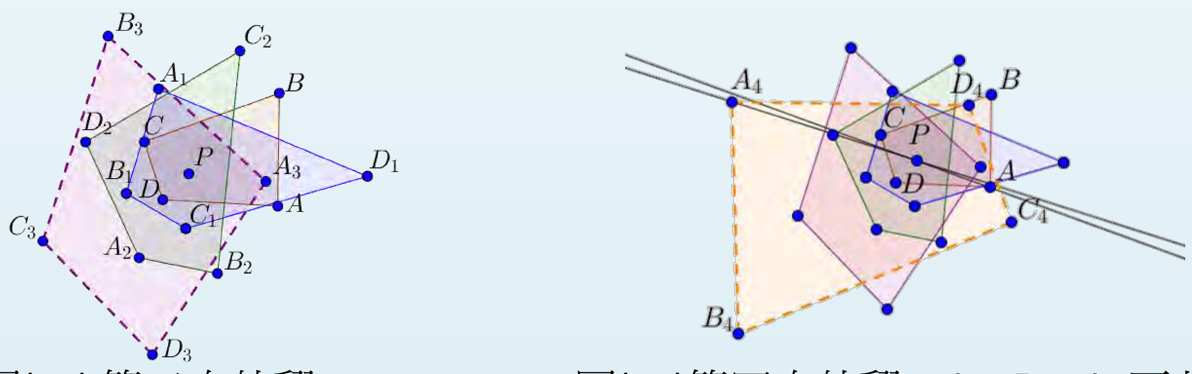
(12)第三次外翻以此類推 如圖(11)，得$\angle B_3C_3A_3=(e+f)°$ $\angle C_3A_3B_3=(c+d)°$ $\angle A_3B_3C_3=(a+b)°$ 明顯的知道$\angle CBA=\angle C_3B_3A_3$，$\angle BCA=\angle B_3C_3A_3$，$\angle BAC=\angle B_3A_3C_3$ 因此由AAA相似性質知$\triangle A_3B_3C_3\sim\triangle ABC$，如圖(12)

(二)四邊形：外翻幾次會與母四邊形相似？

例1：P為平面上任一定點，連續外翻四邊形ABCD四次，如圖（13）～（17），得$A_4B_4C_4D_4\sim ABCD$。

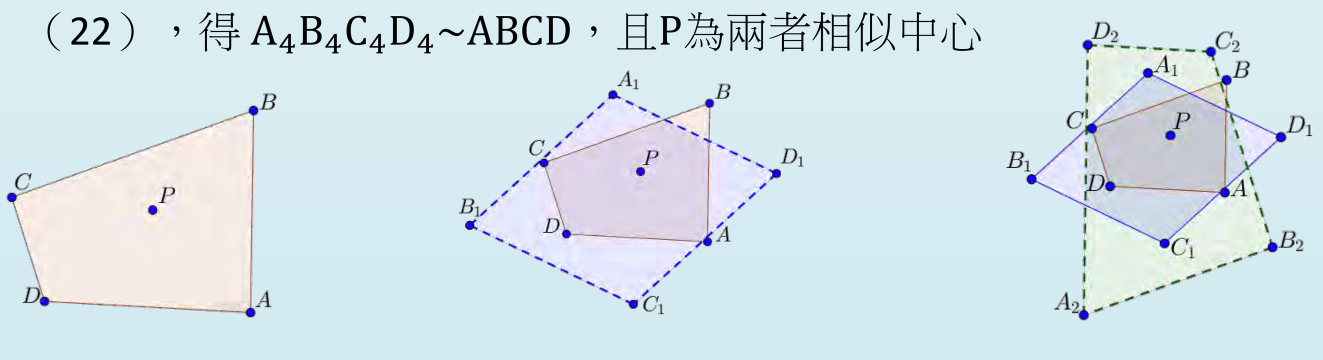


圖(13) P為任一定點　圖(14)第一次外翻　圖(15)第二次外翻



圖(16) 第三次外翻　圖(17)第四次外翻，A、P、$A_4$不共線 $ABCD\sim A_4B_4C_4D_4$，P非自守點

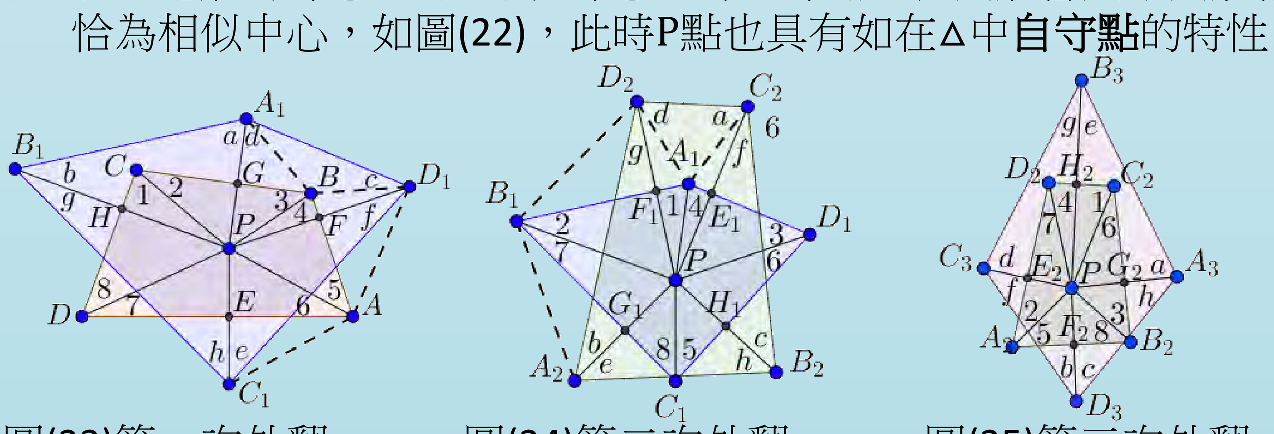
例2：若ABCD有外心，且P在外心上，則連續外翻四次，如圖（18）～圖（22），得 $A_4B_4C_4D_4\sim ABCD$，且P為兩者相似中心



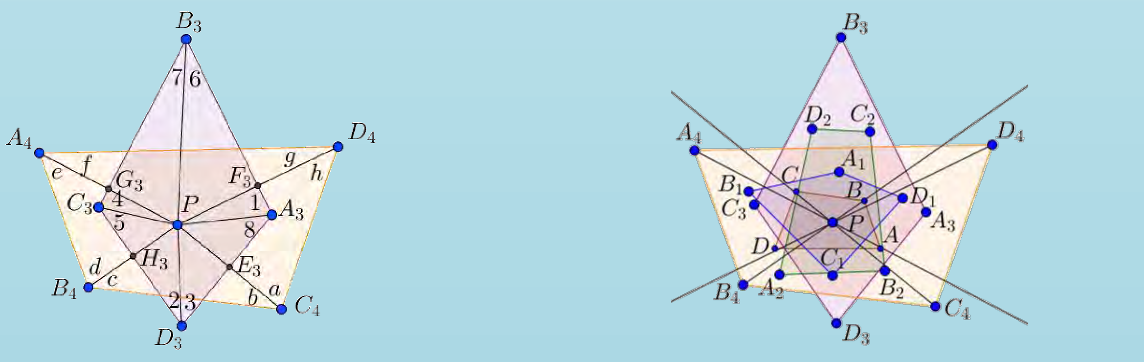
圖(18)取P為外心　圖(19)第一次外翻　圖(20)第二次外翻

圖(21) 第三次外翻　圖(22)第四次外翻，P為相似中心 $ABCD\sim A_4B_4C_4D_4$，P為自守點

發現：若四邊形有外心，當P點在外心上時，外翻四次圖形會與原圖形相似且P恰為相似中心，如圖(22)，此時P點也具有如在$\triangle$中**自守點**的特性



圖(23)第一次外翻　圖(24)第二次外翻　圖(25)第三次外翻



圖(26)第四次外翻　圖(27) $ABCD\sim A_4B_4C_4D_4$，P非自守點

**性質二：從平面上一定點起，外翻任四邊形四次後的四邊形必與原四邊形相似。**

已知：如圖(23)，P為平面上任一定點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$分別將∠A、∠B、∠C、∠D分成兩組同側分角。接著分別用$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$、$\overline{AB}$作P線對稱點，分別為$A_1$、$B_1$、$C_1$、$D_1$，依同法，連續外翻得$A_2B_2C_2D_2$、$A_3B_3C_3D_3$、$A_4B_4C_4D_4$。
求證：$ABCD\sim A_4B_4C_4D_4$
證明：在圖(23)中，依原四邊形ABCD的各分角計算第一次外翻後的四邊形$A_1B_1C_1D_1$的各分角，同法在圖(24)中得$A_2B_2C_2D_2$的各分角，接著$A_3B_3C_3D_3$及$A_4B_4C_4D_4$各分角都可推得，發現原ABCD和新$A_4B_4C_4D_4$的四對對應角相等，又發現四對對應邊亦成比例，故$A_4B_4C_4D_4\sim ABCD$，如圖(27)，同理可推至n邊形

**性質三：從平面上一定點起，外翻任意n邊形n次後的n邊形必與原n邊形相似。**

三、外翻n邊形n次而能使最後n邊形和原n邊形有相似中心的條件探討

當P為相似中心時，這n邊多邊形的同側分角和有一個漂亮的關係式

(一)、三角形

(1)在本證明中常常出現一個算式是"在等腰$\triangle$中，若頂角角度為$2x+2y$度，則兩底角必為$90-x-y$度"

(2)在圖(9)中，觀察五邊形$BPB_1AC_1$，得$\angle BPB_1=270°-b-c-d$

(3)在圖(10)中，觀察五邊形$B_2PB_1C_2A_1$，得$\angle B_2PB_1=270°-f-b-e$

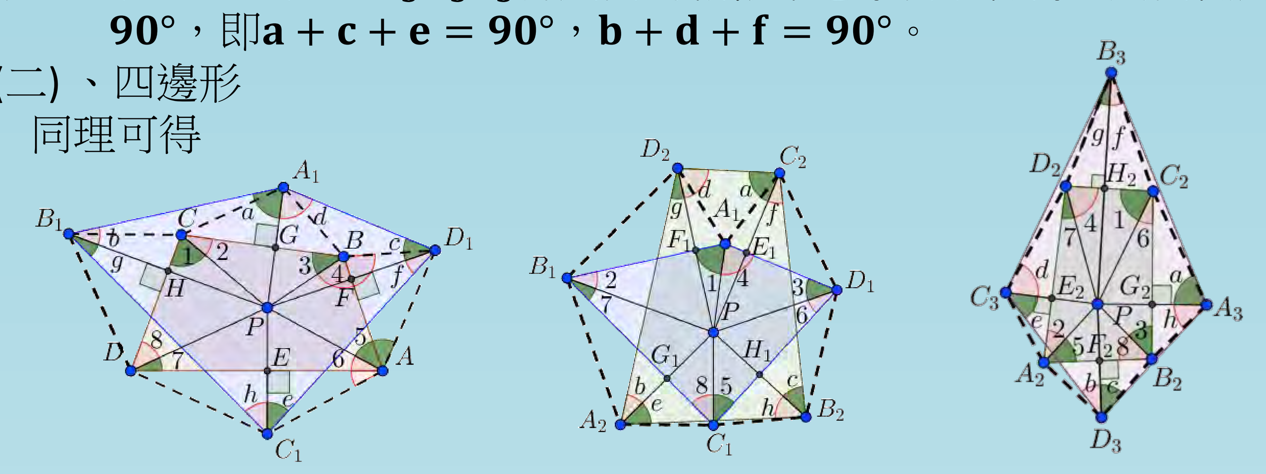
(4)在圖(11)中，觀察五邊形$B_2PB_3A_2C_3$，得$\angle B_2PB_3=270°-a-f-d$

(5)因要使得三次外翻的$\overline{PB}$和$\overline{PB_3}$共線，就必須要依順時針(當然逆時針計算也可以)從$\overline{PB}$轉成$\overline{PB_1}$再轉成$\overline{PB_2}$最後再轉成$\overline{PB_3}$，即共要轉成一**圈半540°**，方可使得$\overline{PB}$和$\overline{PB_3}$成一直線，因此令$\angle BPB_1+\angle B_2PB_1+\angle B_2PB_3=540°$ 即$270°-b-c-d+270°-f-b-e+270°-a-f-d=540$ ∴$b+d+f=90°$，此時$a+c+e=180°-(b+d+f)=90°$，得證。

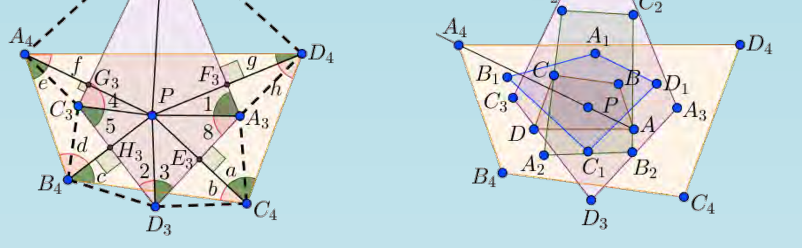
**性質四：若$\triangle ABC$和$\triangle A_3B_3C_3$有共同的相似中心(即自守點)，則同側分角和必為90°，即$a+c+e=90°$，$b+d+f=90°$。**

(二)、四邊形

同理可得



圖(28)　圖(29)　圖(30)

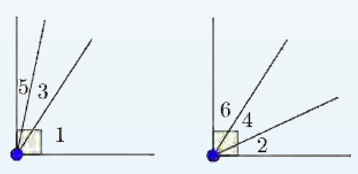


圖(31)　圖(32)

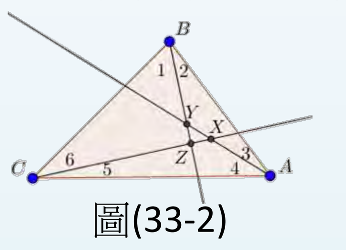
**性質五：在連續外翻四邊形四次的操作中，起點P是原四邊形和第四次外翻四邊形的自守點(相似中心)，則$a+c+e+g=180°$，或$b+d+f+h=180°$**

**性質六：在連續外翻n邊形n次的操作中，起點P是原n邊形和第n次外翻n邊多邊形的自守點（相似中心），則**
**(1)同一對應線段必旋轉$(2n-3)\times 180°$，$n\geq 3$**
**(2)分角和等於$(n-2)\times 90°$，$n\geq 3$（證明仿照三邊形、四邊形）**

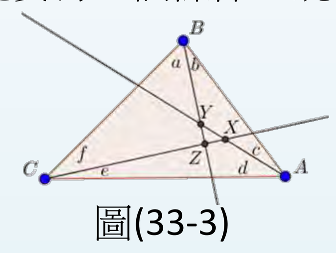
(二)反過來思考，性質四、五、六的逆性質是否會成立？例如：在圖（33-1）的兩直角中，我們利用尺規作圖，先將兩個直角隨意剖開成$\angle 1$、$\angle 3$、$\angle 5$和$\angle 2$、$\angle 4$、$\angle 6$再畫到$\Delta$內，如圖（33-2），觀察到很可能$\overrightarrow{AX}$、$\overrightarrow{BY}$、$\overrightarrow{CZ}$三條分界線不一定會交於同一點P，故逆性質不成立，但要使這三線都通過P點，使P點為相似中心，我們發現要有一個條件，說明如下：



圖(33-1)



圖(33-2)



圖(33-3)

令$\angle 1 = a$、$\angle 2 = b$、$\angle 3 = c$、$\angle 4 = d$、$\angle 5 = e$、$\angle 6 = f$

在圖（33-3），由$\Delta$內角和定理知$\angle BZC = 180° - a - f$，$\angle BYA = 180° - b - c$

再由$\Delta$ BZC及$\Delta$ BCY的正弦定理知$\frac{\overline{BZ}}{\sin f} = \frac{\overline{BC}}{\sin(180°-a-f)}$，$\frac{\overline{BY}}{\sin c} = \frac{\overline{BA}}{\sin(180°-b-c)}$

因為$a + c + e = 90°$或$b + d + f = 90°$並不一定保證三線共點，這樣就沒有相似中心了，所以我們加入條件，令$\overline{BZ}=\overline{BY}$，即可保證X、Y、Z重合

故$\frac{\sin f \cdot \overline{BC}}{\sin(a+f)} = \frac{\sin c \cdot \overline{BA}}{\sin(b+c)}$

**性質七：連續外翻$\Delta$三次的操作中，起點P是原$\Delta$和第三次外翻$\Delta$的相似中心，若且唯若同側分角和為$90°$且$\sin f \cdot \sin(b + c) \cdot \overline{BC} = \sin c \cdot \sin(a + f) \cdot \overline{AB}$**

## 四、連續外翻n邊形n次的自守點軌跡探討

### （一）三角形中的特殊自守點的尺規作圖操作探討

函數定義：

$Y = f^{(1)}(X)$：原$\Delta$ ABC中的X點，經第一次外翻後，對應到$\Delta A_1B_1C_1$中的Y點

$Y = f^{(2)}(X)$：$\Delta A_1B_1C_1$中的X點，經第二次外翻後，對應到$\Delta A_2B_2C_2$中的Y點

$Y = f^{(3)}(X)$：$\Delta A_2B_2C_2$中的X點，經第三次外翻後，對應到$\Delta A_3B_3C_3$中的Y點

$Y = f(X)$：原$\Delta$ ABC中的X點，經三次外翻後，對應到$\Delta A_3B_3C_3$中的Y點

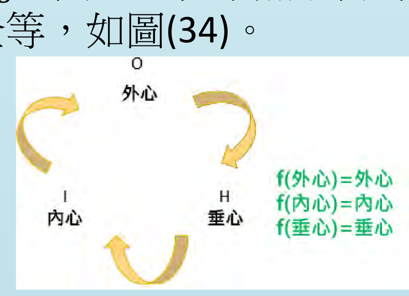
甲、觀察外心、內心、垂心在外翻過程中的相互關係，說明如下:

1、$f^{(1)}$(外心) = 垂心，$f^{(2)}$(垂心) = 內心，$f^{(3)}$(內心) = 外心，得f(外心) =外心

2、$f^{(1)}$(垂心) =內心，$f^{(2)}$(內心) = 外心，$f^{(3)}$(外心) = 垂心，得f(垂心) =垂心

3、$f^{(1)}$(內心) =外心，$f^{(2)}$(外心) = 垂心，$f^{(3)}$(垂心) = 內心，得f(內心) =內心

4、外心O、垂心H、內心I依順時針方向輪替在$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$之間且過程中無論何時當輪到外翻外心狀態時，所翻成的$\Delta$和當下$\Delta$保持全等，如圖(34)。



圖(34)外翻過程中三心循環「接棒」

**性質八：若O、H、I分別為$\Delta$的外心、垂心、內心，定義$Y = f(X)$為將原$\Delta$中的X點外翻 三次後對應到新$\Delta$的Y點，則在外翻的過程中，O、H、I三心名稱循環變換，且f(外心)=外心、f(內心)=內心、f(垂心)=垂心，如圖(34)。**

**性質九：承上個性質，在輪動的外心、垂心、內心外翻操作時，當輪到從外心做外翻時，所翻成的$\Delta$和當下$\Delta$保持全等，全等自然面積相等。**

乙、一般三角形中，**自守點**和對應的**共軛點**的關係探討

已知：P為$\Delta$ ABC的一個自守點，如圖(35)。

試作：P點的共軛點，並證明此共軛點亦為自守點

作法：（1）分別作$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的分角線$\overrightarrow{AX_a}$ $\overrightarrow{BX_b}$ $\overrightarrow{CX_b}$

（2）過P分別作$\overrightarrow{AX_a}$ $\overrightarrow{BX_b}$ $\overrightarrow{CX_b}$的對稱點$Y_a$、$Y_b$、$Y_c$

（3）分別作$\overrightarrow{AY_a}$ $\overrightarrow{BY_b}$ $\overrightarrow{CY_b}$，交點於$P'$，則$P'$即為所求

證明：（欲證明$P'$點也是自守點）

（1）連$\overline{P'A}$ $\overline{P'B}$ $\overline{P'C}$

（2）∵在圖（35）和（36）中，點P和點$Y_b$是直線$\overleftrightarrow{BX_b}$的兩對稱點

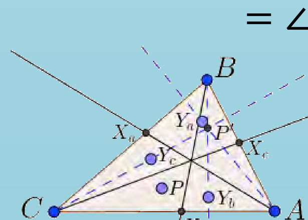
$\therefore \angle P'BI = \angle PBI$（I是內心） $\therefore \angle P'BC = \angle PBA$・・・（1）

同理$\angle P'AB = \angle PAC$・・・（2）$\angle P'CA = \angle PCB$・・・（3）

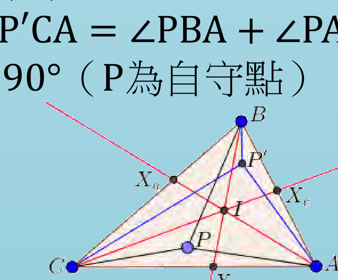
（3）由（1）＋（2）＋（3）

$\angle P'BC + \angle P'AB + \angle P'CA = \angle PBA + \angle PAC + \angle PCB$

$= \angle 2 + \angle 4 + \angle 6 = 90°$（P為自守點），得證P'亦為自守點



圖(35)

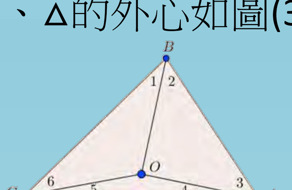


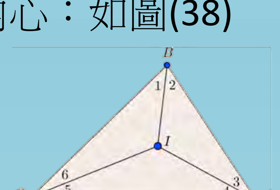
圖(36)

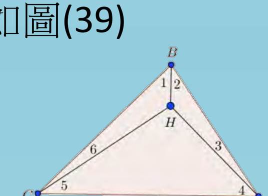
**性質十：若P為$\Delta$ ABC的一個自守點，則其共軛點$P'$亦為此$\Delta$的自守點。**

丙、在一般$\Delta$中可以用尺規作圖直接畫出的自守點有：

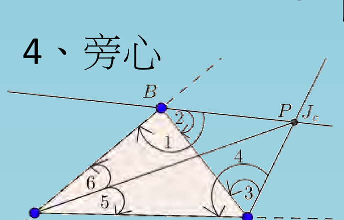
1、$\Delta$的外心如圖(37)　2、內心：如圖(38)　3、垂心：如圖(39)

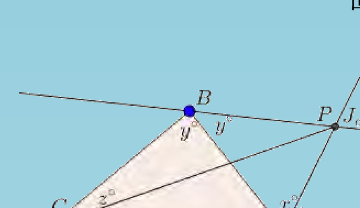

圖(37)

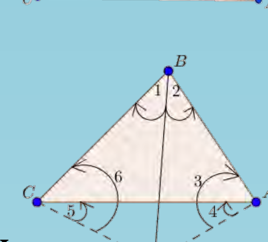

圖(38)


圖(39)

4、旁心

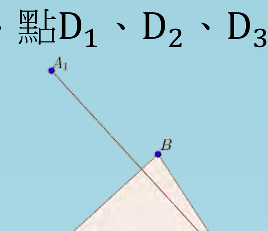

圖(40)


圖(41) 旁心$J_c$


圖(42)

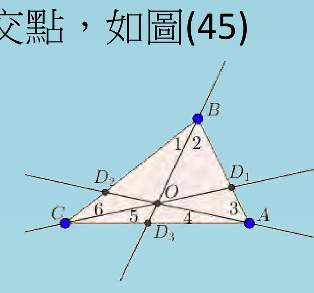
5、頂點A、B、C:如圖(43)、圖(44)。

6、點$D_1$、$D_2$、$D_3$：外心和各頂點所做的直線與對邊的交點，如圖(45)


圖(43)


圖(44)

$\Delta$的頂點皆為自守點

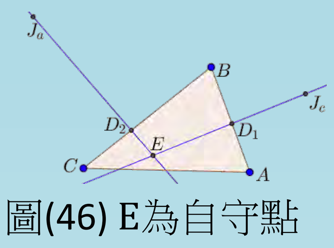


圖(45)

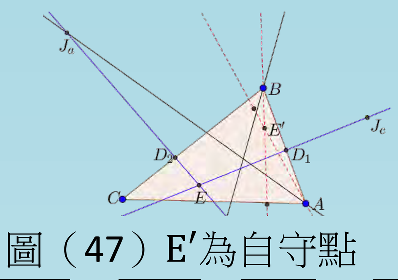
$D_1$、$D_2$、$D_3$皆為自守點

7、點E：為$\overleftrightarrow{D_1J_c}$ $\overleftrightarrow{D_2J_a}$ $\overleftrightarrow{D_3J_b}$的交點E，如圖(46)，則E點為自守點

8、E'：為E的共軛點

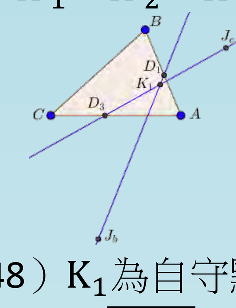


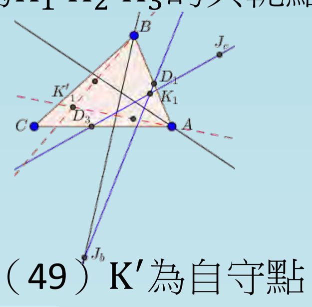
圖(46) E為自守點

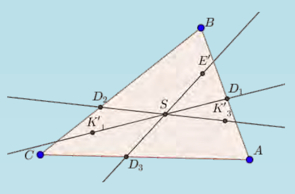

圖（47）$E'$為自守點

9、$K_1$、$K_2$、$K_3$：分別為$\overline{D_1J_b}$和$\overline{D_3J_c}$、$\overline{D_2J_c}$和$\overline{D_1J_a}$、$\overline{D_3J_a}$和$\overline{D_2J_b}$的交點，如圖(48)，則此三點$K_1$、$K_2$、$K_3$皆為自守點。

10、$K'_1$、$K'_2$、$K'_3$：分別為$K_1$ $K_2$ $K_3$的共軛點


圖（48）$K_1$為自守點

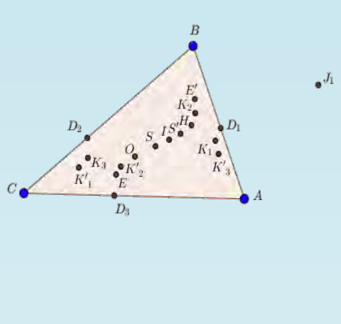

圖（49）$K'$為自守點


圖（50）S為自守點

11、S：為$\overline{D_1K'_1}$、$\overline{D_2K'_3}$、$\overline{D_3E'}$的交點，如圖(50)，則S為自守點。

12、S'：為S的共軛點，由性質十知此點即為自守點。

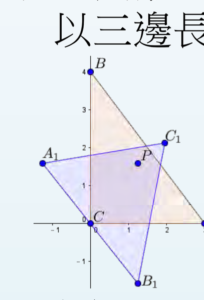
結論：綜合上述各部分，對任意三角形我們用**尺規作圖**至少可畫出22點自守點，如圖(51)，我們隱約可以看出這些自守點分成左、中、右三群。

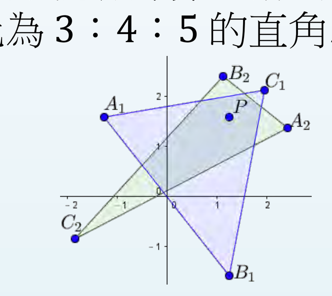

圖(51) 尺規作圖取得22個自守點分布圖

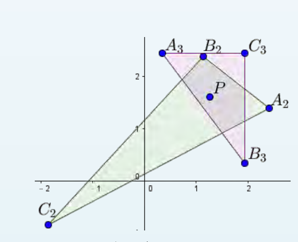
除了上述22點外，絕大多數起點P都不是相似中心，我們好奇想要探討**外翻哪些點當起點能成為原$\Delta$和第三個$\Delta$的共同相似中心(自守點)?**

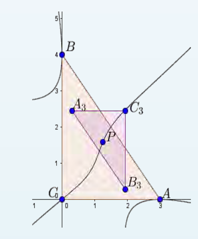
### （二）三角形的自守點軌跡計算並繪出軌跡圖

以三邊長的比為3：4：5的直角$\Delta$為例


圖(52)


圖(53)


圖(54)


圖(55)

已知：如圖(52)，設A(3,0)、B(0,4)、C(0,0)，內有一點P(s, t)，

且$\overleftrightarrow{AB}$：$4x + 3y = 12$、$\overleftrightarrow{BC}$：$x = 0$、$\overleftrightarrow{AC}$：$y = 0$，P符合前文自守點條件

試求：自守點軌跡之方程式

計算：先以P點做第一次外翻，則$A_1(s - \frac{32s+24t-96}{25}, t - \frac{24s+18t-72}{25})$、$B_1(-s, t)$、$C_1(s, -t)$，假設$\frac{32s+24t-96}{25}$為$a_1$、$\frac{24s+18t-72}{25}$為$a_2$，求出

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{A_1B_1}：tx + sy = 0 \\ \overleftrightarrow{B_1C_1}：(2t - a_2)x + a_1y = -ta_1 + 2st - sa_2 \\ \overleftrightarrow{A_1C_1}：a_2x + (2s - a_1)y = -ta_1 + 2st - sa_2 \end{cases}$$

假設$2t - a_2$為$a_3$、$-ta_1 + 2st - sa_2$為$a_4$、$2s - a_1$為$a_5$，接著再做第二次外翻，如圖(53)，得$A_2(s - \frac{2a_3(a_3s+a_1t-a_4)}{a_1^2+a_3^2}, t - \frac{2a_1(a_3s+a_1t-a_4)}{a_1^2+a_3^2})$

、$B_2(s - \frac{2a_2(a_2s+a_5t-a_4)}{a_2^2+a_5^2}, t - \frac{2a_5(a_2s+a_5t-a_4)}{a_2^2+a_5^2})$、$C_2(s - \frac{4t^2s}{s^2+t^2}, t - \frac{4s^2t}{s^2+t^2})$，

並假設$\frac{4t^2s}{s^2+t^2}$為$a_7$、$\frac{4s^2t}{s^2+t^2}$為$a_8$、$\frac{2a_3(a_3s+a_1t-a_4)}{a_1^2+a_3^2}$為$a_9$、$\frac{2a_1(a_3s+a_1t-a_4)}{a_1^2+a_3^2}$為$b_1$、$\frac{2a_2(a_2s+a_5t-a_4)}{a_2^2+a_5^2}$為$b_2$、$\frac{2a_5(a_2s+a_5t-a_4)}{a_2^2+a_5^2}$為$b_3$，求出

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{A_2B_2}：(b_3 - b_1)x + (a_9 - b_2)y = (t - b_1)(a_9 - b_2) + (s - a_9)(b_3 - b_1) \\ \overleftrightarrow{B_2C_2}：(b_3 - a_8)x + (a_7 - b_2)y = (t - a_8)(a_7 - b_2) + (s - a_7)(b_3 - a_8) \\ \overleftrightarrow{A_2C_2}：(b_1 - a_8)x + (a_7 - a_9)y = (t - a_8)(a_7 - a_9) + (s - a_7)(b_1 - a_8) \end{cases}$$

假設$b_3 - a_8$為$b_4$、$a_7 - b_2$為$b_5$、$(t - a_8)(a_7 - b_2) + (s - a_7)(b_3 - a_8)$為$b_6$、$b_1 - a_8$為$b_7$、$a_7 - a_9$為$b_8$、$(t - a_8)(a_7 - a_9) + (s - a_7)(b_1 - a_8)$為$b_9$、$b_3 - b_1$為$c_1$、$a_9 - b_2$為$c_2$、$(t - b_1)(a_9 - b_2) + (s - a_9)(b_3 - b_1)$為$c_3$，

最後做第三次外翻，如圖(54)，可得

$A_3(s - \frac{2b_4(b_4s+b_5t-b_6)}{b_4^2+b_5^2}, t - \frac{2b_5(b_4s+b_5t-b_6)}{b_4^2+b_5^2})$

$B_3(s - \frac{2b_7(b_7s+b_8t-b_9)}{b_7^2+b_8^2}, t - \frac{2b_8(b_7s+b_8t-b_9)}{b_7^2+b_8^2})$

$C_3(s - \frac{2c_1(c_1s+c_2t-c_3)}{c_1^2+c_2^2}, t - \frac{2c_2(c_1s+c_2t-c_3)}{c_1^2+c_2^2})$

並假設$\frac{2b_4(b_4s+b_5t-b_6)}{b_4^2+b_5^2}$為$c_4$、$\frac{2b_5(b_4s+b_5t-b_6)}{b_4^2+b_5^2}$為$c_5$、$\frac{2b_7(b_7s+b_8t-b_9)}{b_7^2+b_8^2}$為$c_6$、$\frac{2b_8(b_7s+b_8t-b_9)}{b_7^2+b_8^2}$為$c_7$、$\frac{2c_1(c_1s+c_2t-c_3)}{c_1^2+c_2^2}$為$c_8$、$\frac{2c_2(c_1s+c_2t-c_3)}{c_1^2+c_2^2}$為$c_9$

求出其直線方程式如下

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{A_3B_3}：(c_7 - c_5)x + (c_4 - c_6)y = (t - c_5)(c_4 - c_6) + (s - c_4)(c_7 - c_5) \\ \overleftrightarrow{B_3C_3}：(c_9 - c_7)x + (c_6 - c_8)y = (t - c_7)(c_6 - c_8) + (s - c_6)(c_9 - c_7) \\ \overleftrightarrow{A_3C_3}：(c_9 - c_5)x + (c_4 - c_8)y = (t - c_5)(c_4 - c_8) + (s - c_4)(c_9 - c_5) \end{cases}$$

在前文研究過程中我們知道了一個重要性質:“若外翻起點為自守點，則外翻 三次後的$\Delta$和原$\Delta$的對應邊必相互平行“。因此我們使用兩線平行的條件，以$\overleftrightarrow{A_3C_3} \parallel \overleftrightarrow{AC}$，則有等式：$3(c_7 - c_5) = 4(c_4 - c_6)$，將假設代入後得方程式：

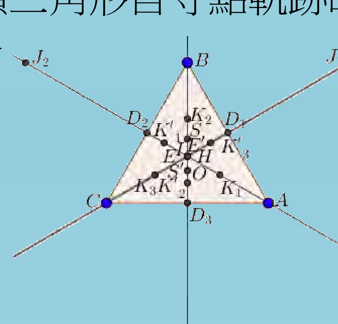
$4x^3 - 3y^3 - 12xy^2 + 9x^2y - 24x^2 + 24y^2 + 14xy + 36x - 48y = 0$，並繪出軌跡圖，如圖 (55)，軌跡分成三條，且22個特殊自守點都位在曲線上。

**性質十一：我們利用相同計算方法推出任意三角形自守點軌跡一般式，(計算過程 請見附件(五))，通式如下：**

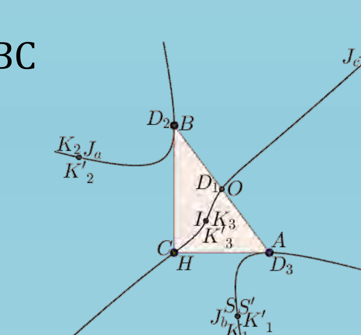
$b^2x^3 - aby^3 - acx^3 - ab^2c^2 - 2ab^2x^2 + 2ab^2y^2 - ab^3y + ac^2x^2 - ac^2y^2 - bcy^3$
$+a^2cx^2 - a^2cy^2 - a^2b^2c + a^2b^2x - a^2c^2x - 2b^2cx^2 + 2b^2cy^2 - 3b^2xy^2 + b^2c^2x - b^3cy$
$+ 2b^3xy + 2abc^2y + 3abx^2y + 3acxy^2 + 3ab^2cx + 3bcx^2y - 2bc^2xy$
$+2a^2bcy - 2a^2bxy - 6abcxy = 0$，並繪出軌跡圖，軌跡分成三條，觀察之前那22個特殊自守點都位在曲線上，其中規定A(a, 0)、B(0, b)、C(c, 0)，只要給定a、b、c代入通式，即可繪出該$\Delta$的自守點軌跡，非常方便。

### （三）外翻各類三角形自守點軌跡的觀察與探討

1、正三角形

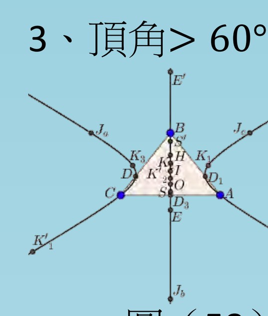

圖（56）

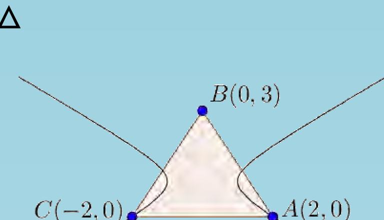
2、直角$\Delta$ ABC


圖（57）

**性質十二：正$\Delta$的自守點軌跡為三條對稱軸，由圖中可看出22點皆位在軌跡上。**

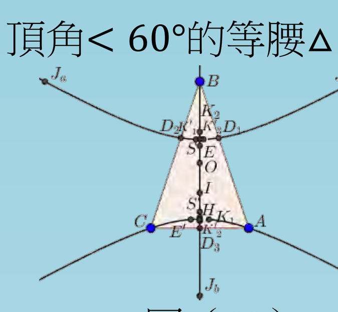
3、頂角> 60°的等腰$\Delta$

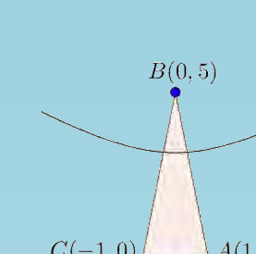

圖（58）



圖（59）

4、頂角< 60°的等腰$\Delta$


圖（60）



圖（61）

**性質十三：一般$\Delta$的自守點軌跡曲線中，左右兩條像是雙曲線，但其實絕大多數都不是，只有在非正$\Delta$的等腰$\Delta$時，左右或上下才形成雙曲線。**

**性質十四：$\Delta$的自守點軌跡為三次曲線，左右兩條曲線通過$\Delta$兩個頂點，中間那條曲線 (或直線)則除了過$\Delta$頂點外並穿過$\Delta$的內部且恆過其垂心、內心、外心。**

### （四）外翻各類四邊形自守點軌跡的計算探討

已知：設A(2,0)、B(2,4)、C(0,4)、D(0,0)，內有一點P(m, n)，且$\overleftrightarrow{AB}$：$x = 2$、$\overleftrightarrow{BC}$：$y = 4$、$\overleftrightarrow{CD}$：$x = 0$、$\overleftrightarrow{AD}$：$y = 0$若P符合前文自守點之條件

試求：自守點軌跡之方程式

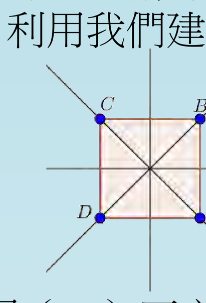
計算：方法與流程與$\Delta$相類似，只是規模較龐大，最後得方程式為：

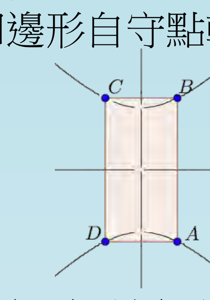
$-xy^3 + x^3y - 2x^3 + y^3 + 6xy^2 - 3x^2y + 6x^2 - 6y^2 - 6xy - 4x + 8y = 0$

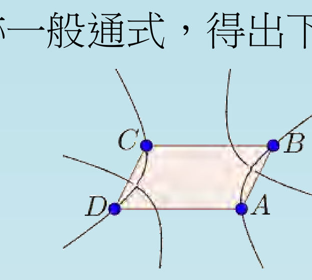
並繪出圖形(63)，關於四邊形自守點軌跡的一般式，將它放在附件（三）

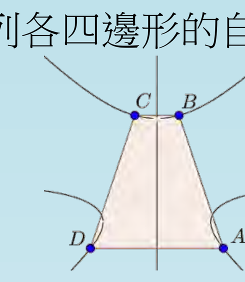
### （五）四邊形軌跡探討

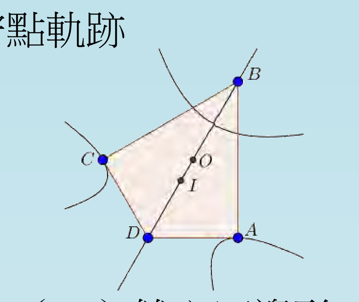
利用我們建立的四邊形自守點軌跡一般通式，得出下列各四邊形的自守點軌跡


圖（62）正方形


（63）長方形


（64）平行四邊形


（65）等腰梯形


（66）雙心四邊形

**性質十五：一般四邊形的自守點軌跡有四條，通過四個頂點，若有外心、內心也必在曲線上，特別的是正方形的自守點軌跡是四條對稱軸。**

### （六）任意n邊形軌跡計算和探討

同理計算並畫出任 n 邊形的自守點軌跡，五、六邊形見圖(88)(89)及附件(六)

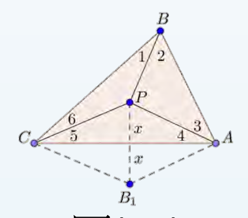
### （七）正n邊形軌跡計算和探討

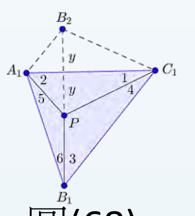
由前文的觀察探討，我們可以看出當原圖形是正多邊形時，其自守點軌跡為所有對稱軸，計算過程及圖形見附件(七)。

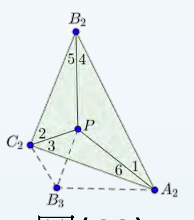
**性質十六：正n邊多邊形的自守點軌跡即為它的n條對稱軸。**

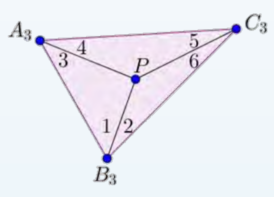
## 五、n邊形與從自守點軌跡上外翻n次圖形邊長比值探討

（一）三角形外翻$\triangle A_3B_3C_3$和原$\triangle ABC$邊長比值函數式推導


圖(67)


圖(68)


圖(69)


圖(70)

已知：P點在自守點軌跡上

求算：外翻三次後的$\triangle A_3B_3C_3$和原$\triangle ABC$的對應邊長比值

(1)∵圖(67)中，$\overline{CP} \times \sin\angle 5 = x$ $\overline{B_1P} = 2x$ ∴$2\overline{CP}\cdot\sin\angle 5 = \overline{B_1P}$

(2)∵圖(68)中，$\overline{C_1P}\cdot\sin\angle 3 = y$ $\overline{B_2P} = 2y$ ∴$2\overline{C_1P}\cdot\sin\angle 3 = \overline{B_2P}$

(3)以此類推圖(69)中，$2\overline{C_2P}\cdot\sin\angle 5 = \overline{B_3P}$

(4)圖(67)$\triangle ABP$中，$\frac{\sin\angle 1}{\overline{CP}} = \frac{\sin\angle 6}{\overline{BP}}$，得$\overline{BP} = \frac{\overline{CP}\cdot\sin\angle 6}{\sin\angle 1}$

(5)圖(68)$\triangle A_1B_1P$中，$\frac{\sin\angle 4}{\overline{B_1P}} = \frac{\sin\angle 5}{\overline{C_1P}}$，$\overline{C_1P} = \frac{\overline{B_1P}\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 4} = \frac{2\,\overline{CP}\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 4}$

(6)圖(69)$\triangle A_2B_2P$中，$\frac{\sin\angle 6}{\overline{B_2P}} = \frac{\sin\angle 1}{\overline{C_2P}}$

得$\overline{C_2P} = \frac{\overline{B_2P}\cdot\sin\angle 1}{\sin\angle 6} = \frac{2\,\overline{C_1P}\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 1}{\sin\angle 6} = \frac{4\,\overline{CP}\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 1^2}{\sin\angle 6\cdot\sin\angle 2}$

(7)$\overline{B_3P} = 2\overline{C_2P}\cdot\sin\angle 5 = \frac{8\,\overline{CP}\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5\cdot\sin^2\angle 1}{\sin\angle 6\cdot\sin\angle 2}$

(8) $\frac{\overline{B_3P}}{\overline{BP}} = \frac{\frac{8\,\overline{CP}\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5\cdot\sin^2\angle 1}{\sin\angle 6\cdot\sin\angle 2}}{\frac{\overline{CP}\cdot\sin\angle 6}{\sin\angle 1}} = \frac{8\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5\cdot\sin^2\angle 1}{\sin\angle 6\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 2}$ 即為所求

**性質十七：若$\triangle ABC$外翻三次成$\triangle A_3B_3C_3$，起點P是相似中心，則$\triangle A_3B_3C_3$和$\triangle ABC$對應邊長比值為$\frac{8\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}$**

同理推得

**性質十八：若四邊形ABCD外翻四次成$A_4B_4C_4D_4$，起點P是自守點，則四邊形$A_4B_4C_4D_4$和ABCD對應邊長比值為$\frac{16\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5\cdot\sin^2\angle 7}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6\cdot\sin\angle 8}$**

**性質十九：推廣至n邊形時，外翻n次後其邊長比值為$\frac{2^n\cdot\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5\ldots}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6\cdots}$**

(二)正n邊形從自守點外翻n次所得的多邊形和原多邊形的最大對應邊長比值探討：

觀察上述的邊長比值函數通式，令$p(x) = \frac{2^n\cdot\sin^2\angle 1\cdot\sin^2\angle 3\cdot\sin^2\angle 5\ldots}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6\cdots}, n \ge 3, \overline{MP} = x$，如圖（71），並嘗試畫出正多邊形的函數圖形。因為正多邊形的自守點軌跡皆為其對稱軸，為方便探討起見，我們將此正n邊形的兩頂點分別設在(2,0)、(−2,0)時，其一對稱軸必為y軸。於是正n邊形每邊長均為4，且將一條對稱軸放在y軸上，自守點P沿著y軸上下移動藉以觀察對應邊長比值的變化。

1、求正∆在自守點曲線上，外翻三次的∆和原∆對應邊長比值關係式及其最大值

令動點(自守點)P(0, x)如圖(72)，設y軸交底邊$\overline{AC}$於M，即M(0,0)，自守點P是動點，$\overline{MP} = x$單位長，P點沿著y軸上下移動，計算其關係式。過程如下，再繪出可呈現外翻 n 次圖形與原圖形的邊長比例變化的函數圖形，如圖（72）x軸代表P點至原點的距離，y軸代表自守點P在當下所在位置，取所計算的對應邊長比值

代入公式$p(x) = 2^3 \times \frac{(\sin\angle 1)^2\times(\sin\angle 3)^2\times(\sin\angle 5)^2}{\sin\angle 2\times\sin\angle 4\times\sin\angle 6}$

∵ $\sin\angle 1 = \sin\angle 2$ $\sin\angle 3 = \sin\angle 6$ $\sin\angle 4 = \sin\angle 5$

∴ 得$p(x) = 2^3 \times \sin\angle 1 \times \sin\angle 3 \times \sin\angle 5$

其中 $\sin\angle 1 = \sin(\frac{(3-2)\pi}{6}) = \frac{1}{2}$，

$\sin\angle 3 = \sin 60° \times \cos\angle 4 - \sin\angle 4 \times \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{2^2+x^2}} \times \frac{1}{2}$，

$\sin\angle 5 = \frac{x}{\sqrt{2^2+x^2}}$

$\sin\angle 1 \times \sin\angle 3 \times \sin\angle 5 = (\frac{1}{2}) \times (\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{2^2+x^2}} \times \frac{1}{2}) \times (\frac{x}{\sqrt{2^2+x^2}})$

展開並整理後得函數式：$p(x) = \frac{4\sqrt{3}x-2x^2}{4+x^2}$。

以$\overline{MP} = x$，放在x軸上繪出p(x)圖形如圖(72)所示。

2、接下來分析這個關係式，並求邊長最大比值，計算如下：

計算∵ p(x)為一個分式，若要求極值，就要使用分式微分，我們從google知道如何微分，並取得其極值

令$p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-2x^2+4\sqrt{3}x}{x^2+4}$

則 $p'(x) = \frac{f'(x)\times g(x) - g'(x)\times f(x)}{g(x)^2} = \frac{(-4x+4\sqrt{3})(x^2+4)-2x(-2x^2+4\sqrt{3}x)}{(x^2+4)^2}$

$= \frac{-4\sqrt{3}x^2-16x+16\sqrt{3}}{(x^2+4)^2}$

令$p'(x) = 0$（斜率是零），$-4\sqrt{3}x^2 - 16x + 16\sqrt{3} = 0$

$\sqrt{3}x^2 + 4x - 4\sqrt{3} = 0$，解得兩根為$x = \frac{-4\pm 8}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ or $2\sqrt{3}$

（1）取$x = -2\sqrt{3}$，代入比值函數式p(x)

∴ $p(-2\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}(-2\sqrt{3})-2(-2\sqrt{3})^2}{4+(-2\sqrt{3})^2} = \frac{-24-24}{16} = \frac{-48}{16} = 3$倍（最大值）

（2）取$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，代入p(x)，$p\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{24-8}{12+4} = \frac{16}{16} = 1$倍

3、 接下來用尺規作圖求作P點，使$\frac{\triangle A_3B_3C_3\text{邊長}}{\triangle ABC\text{邊長}}$的比值最大

已知：正$\triangle ABC$

求作：畫出使$\triangle A_3B_3C_3$邊長：$\triangle ABC$邊長比值最大的自守點P

作法：以$\overline{AC}$為對稱軸，做B點的對稱點P，則P點即為所求。

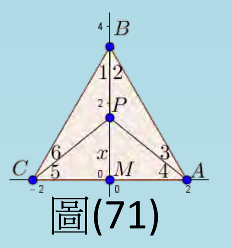
（同理，另有兩點）接下來我們要找出正∆外翻三次後與原∆邊長比值y= 1或2或3倍時P點的座標，計算如下：見圖（73）

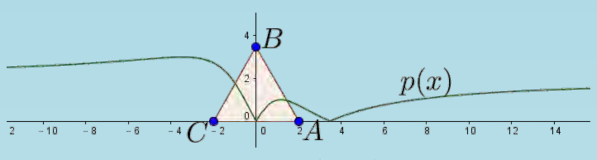
與 $y = 0$的交點$(0,0)(0,2\sqrt{3})$共兩點，表示當P在這兩點時$\triangle A_3B_3C_3$面積為零

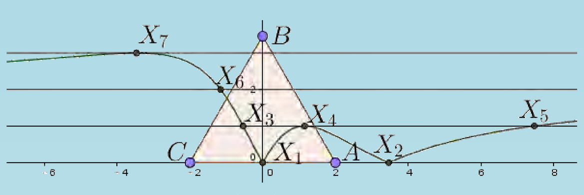
與 $y = 1$的交點$(0, 2\sqrt{3} \pm 4)$ $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$共三點，其中$(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$為中心點

與 $y = 2$的交點 $(0, \frac{-2\sqrt{3}}{3})$ 共一點，表示2倍的自守點在外接圓上

與 $y = 3$交於$(0, -2\sqrt{3})$共一點(最高點)，表示此自守點在B對$\overline{AC}$的對稱點上


圖(71)


圖(72) p(x)曲線


圖(73)

**性質二十：在正∆的一條對稱軸上，比值為1時P點有三處、比值為2時P點只有一處、比值為3時P點也只有一處且為最大邊長比值的位置，即在整個正∆平面上來說，外翻三次後產生最大對應邊長比值的自守點有三處，各位在以任意邊為對稱軸，第三頂點的對稱點上**

4、求正四邊形在自守點曲線上，外翻四次的四邊形和原四邊形對應邊長比值關係式 及其最大值

當P點位於(0,2)，即中心點時外翻四次圖形與原圖形的邊長比值最大

發現使$\frac{A_4B_4C_4D_4\text{邊長}}{ABCD\text{邊長}}$的比值最大的P點就在中心處

接下來我們要找正四邊形外翻四次後與原四邊形邊長比值y=1或2或3或4倍時P點的座標，計算如下：

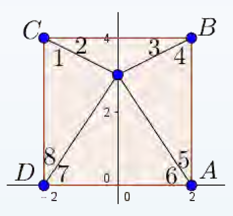
與y=1的交點 ：$x = \pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{11}+4}+2, \pm 2\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{11}+4}+2,$

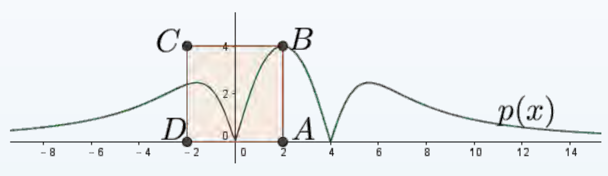
$\pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{19}-4}+2$ 共有六點

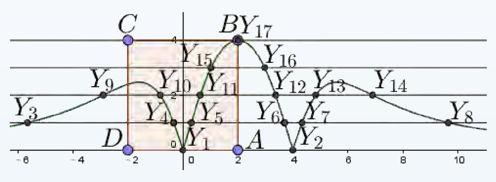
與y=2的交點：$x = \pm 2\sqrt{2}+2, \pm 2\sqrt{6}+2, \pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}+2$ 共有六點

與y=3的交點：$x = \frac{\pm 2\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{19}-4}+6}{3}$ 共有兩點

與y=4的交點：$x = 2$ 共有一點(最高點)


圖(74)


圖(75) p(x)曲線

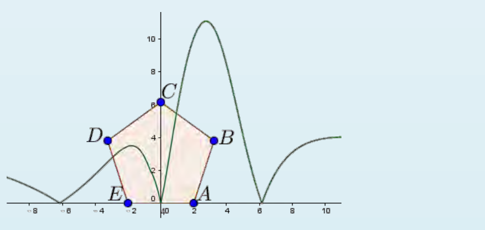

圖(76)

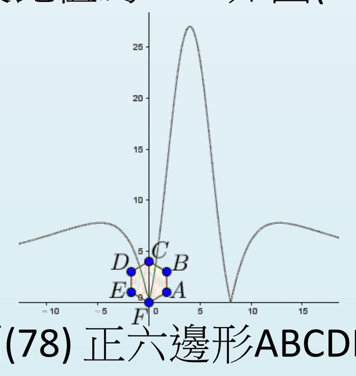
**性質二十一：在正四邊形平面上，外翻四次後產生最大對應邊長比值的自守點位在圖形的中心點，比值為1時的P點有六處、比值為2時P點也有六處、比值3時P點有兩處、比值為4時P點只有一處，此處就是最大邊長比值4的位置**

5、同理求出正五、六邊形外翻後邊長比值函數關係式及其圖形，並討論最大值

(1)當P落在正五邊形中心點時，有最大邊長比值$\frac{5\sqrt{5}+11}{2}$，如圖(77)。

(2)當P落在正六邊形中心點時，有最大邊長比值為27，如圖(78)。


圖(77) 正五邊形ABCDE


圖(78) 正六邊形ABCDEF

6、求正n邊形外翻n次後，對應邊長比值關係式及其圖形，並討論最大值，見圖（79）當P在y軸上移動，外翻n邊形邊長也跟著改變，我們試求外翻多邊形與原多邊形的最大倍數和此時P點的位置。經觀察我們發現，除了正∆，所有的正n邊形外翻圖形與原圖形出現最大邊長比例時，P點皆在圖形的中心。觀察後發現正n邊形每個夾角度數都為$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$。於是我們求出自守點為正多邊形中心的函數圖形

**性質二十二：(1)正n邊形自守點上，最大邊長比值的倍數公式（不含正三角形）：**

**$2^n \times \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$, 正整數n≥ 4。**

**(2)正三角形自守點上，最大邊長比值的倍數為3**

## 六、正∆中利用尺規作圖，畫出外翻與原多邊形邊長比值為整數倍的自守點位置

在正$\triangle ABC$中，觀察這些一倍、二倍、三倍比值得P點共有13個，若同時畫在同一個圖中，如圖（80），共可出現四個圓，其中二倍的位在∆ABC外接圓上，三倍的位在∆ABC旁心圓上，一倍的分在大小兩個圓和一個中心點上，其中小圓和∆ABC有六個交點，大圓在頂點外側加上一倍邊長處。計算各圓半徑如下:

最小圓半徑 $r_1 = 4 - 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{12-4\sqrt{3}}{3}$、外接圓半徑 $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

旁心圓半徑 $r_3 = 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$、最大圓半徑 $r_4 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 = \frac{12+4\sqrt{3}}{3}$

我們發現這四個圓的半徑有一個有趣的關係式：$r_1 \times r_4 = r_2 \times r_3$

**性質二十三：在正∆平面上，最大圓的半徑和旁心圓半徑的比值等於外接圓半徑和最小圓半徑的比值，如圖(80)。**

因為$r_2$、$r_3$、$r_4$ 都很容易利用尺規作圖畫出來，再利用比例線段作圖，可以作出$r_1$，利用O當圓心，r當半徑畫出最小圓，取最小圓和對稱軸的交點，即為所求

**性質二十四：任意正∆的自守點中，外翻三次後得到邊長放大1倍的P點有7個， 2倍及3倍的P點各有3個，這些點都可以用尺規作圖直接畫出來。**

已知: $\triangle ABC$，如圖（80）

求作: 作出外翻三次後放大1倍、2倍、3倍的所有13個自守點。

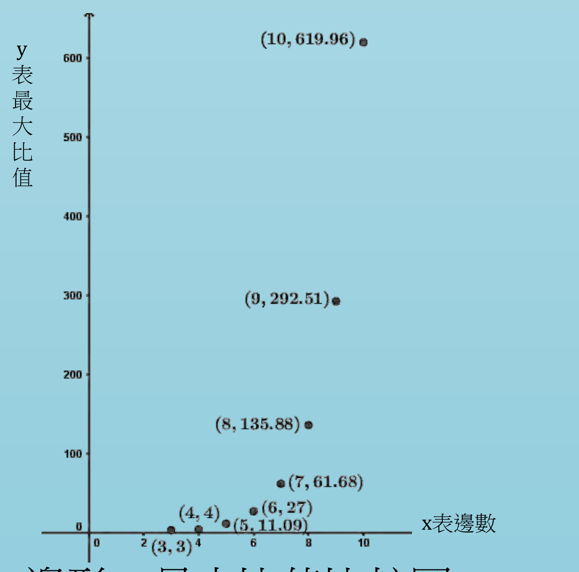
作法: (1)作三邊中垂線交於O，作$\triangle ABC$的外接圓，交三對稱軸於$X_1$、$X_2$、$X_3$

(2)作$\triangle ABC$的旁心$X_4$、$X_5$、$X_6$

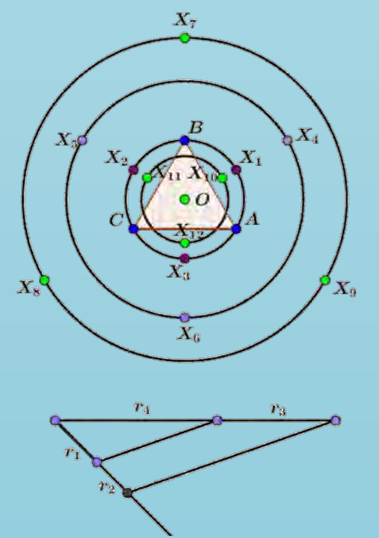
(3)以O為圓心，$\overline{AO} + \overline{AC}$為半徑，畫圓，交三對稱軸於$X_7$、$X_8$、$X_9$

(4)利用比例線段作$\overline{OX_3}$、$\overline{OX_6}$、$\overline{OX_8}$的第四比例項$r_1 = \overline{OX_{12}}$

(5)以O為圓心，$r_1$為半徑，畫圓，交三對稱軸於$X_{10}$、$X_{11}$、$X_{12}$，則放大1倍的有$X_7$、$X_8$、$X_9$、$O(X_{13})$、$X_{10}$、$X_{11}$、$X_{12}$；放大2倍的有$X_1$、$X_2$、$X_3$；放大3倍的有$X_4$、$X_5$、$X_6$，即為所求。



圖(79)正n邊形，最大比值比較圖，$n \ge 3$


圖(80)

## 肆、討論

看過本作品所畫出的各種不同邊數不同形狀的自守點軌跡後，大家一定很好奇，n邊形的n條軌跡是依循何種規則安排上去的？大部分的軌跡線都是通過一頂點再沾上一點邊就直接往外出去了，但至少有一條從最大內角的頂點進入再從對面的一邊或是另一頂點離開，原則上每一個頂點都有一條通過，但若僅n-k條就已完全通過n個頂點，那就必有另外k條沒通過任意頂點。最特別的是進入內部的那一條一定是從最大內角的頂點進入，非常有趣。

## 伍、結論

一、n邊形從一定點外翻n次後的圖形必與原圖形相似

二、從自守點曲線上的任一點外翻，外翻n次後的n邊形與原n邊形有相似中心

三、n邊形中P點位在自守點曲線上的條件為同側分角和$= (n-2) \times 90°$

四、可用尺規作圖法直接找到的∆自守點共發現22點，足夠窺探出完整自守點軌跡

五、自守點曲線

（一）非等腰的∆分成三部分，分別位在中間及左右兩側，且皆各通過一個頂點

（二） 等腰∆：

1、最大角$> 60°$時，圖形分成左右一組雙曲線及中間一條對稱軸

2、最大角$< 60°$時，圖形分成上下一組雙曲線及中間一條對稱軸

3、最大角$= 60°$時，成為正∆，自守點曲線為三條對稱軸

（三）一般n邊多邊形自守點曲線有n條，若有內心、外心時，曲線必通過此兩心

（四） 正n邊形自守點曲線為原圖形的所有對稱軸，即n條對稱軸

六、原正n邊形與外翻n次正n邊形的邊長比值變化，可藉由函數圖形p(x)清楚發現

（一）當圖形為偶數邊時，其比值函數圖形成三峰，且左右兩峰對稱

（二）當圖形為奇數邊時，其比值函數圖形仍為三峰，但左右兩峰並不對稱

七、原正n邊形與外翻n次正n邊形邊長倍數關係為

（一）欲取整數倍數：利用$y = p(x)$和$y = k$ (k為正整數)兩者交點即為欲得的倍數

（二）欲取得最大倍數：利用$y = f(n) = 2^n \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^n, n \ge 4$,但正∆最大倍數為3

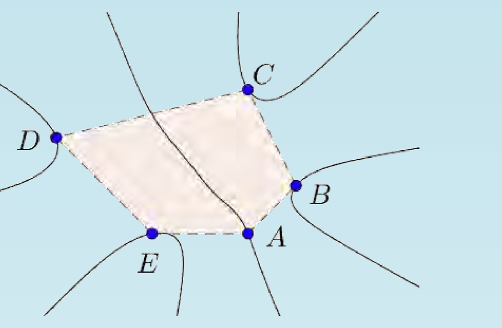
（三）產生最大倍數的自守點位置：

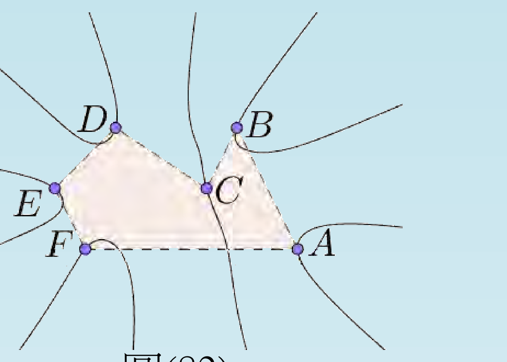
1、當$n \ge 4$，P位在中心點

2、當$n = 3$，P位在∆外部，位在各頂點面向對邊的對稱點上

八、在任一正三角形的平面上，可以直接用尺規作圖法把放大1倍、2倍、3倍的自守點畫出來，共13個點，依與中心點的距離來區別，各分布成比值為$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$的兩組。

九、五邊形、六邊形的自守點軌跡，全世界第一次被畫出來，如圖（81）、（82）


圖(81)


圖(82)

## 陸、參考資料


一、國中八年級第四冊線對稱單元------翰林出版社

二、國中八年級第四冊尺規作圖單元------翰林出版社

三、高中數學第一、二冊

四、Geogebra操作手冊