中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030402

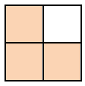
虧格與方陣的最後一塊拼圖

學校名稱：臺中市立大甲國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳沛昀	王俊祺
國二 柯睿穎	楊鍾鳴

關鍵詞：虧格、方陣、數學歸納法

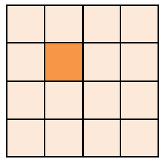
摘要

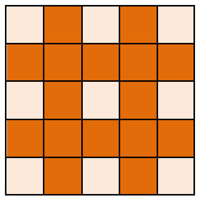


虧格是指 4 個正方形排在一起少 1 格，虧格填滿長方形區域分成 3 大類：完全填滿(有一邊長為 3 的倍數)、劃掉 1 格填滿(邊長為 $(3t+1)\times(3k+1)$ 或 $(3t+2)\times(3k+2)$，k 為正整數)及劃掉 2 格填滿(邊長為 $(3t+1)\times(3k+2)$，k 為正整數)。

前面兩個主題都可以找到文獻，最後一個沒有。於是我們針對前兩個主題作一些歸納討論後，利用這些結論推導出劃掉 2 格是否能被虧格填滿的問題。過程也很緊張刺激，因為我們推導時經歷過非常困難的部分。最後，我們得到非常不錯的結果：大部分的圖形擴展到無限大區域後，不能填滿的情形數趨近於一個定值。最困難的 5×n 區域最後也歸納出非常有趣的結論。

壹、 研究動機





某次上數學課時，老師出了一道數學問題：規則是將 4×4 的方陣(右上圖)中，刪掉任意一格，剩下的方格是否能被 L 型方塊填滿？經過多次試驗後，發現無論是刪除哪一個位置的方格，皆能被填滿。其他的呢？除了 5×5 方陣(右圖)外，其餘的方陣都能被虧格填滿。

也許是出於好奇心，我提議作這個科展。老師卻告訴大家，作科展前你得好好的研究之前的作品，才不會作人家已經完成的部分。結果我們發現正方形劃掉 1 格已經有人作過了，還不只一篇呢！長方形也有人作劃掉 1 格和填滿的，不過長方形劃掉 2 格的倒是沒有發現。老師提醒我們，沒有作的有兩個可能，一是不會有好的數學規律作了等於白做，二是，實在是太困難了，沒人敢作。總之，為了滿足我的好奇心，決定作這個主題。

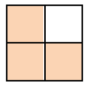
貳、 研究目的

1. 能蒐集並探討文獻。
2. 學習數學基本知識：如數學歸納法等，並應用數學解決生活中的問題。
3. 透過研究的方式找出問題的解決方案。
4. 驗證解決方案的合理性。

參、 研究設備與器材

很多格子紙、筆、網路、電腦。

肆、 研究過程及方法



一、文獻討論

虧格是指四個正方形格子少一格，呈現虧格狀態。由他來填滿正方形或矩形，在歷屆科展已經算是很完整的作品。我們原先並沒有想做這個主題，只是和老師進行文獻探討，看了幾屆作品後發現，發現還有一個很重要的主題沒有人做過。虧格填滿長方形或正方形可以分成以下幾個類型，我們作成表格來說明：

分類	邊長	說明
虧格填滿正方形劃掉一格	n×n－1， n≧2 的整數	1. 除了 n 是3的倍數外，其餘皆可被虧格填滿，至於n是3的倍數的問題，屬於第三種類型。 2. 相關作品：虧格與方陣的對話。第50屆全國中小學科展作品，李國豪等。(臺中縣第一名)
虧格填滿長方形劃掉一格	(3k+1)(3t+1)， k、t≧1，k≠t 或 (3k+2)(3t+2)， k、t≧1，k≠t 以上k、t為整數	1. k=t 屬於第一類。 2. 要分成 (3k+1)(3t+1) 與 (3k+2)(3t+2) 討論。 3. 相關作品：第28屆全國中小學科展作品，陳綽等。(國中組全國第三名) 4. 因為年代久遠，原作的電子檔非常精簡沒有細節，不過結果應該是正確的。
虧格剛好填滿長方形或正方形	(3m)×n m、n≧1 m、n為整數	1. 格子總數是3的倍數，矩形邊長有一邊是3的倍數。 2. 相關作品：擋不住的誘惑—虧格，杜信璋等。（全國第39屆中小學科展初小組數學科第一名）。
虧格填滿長方形劃掉二格	(3k+1)(3t+2)， k、t≧1	1. 國內尚無相關作品 2. 曾經在文獻中發現台北市復興高中三年級作品，再論虧格覆蓋，該文統整了前面幾種情形，並說明長方形少兩格填滿的困難點：「原本應該要做虧兩格的覆蓋，但我們做完 4x5 矩形虧兩格的情況就有上百種，所以才轉彎做補一格的題目。」

綜合表格，以上的題目都曾在科展的軌跡留下精彩的一頁，但很顯然的，長方形劃掉兩格的情形因為情形數太多了並沒有人做過，而且有可能違反數學單純有規律的原則。

為了驗證最後一篇文獻，我們開始分析 4×5 虧兩格的矩形，處理後發現，若考慮對稱，並分成兩格連在一起和兩格分開可以有效減少討論次數，情形在100種以內，之後的矩形必須用前面幾篇的結果，將可以的情形排除，只留下不能填滿的情形應該可以解決這個問題，不過並不容易就是了。

二、 基礎概念分析

(一) 數學歸納法(Induction)

最簡單和常見的數學歸納法是證明當 *n* 等於任意一個自然數時某命題成立。證明分下面兩步：

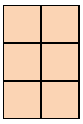
1. 證明當 $n = 1$ 時命題成立。
2. 證明如果在 $n = m$ 時命題成立，那麼可以**推導**出在 $n = m+1$ 時命題也成立。（*m* 代表任意自然數）

這種方法的原理在於：首先證明在某個起點值時命題成立，然後證明從一個值到下一個值的過程有效。當這兩點都已經證明，那麼任意值都可以通過反覆使用這個方法推導出來。

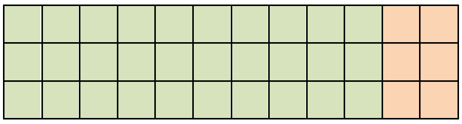
數學歸納法如何用在我們的主題？因為長方形可以無限延伸，我們必須說明在某一個值後，增加 n 值並不會改變成立或不成立的情形即可完成證明。

以 $3\times(2n)$， n 為正整數的長方形為例：

(1) n=1 時圖形可以被虧格填滿



(2) 設 n=k 時圖形可以被虧格填滿
當 n=k+1 亦可被填滿

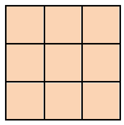


因此可證明 $3\times(2n)$ 矩形必可被虧格填滿

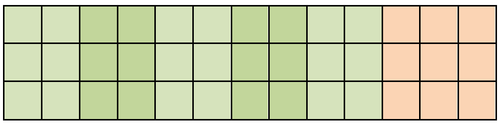
(二) 反證法

首先假設某命題不成立（即在原命題的條件下，結論不成立），然後推理出明顯矛盾的結果，從而下結論說原假設不成立，原命題得證。

反證法法如何用在這個主題？如右圖 3×3 矩形不能被虧格填滿。



先假設一個 $3\times(2n+1)$，n>1，n 為整數的矩形可被虧格覆蓋，現在開始由左而右填入虧格，而填法只能由左而右依序完成 3x2 的矩形因此最後一塊 3x3 矩形亦可被虧格填滿，很顯然這是錯的，因此 $3\times(2n+1)$ 不能被虧格填滿。



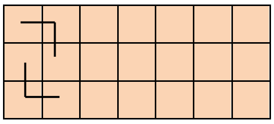
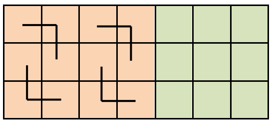
(三) 虧格剛好填滿長方形或正方形

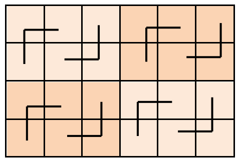
當矩形面積為 3 的倍數時，大部分可以被虧格填滿。但有一些矩形總是有被卡住而無法填滿的地方，因此我們把面積為 3n 的矩形分類並試著填滿。(n 為大於 1 的正整數)

(1) 3xn 的矩形

3x2t 的矩形可以被分割成 t 個 3x2 的矩形，所以可用虧格填滿。

如下圖所示，3x(2t+1)的矩形無法被虧格填滿。因為矩形分成 t-1 個 3x2 的矩形後，會剩下一個無法填滿的 3x3 正方形。(利用反證法可證明)

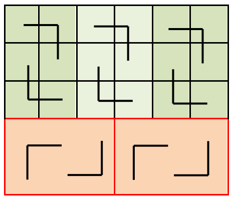
3



6


(2) 6xn 的矩形

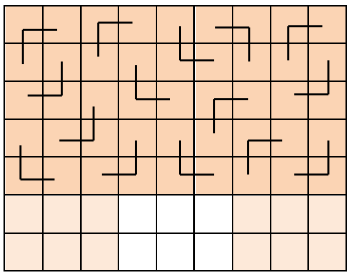
6x2t 的矩形可以分成 2t 個 3x2 的矩形，所以 6x2t 的矩形可被虧格填滿。

6x(2t+1)的矩形分成(2t-2)個 3x2 的矩形後，再把剩下的 6x3 圖形分成 3 個 2x3 矩形，就能填滿了。(右圖上半)

6


(3) 9xn 的矩形(n≠3、6，因為 3、6 已完成討論)
9x2t 的圖形可被分割成 3t 個 3x2 矩形，因此可被虧格填滿。
9x(2t+1)的圖形由於 9x3 已經討論過了，就從 9x5 開始討論。

如右圖所示，9x5 的圖形可被虧格填滿，如果要填滿更大的 9x(2t+1)圖形，只要再加 3x(2t-4)/2=3x(t-2)個 3x2 矩形就好了。例如: t=2 時，矩形是 9x5；t=3 時，矩形是 9x7，增加了 3x(2-2)=3 個 3x2 矩形
結論:除了 9x3 之外的 9n 矩形都能被虧格填滿。



(4) 3tx2s 的矩形

3tx2s 的矩形，可以切成 txs 個 3x2，所以能被覆蓋。

(5) 3tx(2s+1)的矩形(t≥3、s≥2)

當 t為正偶數，可切為$\frac{t}{2}$個6×(2t+1)矩形。若s為大於3的正奇數，可切為一個9x(2s +1)矩形和一個(3t-9)x(2s+1)矩形，因為(3s-9)是偶數，所以又可以切成$\frac{t-3}{2}$x(2s+1)個矩形，所以當t≥3、s≥2，3tx(2s+1)的矩形必可被覆蓋。

(四) 虧格填滿長方形少劃掉 1 格

矩形面積除以 3 餘 1，邊長有兩種可能，(3t+1)×(3s+1) 或 (3t+2)×(3s+2)。

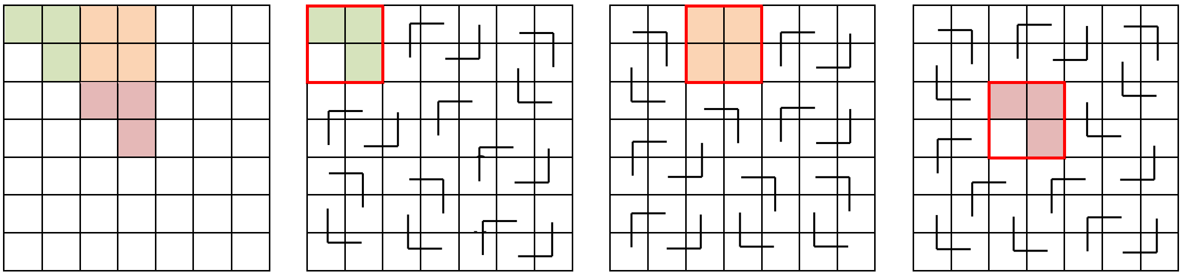
A. $(3t+1)\times(3s+1)$矩形的覆蓋

1. 4×(3s +1)矩形

4×4 矩形任劃掉一格都可以被虧格覆蓋。既然如此，4×(3s +1)矩形的覆蓋，只要讓虧格落在一個 4×4 的矩形中，其它的再切成 s-1 個 4×3 矩形，就可完全被虧格覆蓋。

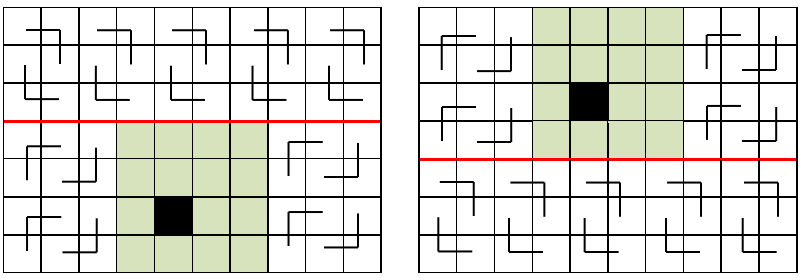
2. 7×(3s+1)的矩形

(1) 考慮對稱，7x7矩形的虧格共有10種可能。而其中又可以再分成3大類，如下圖所示，不管虧格在哪，剩下的格子皆可被虧格覆蓋。



(2) 當s為奇數，則 $3s+1$ 為偶數

設劃掉1格的位置在 a列b行，如圖所示。先將$7\times(3s+1)$分為上下兩部分：$3\times(3s+1)$和$4\times(3s+1)$，若$a\geq4$，則下4上3，若$a\leq4$，則上面4列下面3列，($a=4$時兩種切法都可以)如此虧格會落在$4\times(3s+1)$內，所以剩下的格子必可被虧格覆蓋。

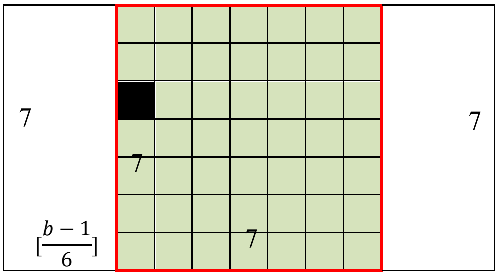


(3) 當s為偶數，則 3s+1 為奇數

設劃掉1格的位置位於第b行，這次我們要垂直分割。

① 若$b\leq7$，我們就在最左邊切出一個包含虧格的7x7矩形，則右邊會剩下一個7x(3s-6)矩形，因為s是偶數，3s-6必是6的倍數，7x(3s-6)矩形可被虧格填滿。

② 若$b \geq 7$，則先在虧格左方可切出$[\frac{b-1}{6}]$個7×6矩形，使劃掉的虧格置於緊鄰的7×7矩形中，另一邊可再切出若干7×6矩形，如圖所示，因此7×(3s+1) 矩形，虧格在任意位置，皆可被虧格覆蓋。

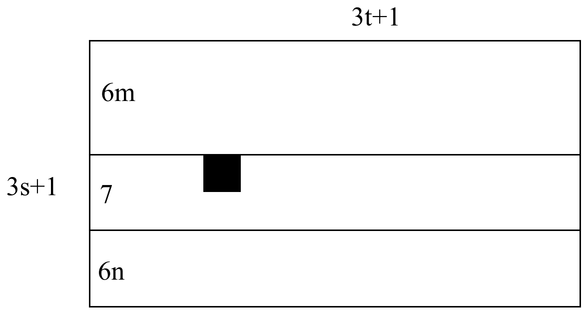


3. 總結矩形(3s+1)x(3t+1)

設劃掉1格的位置在a列b行。這次我們要對矩形長寬的奇偶分類。

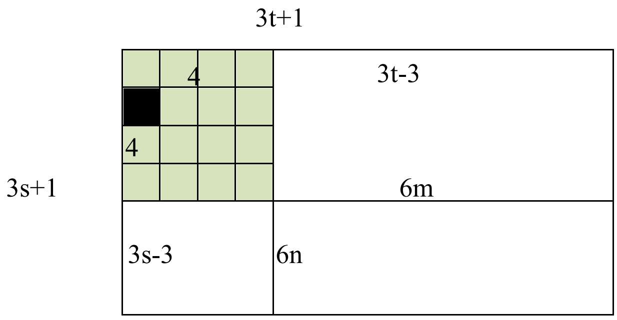
(1) 至少有一邊是奇數

設 $3s+1$為奇數。我們可在第a列之前切出$[(a-1)/6]$個$6\times(3t+1)$矩形，(若a≤6，則直接在最上面切出一個$7\times(3t+1)$矩形)使得虧格置於緊鄰的$7\times(3t+1)$矩形中，剩下的高是 6 的倍數，可再切出若干個$6\times(3t+1)$矩形(如下圖所示)，如此原來的矩形有虧格必可以被虧格覆蓋。這個方法也可以解決矩形兩邊都是奇數的問題。

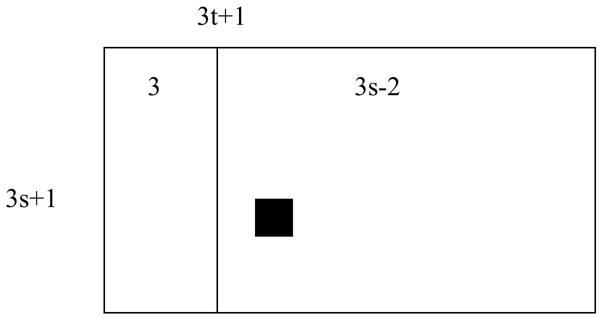


(2) 兩邊都是偶數

因為虧格可能出現在特殊位置，無法使用上一段的切割法，所以我們再簡單討論劃掉格子的位置。如果1≤a,b≤4，則可以將矩形分成四塊，如圖，左上角是一個包含虧格的4x4矩形，其餘的三塊都是面積為3的倍數且邊長不為3的矩形，所以可以虧格覆蓋。



若a,b至少有一個大於4，不失一般性設b>4，我們先從左邊切出一個(3s+1)×3的矩形，剩下的矩形有一邊是奇數，一邊是偶數，就可以用前面的切割法來被虧格覆蓋。

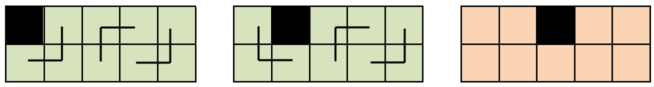


B. (3s+2)×(3t+2)矩形的覆蓋

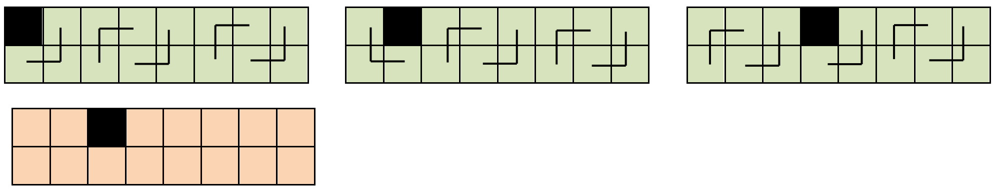
1. 2×(3t+2)矩形

2×2 矩形劃掉任一格後，很明顯能被虧格覆蓋。

2×5 矩形考慮對稱後，有三種可能的排列，如下圖所示，其中(1,1)和(1,2)都可以被填滿；但是劃掉(1,3)格之後的圖形無法填滿。

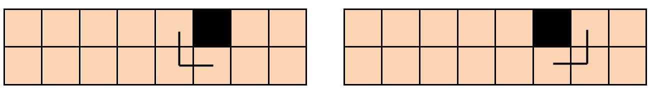


2×8 矩形的位置有四種可能，其中劃掉的格子在(1,1)、(1,2)和(1,4)都可被填滿，在(1,3)時則不能被虧格填滿。



最後我們發現，2×(3t+2)的矩形若劃掉的格子不在 3k 行，就可被虧格填滿。

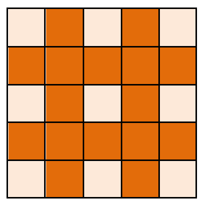
例:t=2



2. 5×(3t+2)矩形 (因為篇幅的關係，以下說明簡略)

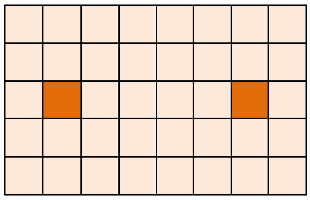
(1) 5×5 矩形

如右圖，劃掉格子在深色區域時，無法被虧格填滿。

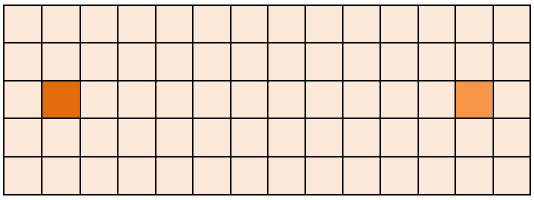


(2) 5×8矩形

如右圖，劃掉格子在深色區域時，無法被虧格填滿。



(3) 對於5×(3t+2)矩形，其中3t+2≥14，劃掉的格子位置不為(3,2)或(3,3t+1)時，剩下的圖形可被虧格覆蓋。



這一類的討論，對於我們在劃掉兩格時的討論相當重要。
因為劃掉 2 格最困難的部分在 5×(3t+1)

3. 其餘 (3s+2)×(3t+2)矩形，s、t 皆大於 1，當 s、t 的數字小時都可以用前面的方法說明能被虧格填滿例如：8×8、8×11、11×11 的矩形填滿問題。

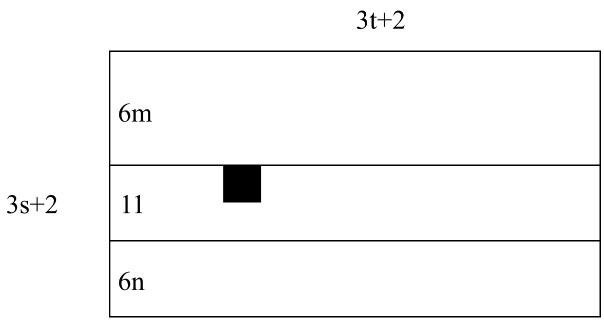
4. 總結(3s+2)×(3t+2)矩形

如同(3s+1)×(3t+1)矩形，我們要對矩形長寬的奇偶分類。

(1) 至少一邊是奇數

不失其一般性，假設 3s+2 是奇數。

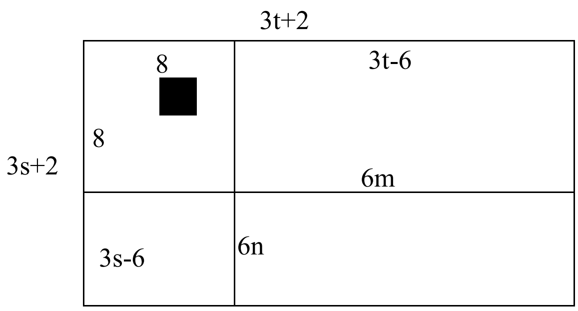
跟(3s+1)×(3t+1)矩形相同，至少一邊是奇數的矩形，我們把它水平分割成三塊，而含劃掉格子的 11×(3t+1)可被虧格填滿，所以至少一邊是奇數的(3s+2)×(3t+2)矩形可被填滿。



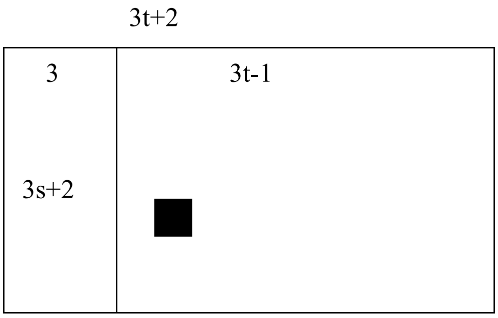
(2) 兩邊都是偶數

設劃掉格子位置為 *a* 列 *b* 行

如果 $1\le a,b\le 8$，可以將矩形分成四塊，左上角是一個包含虧格的 8×8 矩形，其餘的三塊都是面積為 6 的倍數的矩形，可以被虧格覆蓋。



若a,b至少有一個大於8，設b>8，我們先從左邊切出一個(3s+2)×3的矩形，剩下的矩形可以用前面的切割法來被虧格覆蓋。



(註:這只是其中一種解決方式，其實還有很多種方法可以說明)

三、開始進行長方形劃掉兩格的問題(先進行分類)

虧格是否能填滿長方形，剩下邊長(3m+1)×(3n+2)，m、n≧1 劃掉兩格的問題，可以分成 2 格在一起和 2 格分開。很顯然，兩格在一起比兩格分開少很多，實作中，我們大概花兩個星期的時間就完成兩格連在一起的討論，使我們很有信心可以做兩格分開的問題。我們初步的想法是：排除掉一些卡住的情形，只要長方形面積愈大，一定可以找到填滿虧格的方法。

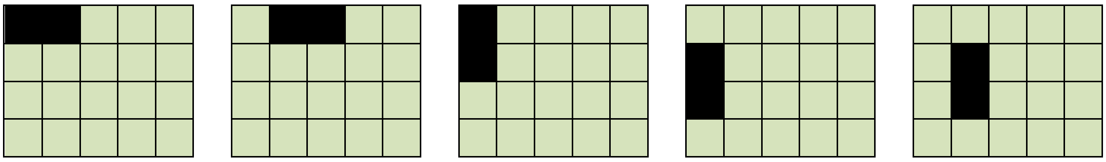
接著，開始進行兩格分開，發現數量之多遠超乎我們想像，必須用劃掉 1 格的長方形和填滿的長方形來處理才能使直接討論的數量減少下來，而且一進行就陷入進退兩難的地步，信心開始動搖。還好，經過慢慢的分析討論、分類，不能填滿的情形總算變少了，而且，面積大的矩形，除了卡住的情形，都能解釋虧格可以填滿的原因。

另外，我們一開始進行時使用枚舉法，也就是將所有情形討論ㄧ遍，因為長方形有對稱性，我們針對上下左右對稱的情形只需討論ㄧ次，這大大的減少需討論的次數。

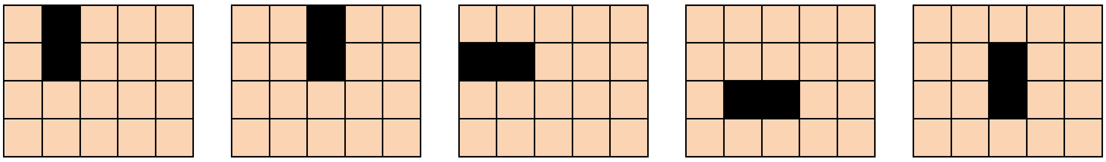
四、兩格在一起

(一) 4x5 方陣的虧格(枚舉)

考慮左右、上下對稱，此分類總共有 10 種。其中，可以被虧格填滿的有 5 種。



不能被虧格填滿的有 5 種。



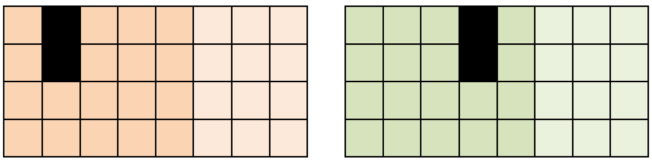
考量到數學的精簡特性，往後的討論，我們只需將不能被虧格填滿的方陣列舉即可，其餘的皆為可被虧格填滿。

因為需討論的數量很多，枚舉法緩不濟急，我們採用擴增法討論，擴增法是在已經討論過的方陣基礎上擴增可被虧格完全填滿的方陣。擴增法有效的減少需討論的次數，特別要注意對稱性的問題。擴增法還有一個重點就是：每次擴增的區域不能大於原區域。

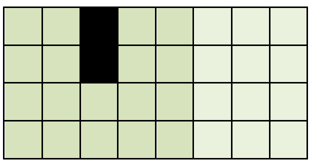
(二) 4x8 方陣的虧格

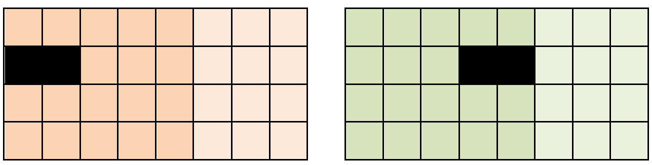
此類型方陣可考慮成 4×5 + 4×3 方陣的擴充。4×3 方陣可被虧格填滿。因此，只需考慮 4x5 虧格不能的情形(但必須討論左右對稱)。

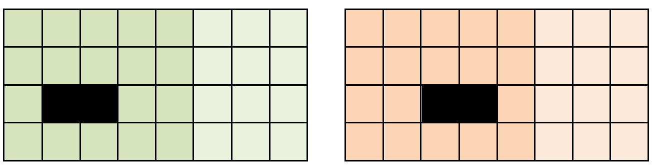
以 4x5 不能的為基礎，其中 3 種在 4x8 的矩形必須考慮對稱

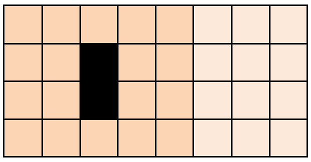


左邊這兩個在 4x8 是不同的









不能填滿的為橘底的 4 個

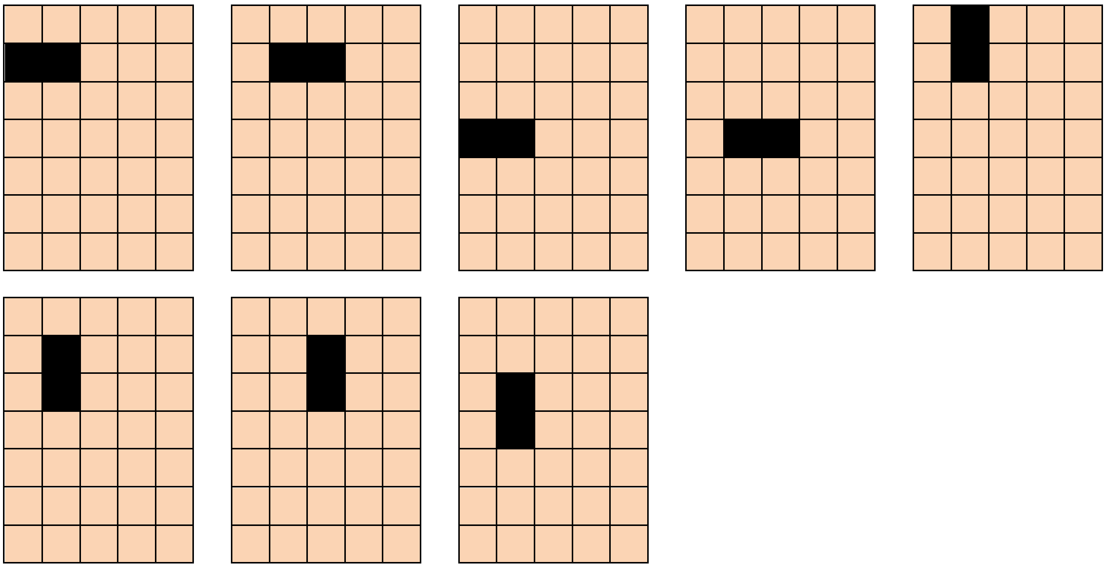
(三) 4x11 及 4x(3t+2)，且 t>3 之後方陣的虧格

首先，4x11 型方陣可考慮成 4×8 + 4×3 方陣的擴充。4×3 方陣可被虧格填滿。因此，只需考慮 4x8 虧格不能的情形(一樣必須討論對稱)。我們發現剩下來的如同 4x8 的 4 個，都是因為這 4 型卡住左半部。

結論： 4x(3t+2)，t>=3 之後虧兩個連在一起的情形由左側算來不能出現在以上 4 個地方(上下左右對稱亦是)，其餘的皆可被虧格填滿。

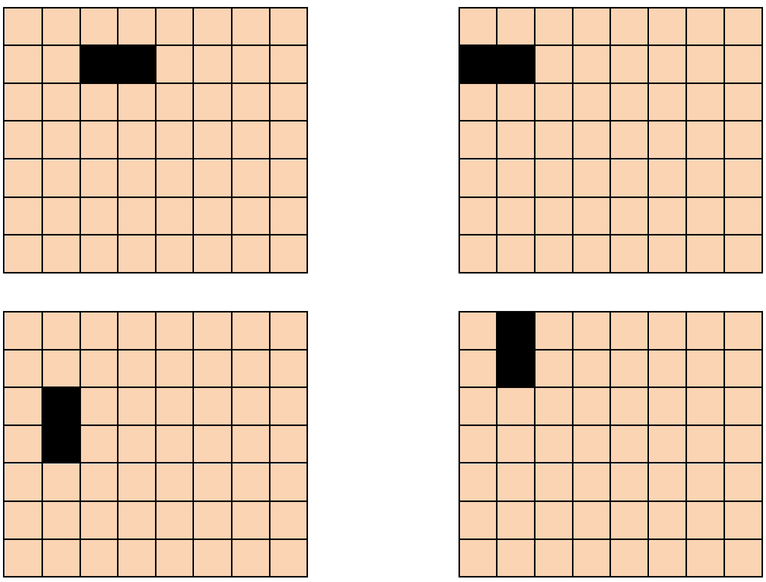
(四) 7x5 方陣的虧格(枚舉)

考慮左右、上下對稱，此分類總共有 17 種。其中，不能被虧格填滿的有 8 種。



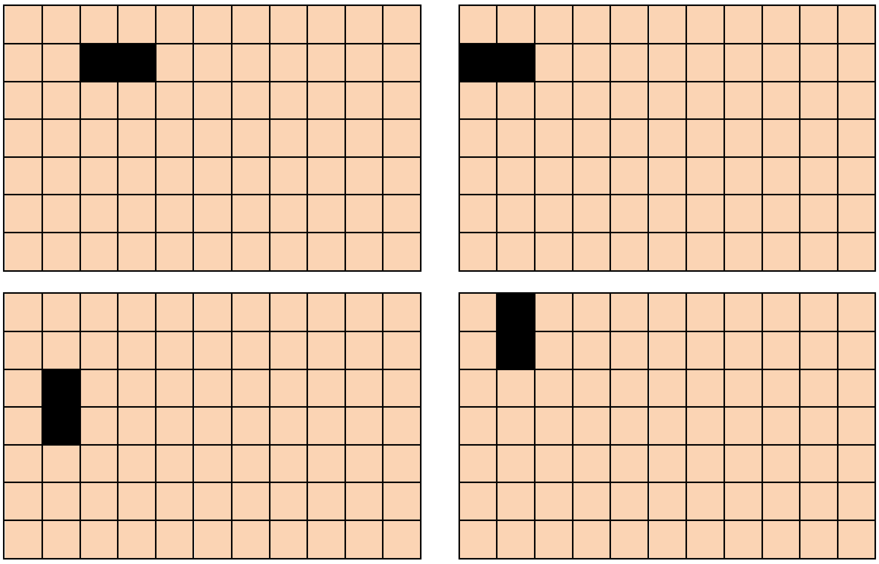
(五) 7x8 方陣的虧格(枚舉)

考慮左右、上下對稱，此分類總共有 28 種。其中，不能被虧格填滿的有 4 種。



(六) 7×11 方陣的虧格(枚舉)

考慮左右、上下對稱，此分類總共有 38 種。其中，不能被虧格填滿的有 4 種。



我們發現， 7×11 不能的 4 種和 7x8 不能的 4 種相關位置相同。這邊要特別說明枚舉法為什麼要做到 7x11：因為 7x3 不能被虧格填滿(之前討論)，擴增法只能用 7x6，而 7x5 矩陣又小於 7x6 區域，因此，必需用枚舉法處理到 7x11。這部分花了我們相當多的時間，詳細資料會提供實驗紀錄(很大本喔)。

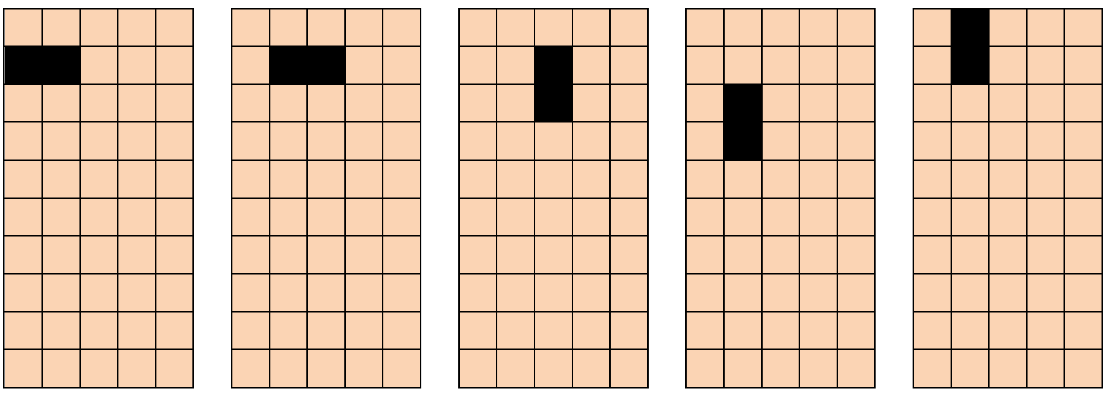
(七) 7× (3t+2)，且 t>4 之後方陣的虧格

首先，7x14 型方陣可考慮成 7×8 + 7×6 方陣的擴充。7×6 方陣可被虧格填滿。因此，只需考慮 7x8 虧格不能的情形，而 7x8 不能的只有 4 種，在 7x14 一樣會卡住。之後的矩形都可以看成這個模式的擴充。

結論： 7x(3t+2)，t>4 之後虧兩個連在一起的情形由左側算來不能出現在以上 4 個地方(上下左右對稱亦是)，其餘的皆可被虧格填滿。

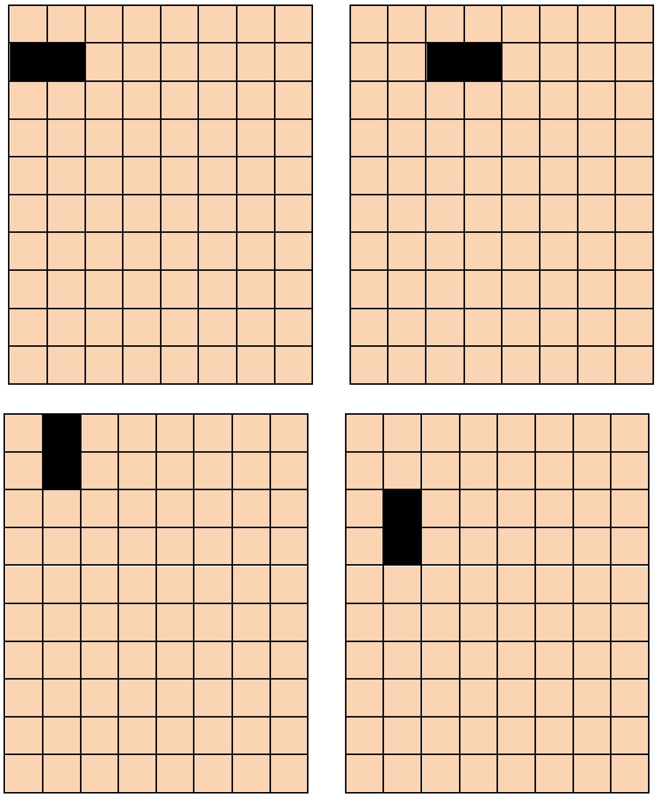
(八) 10x5 方陣的虧格(枚舉)

考慮左右、上下對稱，此分類總共有 25 種。其中，不能被虧格填滿的有 5 種。



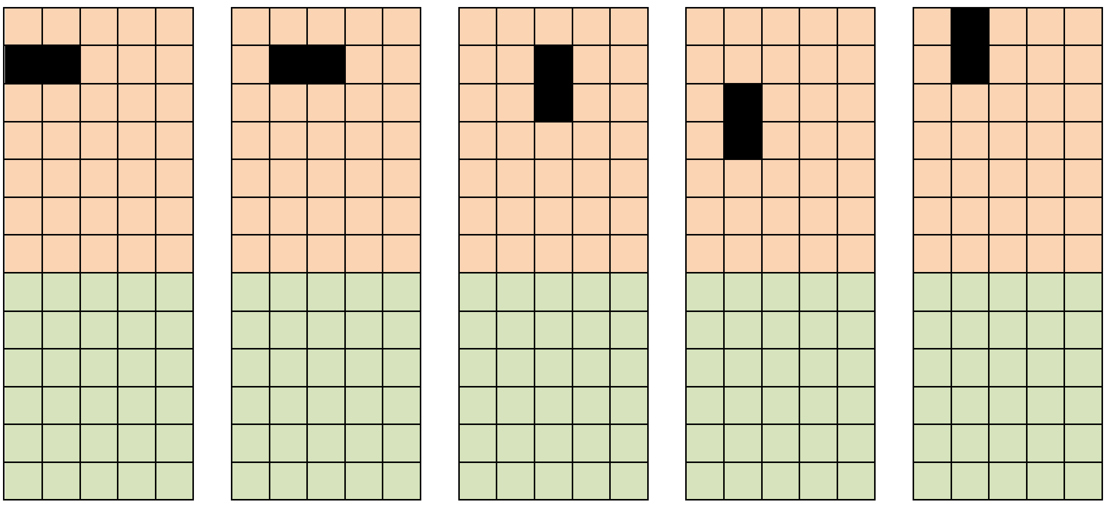
(九) 10×8 及 10×(3t+2)，t>=3 方陣的虧格

只需考慮 10x5 不能的 5 種並考慮對稱。最後，不能被虧格填滿的有 4 種。



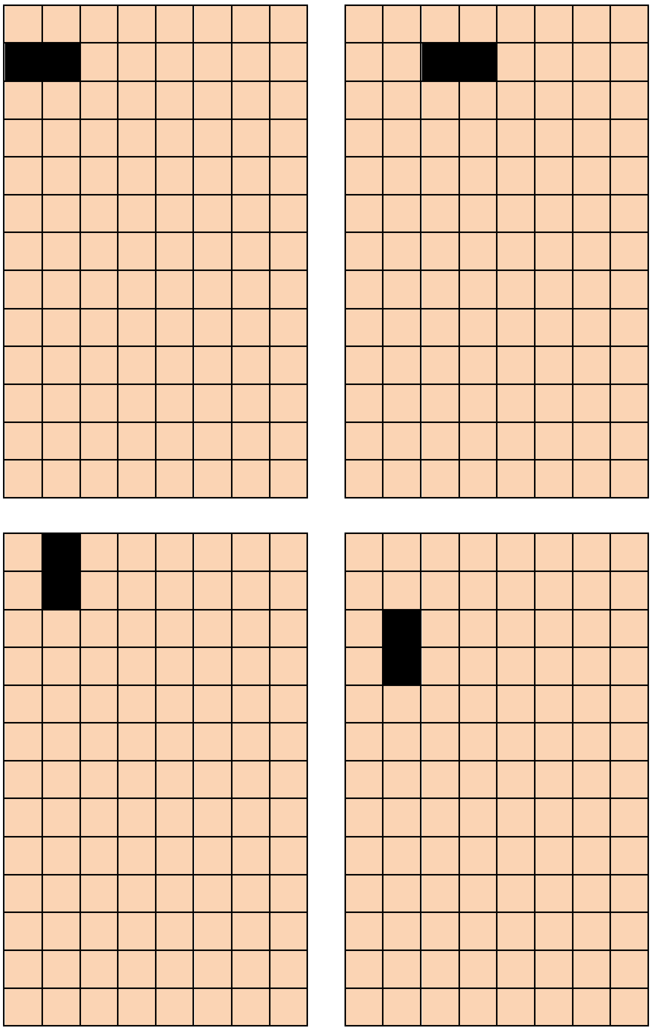
(十) 13×5 方陣的虧格

可由 7×5 無法填滿的情形再增加下方 6x5 的區域，並考慮上下對稱。結果，不能被虧格填滿的有 5 種。



(十一) 13×8、13×11 及 $13\times(3t+2)$，$t>=4$ 方陣的虧格

不能被虧格填滿的有 4 種。



說明：13×8 與 13×11 應進行直接討論，因為 13×8 或 13×11 都無法用 13×5 擴充的方式產生，因為，$13\times5+13\times6$ 的區域，13×6 大於 13×5 區域。進行到這裡我們發現，大範圍的矩形除了特殊卡住的區域 (4 種)，其餘都可被虧格填滿。

(十二) 16×5 方陣的虧格 及 $(3t+1)\times5$，$t>6$ 之後的虧格

16×5 方陣的虧格，可由 10×5 無法填滿的情形再增加下方 6×5 的區域，並考慮上下對稱。結果，不能被虧格填滿的有 5 種。與 13×5 有相同的數量(圖略)，我們發現 $(3t+1)\times5$，$t>=3$ 以後，被卡住的情形只有 5 種不能被虧格填滿。

(十三) $(3s+1)\times(3t+2)$ 方陣的虧格

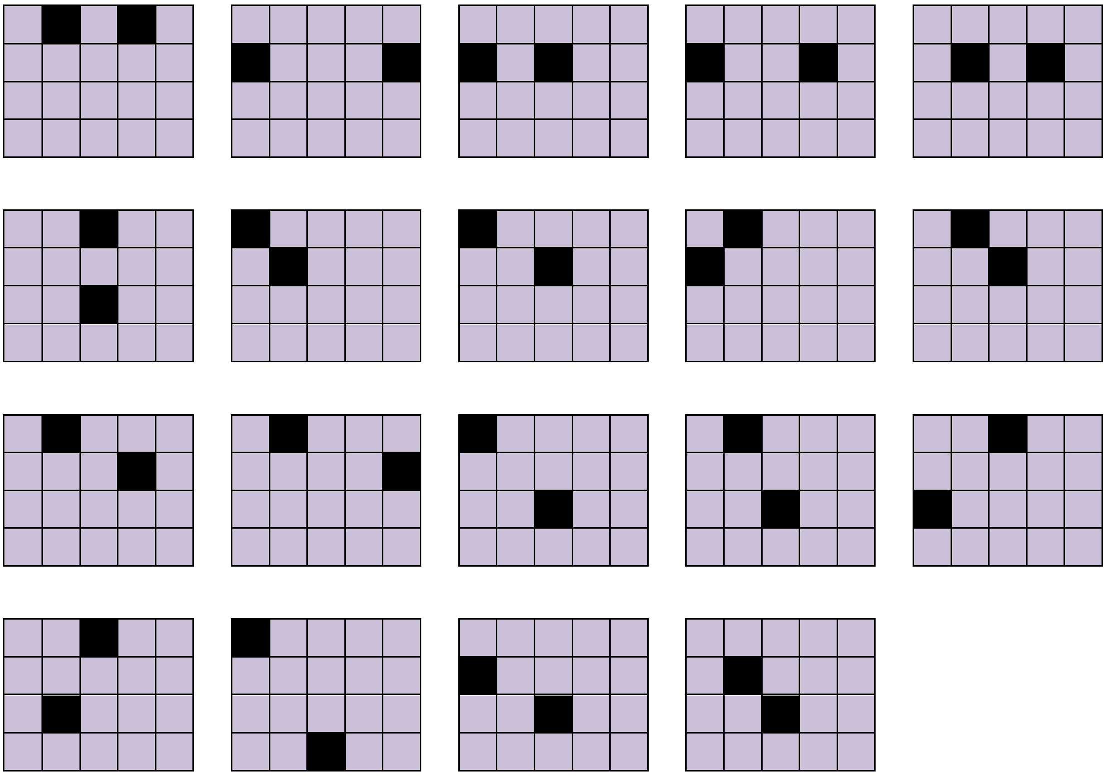
當 s、t 夠大時分成兩種情形說明：

1. $t=1$ 時，$s>=3$ 以後，被卡住的情形只有 5 種不能被虧格填滿，參看 10×5。
2. $t>=2$ 時，$s>=2$ 以後，被卡住的情形只有 4 種不能被虧格填滿，參看 7×8

五、兩格分開(比兩格在一起多很多)

(一) 4x5 方陣的虧格(枚舉)

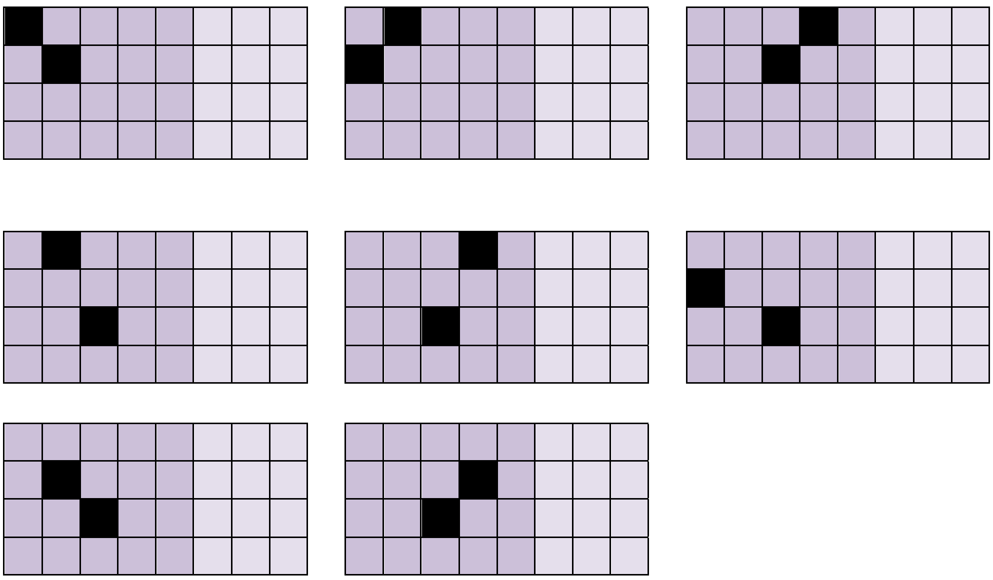
考慮左右、上下對稱，此分類總共有 46 種(很明顯比連兩格的情形多很多)。其中，可以被虧格填滿的有 27 種。不能被虧格填滿的有 19 種(如下圖)。



考量到數學的精簡特性，我們只列出不能被虧格填滿的情形。

(二) 4x8 方陣的虧格(擴增法)

此類型方陣可考慮成 4×5 + 4×3 方陣的擴充。4×3 方陣可被虧格填滿。因此，只需考慮 4x5 虧格不能的情形(但必須討論對稱)。以 4x5 不能的為基底討論，並考慮對稱性，不能的只剩下 8 種。另外，4x8 可拆成 兩個 4x4(4x4 劃掉 1 格必可被虧格填滿)，因此虧格若分得較開，也一定會被虧格填滿。



(三) 4x11 及 4x(3t+2)，t>=4 方陣的虧格 (擴增法)

此類型方陣可考慮成 4×8 + 4×3 方陣的擴充。4×3 方陣可被虧格填滿。因此，只需考慮 4x8 虧格不能的情形(但必須討論對稱)。結果和 4x8 方陣相同只有 8 種情形不能被虧格填滿，因此，我們推論這 8 種都不能被 4x(3t+2)，t>=4 方陣的虧格填滿。

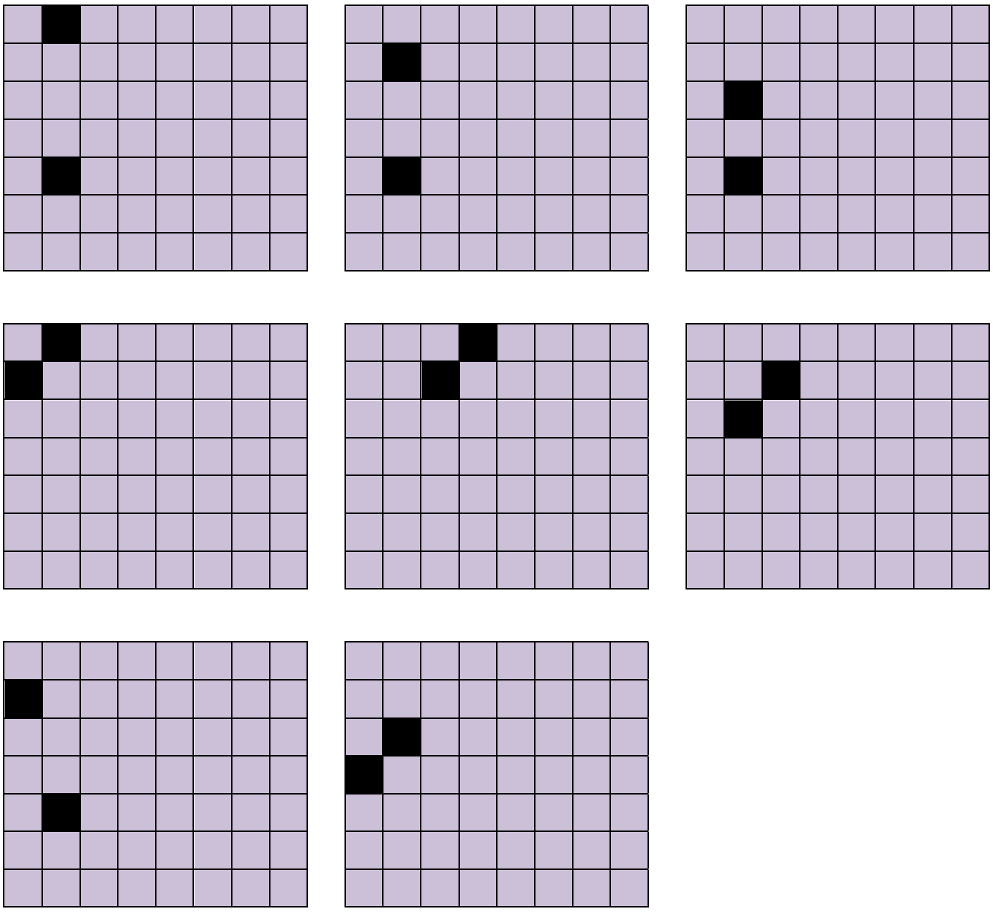
(四) 7x5 方陣的虧格(枚舉)

此類型方陣總共有 154 種，無法用 4x5 往下擴充，因此，我們進行全面的討論，不能的情形有 72 種。因篇幅的關係，我們寫在實驗紀錄供參。

其實，我們在 7x5 的方陣卡了很久(兩個星期)，一開始我們並不想用枚舉法，想從 4x5 擴增，但這比枚舉法複雜太多了，耗了很多時間後結果還是錯。因此，這類型還是退回枚舉法比較實際。

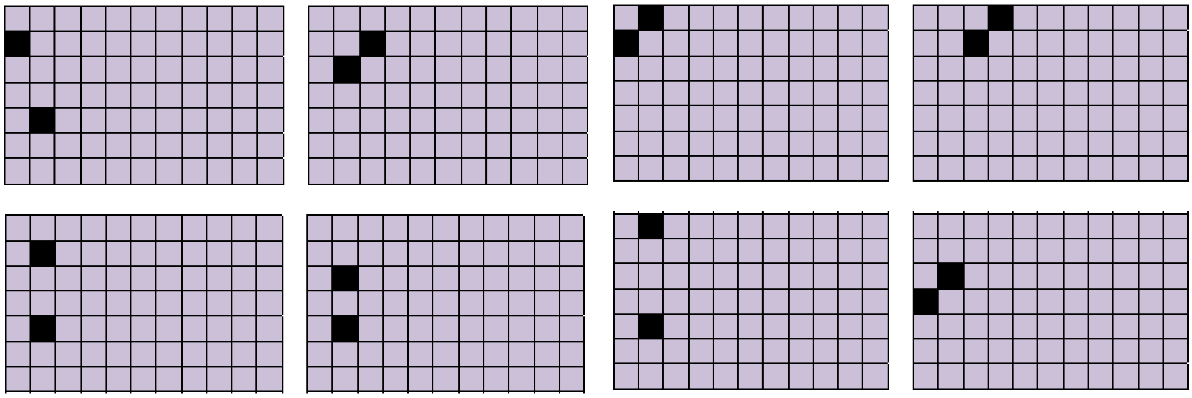
(五) 7x8 方陣的虧格(枚舉)

此類型方陣總共有 384 種，無法用 7x5 往右擴充，因此，我們進行全面的討論，不能的情形有 8 種。



(六) 7x11 方陣的虧格 (枚舉)

無法考慮成 7x5 方陣加上 7×6 方陣的擴充，因為 7x6 大於 7x5。處理完畢後發現無法被虧格填滿的情形有 8 種。



(七) 7x14 與 7×(3t+2) ,t>=5 方陣的虧格

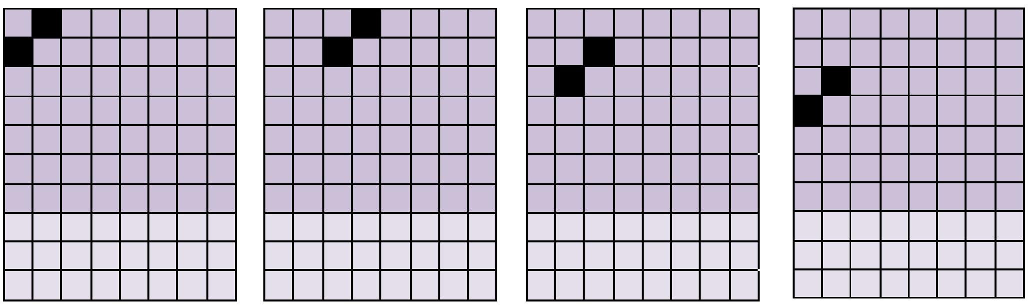
7×14 方陣可考慮成 7x8 + 7x6 方陣的擴充，此類型亦只剩下 8 種不能被虧格填滿，特別說明的是，若兩格若沒同時落在 7x8 區域，兩格一定會分別落在 2 個 7×7 區域，在之前劃掉 1 格的討論我們有分析過，此種情形一定會被虧格填滿。同理可推論，7×(3t+2),t>=5 可考慮成 7x(3t-4) 與 7×6 方陣的組合，此類型必剩下 8 種不能被虧格填滿。

(八) 10x5 方陣的虧格(枚舉)

一開始時想用 4x5 往下擴充，但需考慮對稱性及兩個不填的方塊分別落在不同區域的情況，有點複雜。最後我們決定全面討論一遍。這一類的結果，我們會在討論部分一起說明。

(九) 10x8 方陣的虧格(擴增法)

我們決定用 7x8 矩陣往下增加 3x8 矩陣的方式來處理(因為用枚舉法實在太傷時間了)。特別要討論上下對稱方式及兩格若沒有全部落在 7x8 區域，此時可以切成 5×8 + 5×8，因為 5×8 不能的只有兩個地方(討論方式與(十三)雷同)，考慮對稱後進行兩格未同時落在 7x8 區域的檢核，最後確認不能的情形有 4 種。



(十) 10x11 及 10×(3t+2)，t>3 方陣的虧格

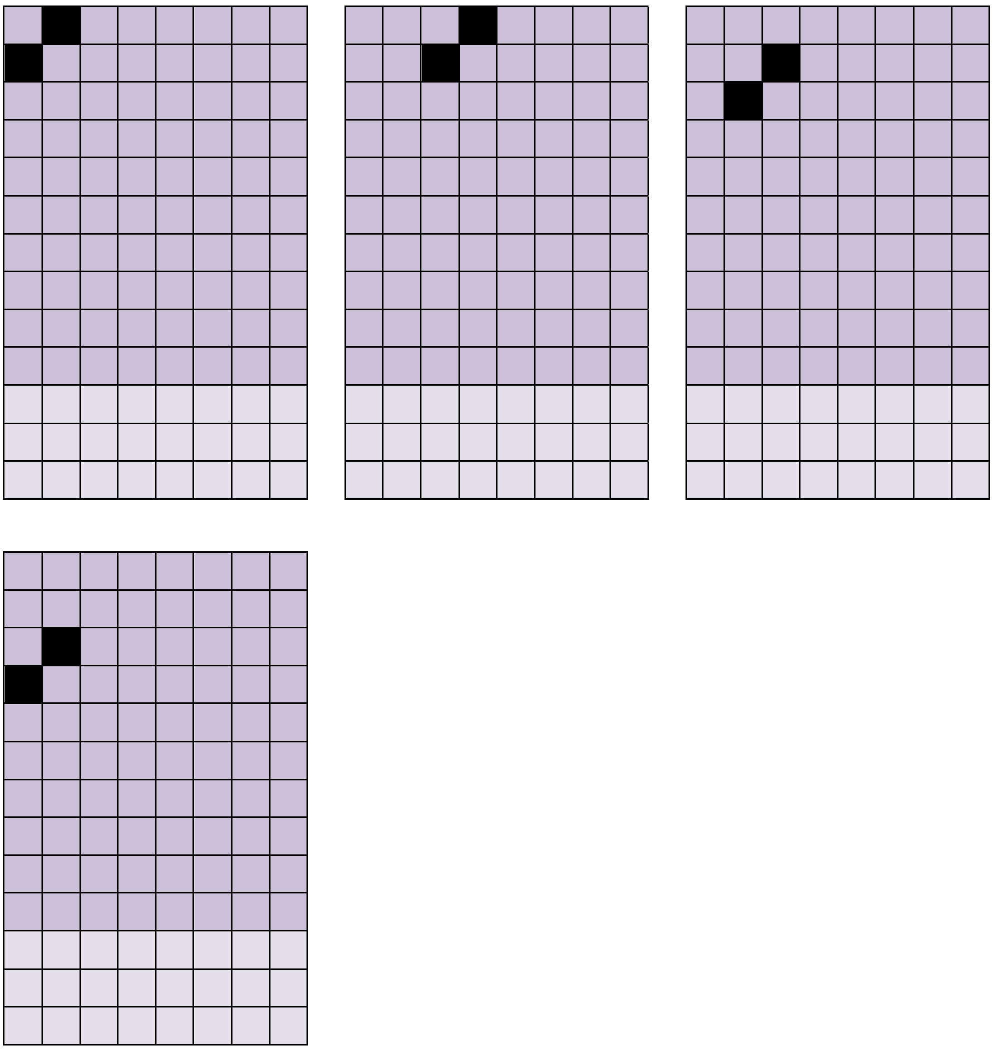
10x11 可以考慮成 10x8 矩陣往右增加 10x3 矩陣的擴充。若兩格皆落在 10×8 區域則有 4 種方式不能被虧格填滿，若兩格沒有同時落在 10×8 區域可以考慮成分別落在 10×4 和 10x7 區域，此時兩個矩形皆可被虧格填滿，因此不能被虧格填滿的維持在 4 個。同理可證 10×(3t+2)，t>3 方陣不能被虧格填滿的也有 4 個。

(十一) 13x5 方陣的虧格 (暫時跳過)

討論 (3s+1)x5 時，我們發現不能填滿的數量一直增加，其實我們卡在這一類的討論至少一個月以上，有必要先跳過這一類型的討論，才能盡快歸納出結果。

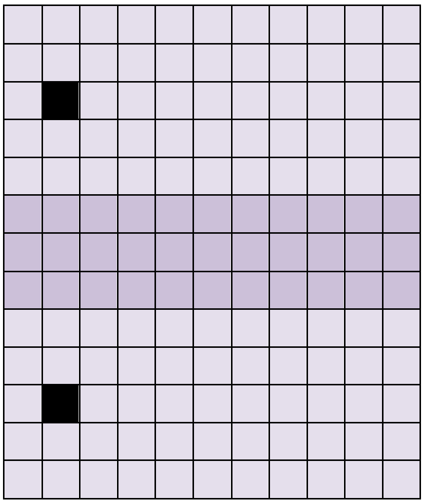
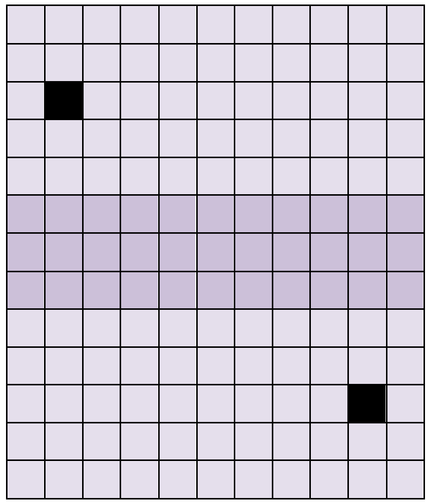
(十二) 13x8 方陣的虧格(擴增法)

我們決定用 10x8 矩陣往下增加 3x8 矩陣的方式來處理。特別要討論上下對稱方式及兩格若沒有全部落在 7x8 區域，此時可以切成 5×8 + 8×8，因為 5×8 不能的只有兩個地方，考慮對稱後進行兩格未同時落在 10x8 區域的檢核，最後確認不能的情形有 4 種。



(十三) 13x11 方陣的虧格

13x11 可以考慮成 7x11 矩陣往下增加 6x11 矩陣的擴充。若兩格皆落在 7×11 區域則有 8 種方式不能被虧格填滿，需考慮上下對稱的情形。若兩格沒有同時落在 7×11 區域可以考慮成分別落在 5×11 和 8x11 區域，因為 5x11 有兩個地方不能被虧格填滿，必須配對 5×11 不能避免的 2 個情形，如下圖所示：

幸運的是，這 4 種都可以被虧格填滿，因此不能被虧格填滿的情形維持在 4 個。

(十四) 13×(3t+2)，t>3 方陣的虧格

之後的虧格，都可以考慮成 13×8 或 13x11 增加 13×(6k) 的虧格，討論過左右對稱後，發現不能的維持在 4 個，因此，我們完成了這類問題的討論。

(十五) (3s+1)×(3t+2)，s>=5，t>=2 方陣的虧格

1. 先說明 s >=5，t=2 的情形，都可以使用 13x8 + (3k)x8，k 為正整數的矩形結合，因為 16x8 以後皆可拆成上下兩個 8x8 矩形的結合 或拆成 8x 8+(3n+2)x8，n>=3，當此兩個不能填區域分得比較開時，一定分別可以被虧格填滿。因此不能被虧格填滿情形維持在 4 個。
2. 當 s>=5，t=3 時，可以用 7×11 或 10x11 加上 (6n)×11，n 為正整數的情形填滿，我們之前已討論上下對稱的情況並不會增加情形數，另外兩格分得比較開的情形也如同第一類的討論，都可以被虧格填滿。因此不能被虧格填滿情形維持在 4 個。
3. 討論完 1、2 類情形後，我們可以說明當 t>=4 以後皆可用 第 1 類或第 2 類增加 (3s+1)×(6n) 的方式結合，我們之前已討論左右對稱的情況亦不會增加情形數，不能被虧格填滿情形依然維持在 4 個。因此，我們完成了這類的討論。

綜合以上各點，我們已經處理了大部分的問題，剩下 (3s+1)x5，s>=4 的情形，因為情況有點複雜，我們放在討論的部分說明。

伍、 研究結果

經過一連串的討論後，我們已經完成這篇科展的主幹部分；也就是除了 (3s+1)×5，s>=4 的情形都可以說明長方行區域，是否可以被虧格填滿。

因為長方形區域會一直擴大，所以我們找出區域內不能被填滿即可，其餘皆可被填滿。

我們的策略是先分成兩格在一起和兩格分開的情形：

(1) 兩格在一起

序號	方陣類型	不能被填滿個數
1	4×5 方陣的虧格	5
2	4x8 方陣的虧格	4
4x(3t+2)，且 t>=3 之後方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		
3	7x5 方陣的虧格	8
4	7×8 方陣的虧格	4
7x (3t+2)，且 t>=3 之後方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		
5	10×5 方陣的虧格	5
6	10×8 方陣的虧格	4
10×(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		
7	13×5 方陣的虧格	5
8	13×8 方陣的虧格	4
13×(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		

結果說明：
(3s+1)×(3t+2)，s>=5，t>=2 方陣的虧格
(1) t=1 時，s>=3 以後，被卡住的情形只有 5 種不能被虧格填滿
(2) t>=2 時，s>=2 以後，被卡住的情形只有 4 種不能被虧格填滿

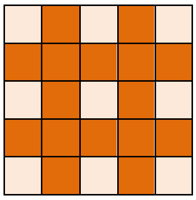
(2) 兩格分開

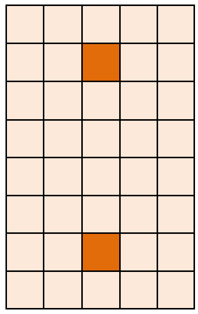
序號	方陣類型	不能被填滿個數
1	4×5 方陣的虧格	19
2	4×8 方陣的虧格	8
4x(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 8 個		
3	7x5 方陣的虧格	72
4	7x8 方陣的虧格	8
7×(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 8 個		
5	10x5 方陣的虧格	----
6	10x8 方陣的虧格	4
10×(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		
7	13x5 方陣的虧格 (暫時跳過)	----
8	13x8 方陣的虧格	4
13×(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		

結果說明：
(3s+1)×(3t+2)，s>=5，t>=2 方陣的虧格
不能被虧格填滿情形依然維持在 4 個

陸、 討論

一、(3s+1)x5 類型的討論





這一類型如右圖，集中在一條狹長的區域。在劃掉 1 格的情形都是非常困難的：

(1) 5×5 劃掉 1 格的情形(如右上圖)

在橘色的區域無法被虧格填滿。

(2) (3k+2)x5，k>=2 的情形(如右下圖)

只有在 (2,3) 位置 或 (3k+1,3) 位置，無法被虧格填滿。

首先，我們處理 4x5，採用枚舉的方法，有 19 種情形無法虧格填滿。接下來討論 7×5 的情形，採用枚舉的方法，有 72 種情形無法虧格填滿。10×5 的情形，我們試過擴增法，很難有系統的確認不能的情形數，因此我們還是用枚舉法討論一遍，發現有 39 種不能的方式。

至此，好像發現 7x5 是最多的，接下來我們很仔細的用擴增法討論完 13x5 的情形；13x5 的擴增法是用 7x5 不能的 72 個向下擴增 6×5 的區塊，若兩格分開比較遠時須考慮虧 1 格不能填滿的區域(由上圖 8x5+5x5 = 13x5)，最後確認有 49 種不能的方式。

現在，我們陷入一個困難：不能的情形數並沒有變少或維持的現象。

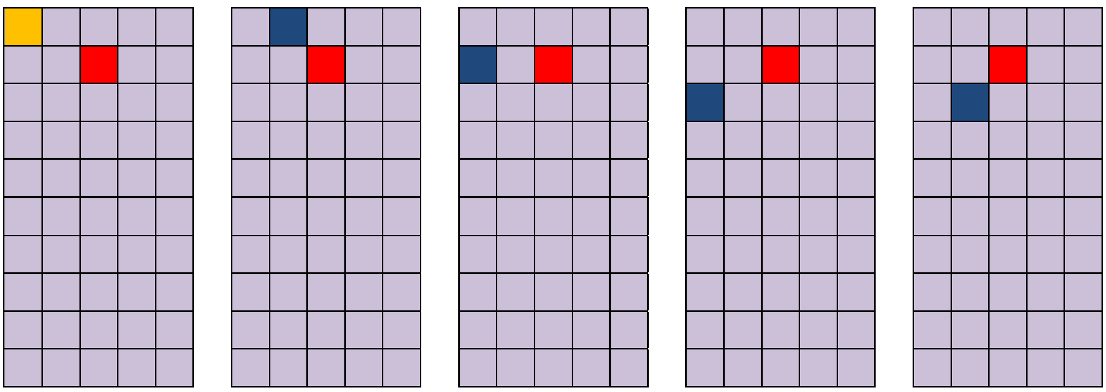
因此，我們只好進行 16x5 不能情形的討論，看是否有何規律？16x5 可以從 10x5 不能的 39 個往下擴增 也就是 10x5+6×5 ，一樣要注意上下對稱的情形。若兩格分得較開就討論： 16×5 可由 兩個 8x5 矩陣合成，最後確認有 58 種不能的方式。

將以上數據做成表格：

矩陣類型	4x5	7x5	10x5	13x5	16x5	19x5
無法填滿情形	19	72	39	49	58	67

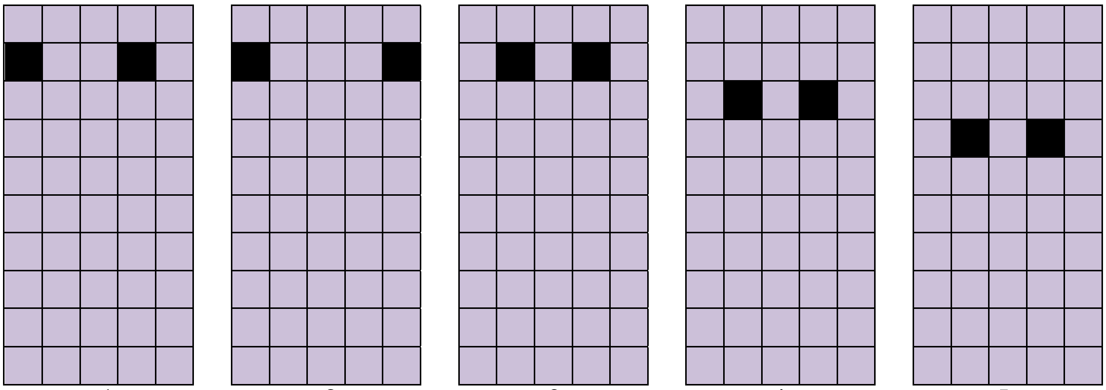
10x5 後的數據呈現等差數列。我們觀察這些矩陣不能填滿的情形，發現以下的規律 (從 10x5 有 39 種無法填滿的情形開始說明)：

(1) 其中 25 種中，有一個是劃掉 (2,3) 另一個分布在不相鄰的其他區域。

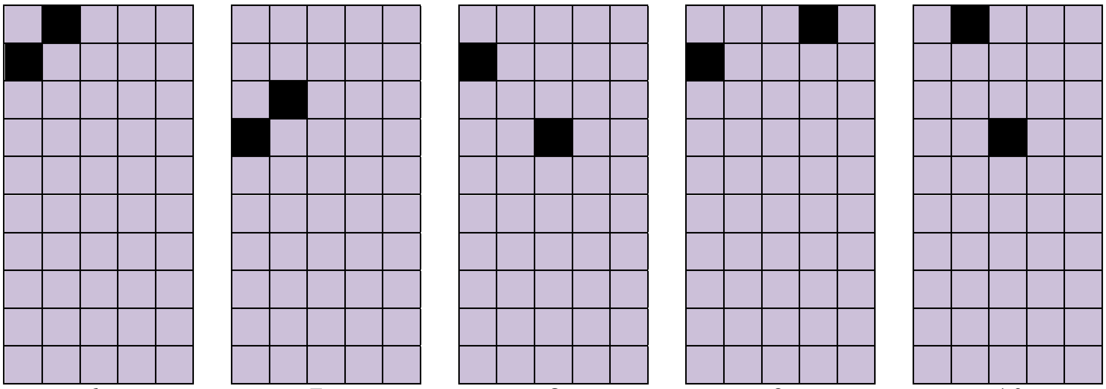


要特別說明的是，虧紅黃區域剛好可以被虧格填滿，其餘虧紅藍區域共 25 個，他們一定不能被虧格填滿。(上圖例子為 25 個其中的 5 個)

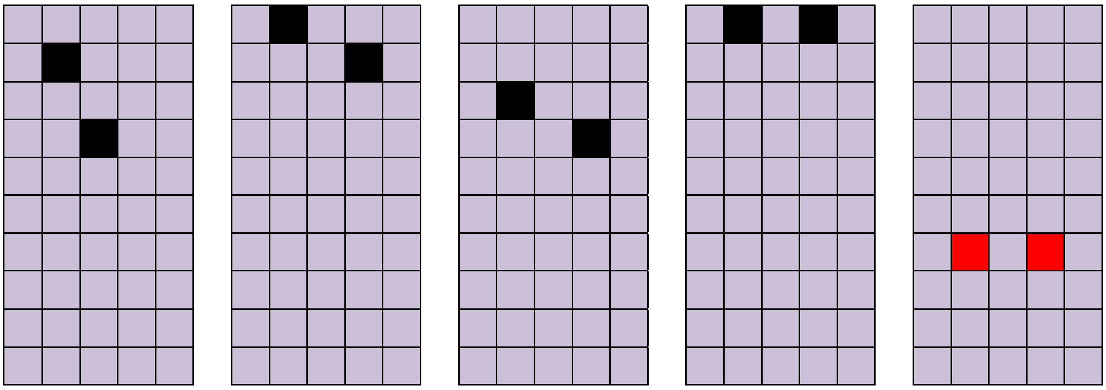
(2) 除了這 25 種，另外 15 種虧兩格相對的情形，無論矩形區域如何增長都無法被虧格填滿 (這 15 種固定相對位置就是這篇科展的解答囉)。



1 2 3 4 5

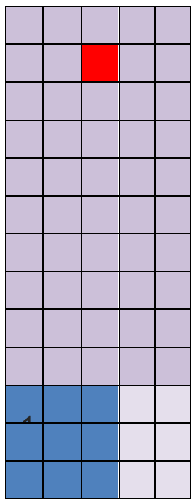


6 7 8 9 10



11 12 13 14 15

第 15 種在 10x5 裡面是第 5 種的對稱圖形，因此 10x5 不能被填滿的固定型式應該是 14 個，總數 39 個是正確的，如補上這一個，這一串不能被填滿個數等差數列的起始項就可以是 40。



(3) 除了以上 15 種固定的以外，每增加矩形區域則會增加 9 種不能的情形，這 9 種情形即是這一串等差數列的公差。這個結論看似簡單，卻是我們絞盡腦汁花了很多時間得到的，好在有這樣的結果，我們的努力總算沒有白費。

(右圖藍色的 9 個位置，即是矩陣擴增後增加紅藍配對不能被虧格填滿的形式)(右半部考慮對稱後不列入計算)

二、虧格不能填滿類型的討論

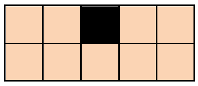
說明：(1,2) 代表 1 列 2 行，由上到下、由左到右

1. 劃掉 1 格不能填滿的原因：

我們發現劃掉 1 格不能填滿的矩形都是$(3s+2)\times(3t+2)$的矩形，所以我們拿 $2\times(3t+2)$和 $5\times(3t+2)$來討論。

(1) $2\times(3t+2)$矩形

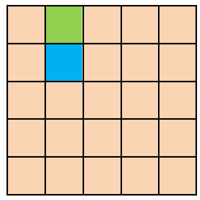
$2\times(3t+2)$的矩形當劃掉格子在 3k 行時不能填滿。



當與劃掉格子同行的格子向左連出一個虧格，則劃掉的格子左邊剩下 3k-2 格，不是 3 的倍數；若同行的格子向右連出一個虧格，劃掉的格子左邊剩下 3k-1 格，也不是 3 的倍數。

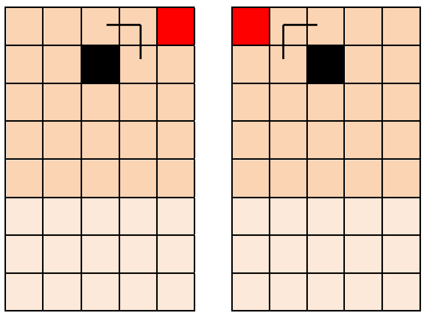
所以劃掉的格子在 3k 行便無法填滿。

(2) $5\times(3t+2)$矩形 (這種情形深深的影響劃掉 2 格不能填滿的情形)



如右圖，5x5 矩形不能填滿的(1,2)、(2,2)，在向下加長後都能被虧格填滿，但劃掉(2,3)這格，如下圖，就會讓 $5\times(3t+2)$矩形永遠無法填滿。

劃掉(2,3)後，劃掉的格子和邊界中間那格只能向左或右連出虧格。如下圖：



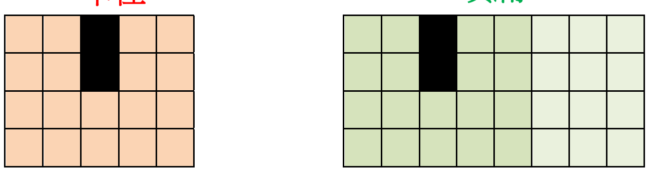
若連出虧格，標紅色的地方就會被卡住無法填滿，所以劃掉(2,3)、(3t+1,3)後 $5\times(3t+2)$矩形不能被填滿。這部份是我們畫了很久得出來的結論，可以說是劃掉 1 格很麻煩的地方。

2. 劃掉 2 格，2 格在一起不能填滿的原因：

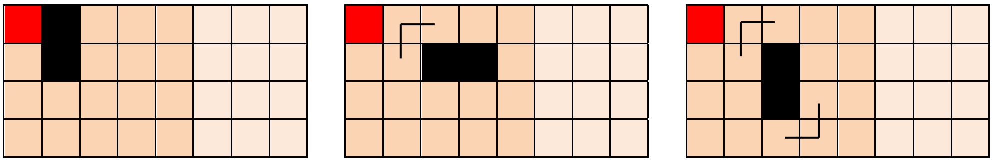
(1) 4x5 矩形向右擴增

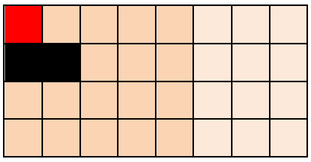
我們一開始做 4x5 矩形的時候，因為空間很小、限制多，有很多無法填滿的情況，在矩形擴大之後有些可以填滿了，例：

卡住　　　　填滿



不過，有些圖形向右擴增也無法填滿，因為圖形本身會卡住邊角的地方。如下圖，我們就是要找出這些情形：

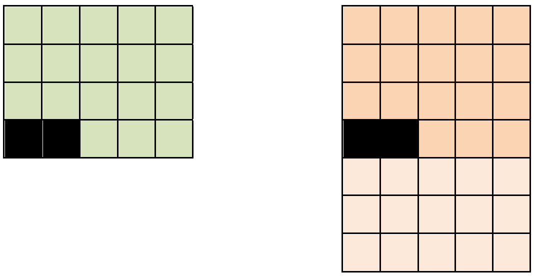




標紅色為會卡住的地方。

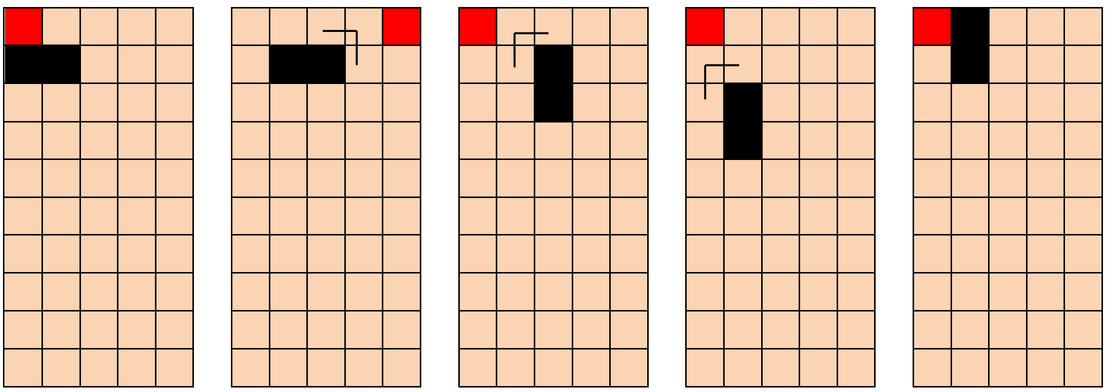
(2) 4x5 矩形向下擴增

當我們改成把 4x5 矩形向下擴增成 7x5 時，卻發現不能填滿的情形增加了!這是因為 4x5 矩形擴增成 7x5 時，會增加一個無法被虧格填滿的 3x5 矩形，所以原本 4x5 矩形不能填滿的不用說，連原本能填滿的擴增後也可能無法填滿。(因此 7x5 的情形，我們盡量不用擴增法)



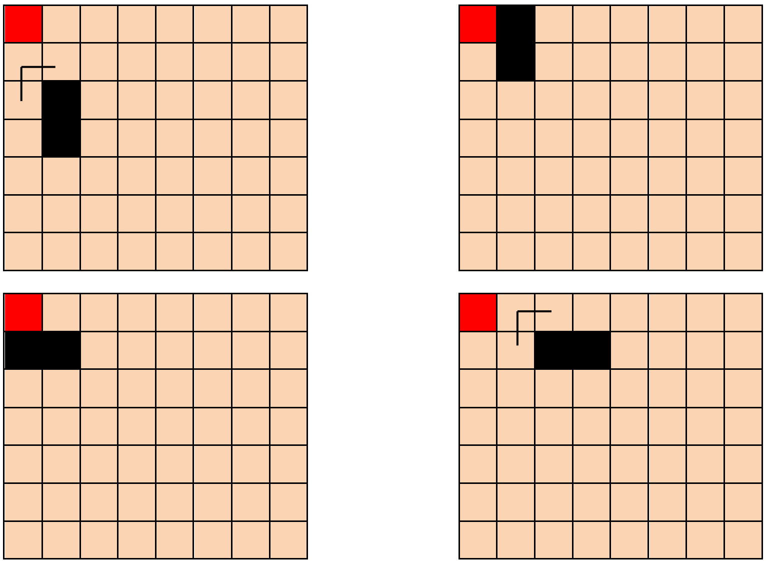
於是我們畫圖時，nx5 矩形無法填滿的會直接往下加 6 列，(但要注意擴增前小於 6x5 的矩形不能這樣加)還是能包含(3t+1)x5 的全部情況。

我們發現從 nx5 的矩形從 10x5 開始，無法填滿的情形就只剩下圖 5 種(標紅色為會卡住的地方):



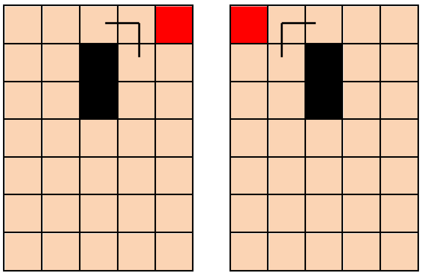
(3) 4x5 矩形同時向右向下擴增

當 4x5 矩形同時向右向下擴增成 7x8 矩形時，無法填滿的會剩下下圖 4 種(標紅色為會卡住的地方):



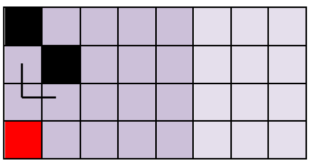
而 7x8 矩形不論向下、向右擴增，都不會出現新的無法填滿情形，這四種也不會消失。

這裡補充說明，在 nx5 的矩形中，下圖的圖形不能被填滿，因為(1,3)這格向左或向右連，都會讓(1,5)或(1,1)卡住。



3. 劃掉 2 格，2 格分開不能填滿的原因：

(1) 從 4x5 矩形開始，兩格分開無法填滿的情形非常多，有 19 種，向右擴增後發現從 4x8 開始，4x(3t+2)，t≥2 的矩形都會剩下 8 種，如下圖:

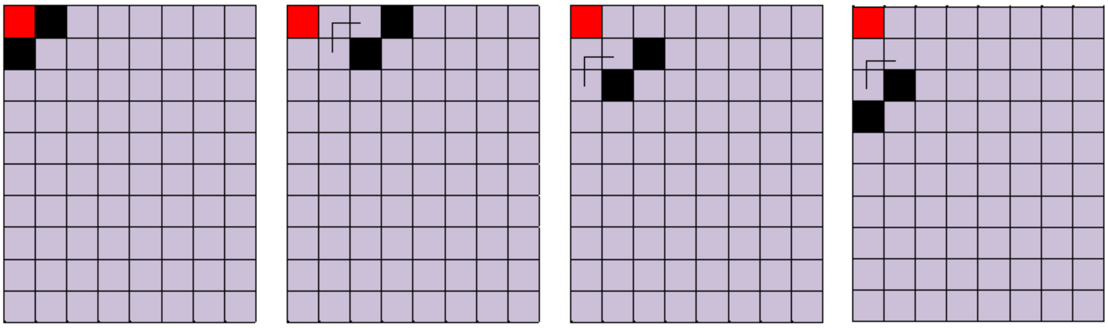


(向下擴增時，我們先不管 nx5 的矩形，待會再一起討論。)

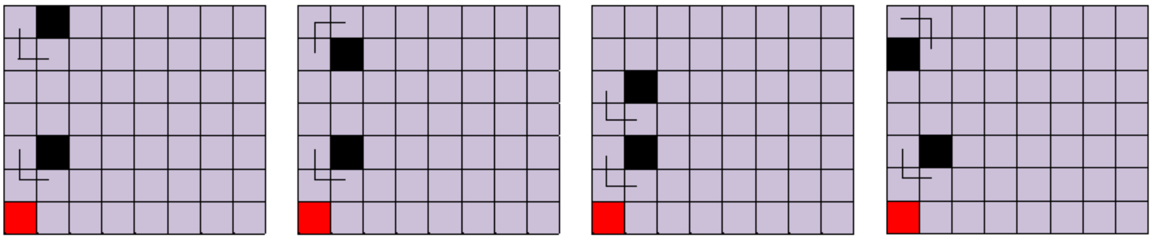
於是從同時向右向下擴增的 7x8 矩形開始。7x8 的矩形，有 8 種無法填滿的情形，之後 7x(3t+2)，t≥2 的矩形也是保持這 8 種，不會增加或減少。

再向下擴成 10x8 矩形時，減少到下圖 4 種，之後不管是向右或向下繼續擴增，都不會再增減。

(下圖標紅色為會卡住的地方)

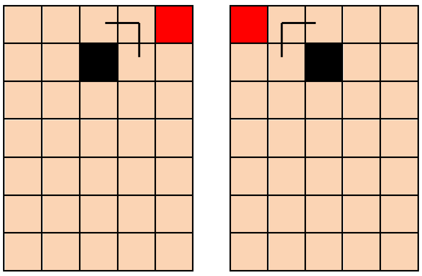


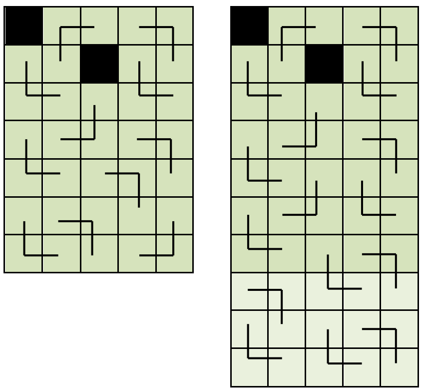
補充說明，7x8 矩形不能填滿，而擴成 10x8 時變得可填滿的那四種情形，下圖標示出在 7x8 矩形會被卡住的地方。



(2)　(3t+1)x5 矩形

在先前虧一格的部分裡有提到，(3t+2)x5 矩形裡若劃掉的格子在(2,3)或((3t+1),3)便無法填滿，虧兩格也一樣。如下圖所示，以(2,3)為例，若劃掉的格子有一格在(2,3)，因為虧格向左或向右連，都會使得(1,1)或(1,5)卡住，無法填滿，向下擴張也不會改變。





但是我們找到一個例外，如右圖所示，考慮對稱，若劃掉的格子有一格在(2,3)，一格在(1,1)，就剛好滿足會被卡住的那格，矩形可被虧格填滿。

除了上述的特例，所有虧兩格(3t+1)x5 矩形裡，若劃掉的格子有一格在(2,3)或((3t+1),3)便無法填滿。

三、有關枚舉法、擴增法及數學歸納法的應用說明

(1) 使用枚舉法或擴增法

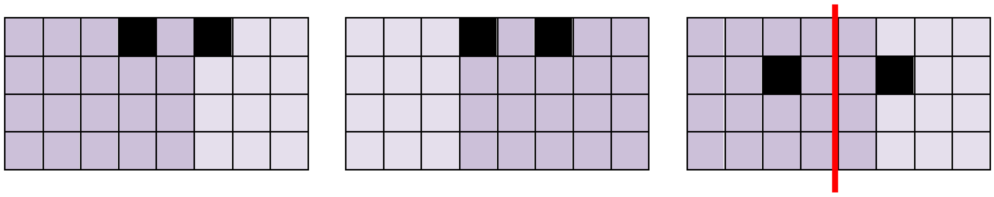
討論一開始一定要用枚舉法，我們選擇 4x5 矩形為起始，向右擴增時，下一區塊為 4×8，增加的是 4x3 區塊，而且 4×3 區塊比原先的 4×5 區塊小，因此在 4×8 區塊使用 4x5 擴增是可以的，不過兩格相連和兩格分離須分開說明。

兩格相連的情況不必討論兩格落在 4x3 區域的情況，因為不管落在哪，考慮

對稱性都可以歸結為落在 4x5 的情形。

兩格分開的情形必須討論兩格若分得夠開(若兩格分得不夠開即歸納為兩格都在 4×5 的情形，此問題結束)，一個在 4x5 區塊，一個在 4x3 區塊的情形，此時剛好可以利用兩格分別落在 4x4 和 4x4 區塊中，而此兩種形狀一定可以分別被虧格填滿。

兩格不夠開　可以看成在 4×5 以內　可以看成落在兩個 4x4 區域



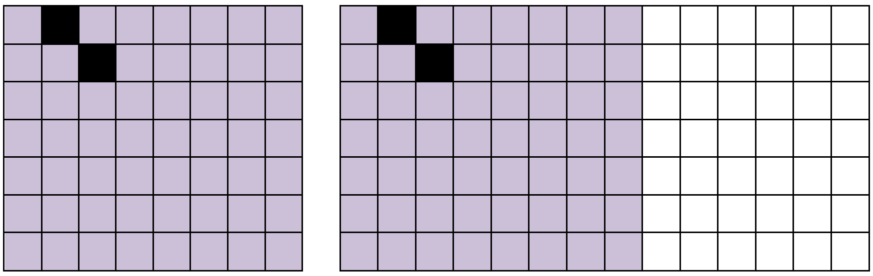
以上的模式可以看成是戰術上的技巧，因為他的作用是增加討論的速度，並不會影響到結果，而且我們常在關鍵的幾個方陣的討論上還是退回去用枚舉法，因為實在無法容許任何的閃失，例如在討論 7×5+6x5 擴增到 13x5 時。當然，我們也會交叉比對結果，因為過程實在是很複雜。

(2) 擴增法的必要性 (與數學歸納法的關係)

當找到規律後，擴增法可以用來證明不能填滿的數量不會再增加，這時候需要數學歸納法的幫忙，我們以比較困難的 7×(3t+2) 向右擴增為例說明：

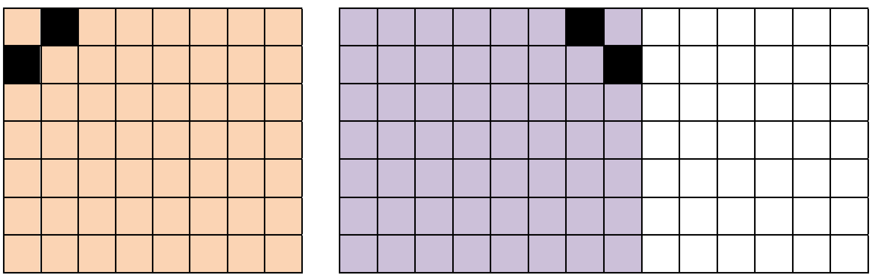
(i) 7×5 使用枚舉法

(ii) 7×8 使用枚舉法，然後以 7×6 矩陣往右擴增，以 7×(6n+2)表示：這是可以的情形，當 n=1 時成立。 假設當 n=k 時成立，當 n=k+1 時，因為增加的是 7x6，可以填滿的區域，因此必定還是可以填滿，所以成立。



至於不能填滿的情形，經過擴增後，可以經由討論說明一樣不能被填滿，這與數學歸納法無關，以左下圖為例，已經是卡住的情形。不過他如果向右擴增進行向右對稱後，只要他變成可以填滿的情形，我們都可以用數學歸納法證明往右擴增都可以填滿。

卡住　填滿



(iii) 7×11 的情形使用枚舉法，因為他會被 7×8+7×6 跳過，以 7x(6n+5)表示討論方式同上面的說明。

柒、 結論

根據以上的討論，我們作成以下的結論：

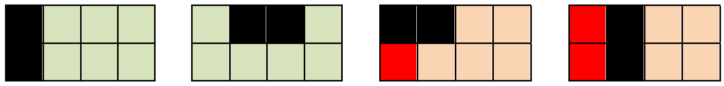
一、我們完成虧格填滿長方形的區域虧最少格子數的所有問題

這邊要特別說明一下，小範圍的情形：

比 4x5 還小的(3t+1)x(3s+2)矩形，有 4x2 和 1x5 兩個。而 1x5 矩形不能被虧格填滿，所以我們只討論 4x2 矩形的情況。

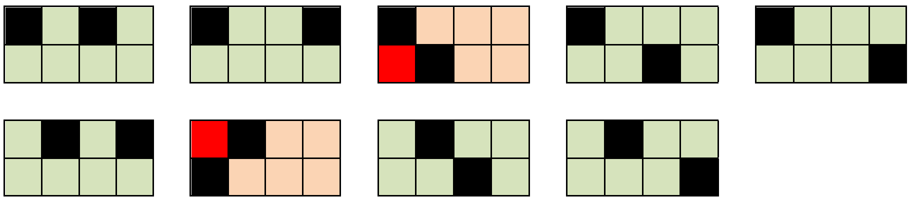
(一)兩格一起

4x2 矩形兩格一起有 4 種情況，其中 2 種可填滿，2 種無法填滿，如下圖(標紅色為會卡住的地方)



(二)兩格分開

4x2 矩形兩格分開有 9 種情況，其中 7 種可填滿，2 種無法填滿，如下圖(下圖標紅色為會卡住的地方):



總共有 4 種無法填滿的情形。

繼續延伸成 7x2、10x2 後，無法填滿的情形也沒有增加或減少，因此我們知道(3t+1)x2 矩形有 4 種無法填滿的情形。

二、整個問題的處理步驟如下：

(一) 分類：

我們一開始把劃掉兩格的圖形分成兩格一起和兩格分開這兩大類，再各自從 4x5 矩形開始延伸。除了較特別的(3t+1)x5 矩形先不討論外(後面會提到)，其他矩形按 4x(3s+2)、7x(3s+2)、10x(3s+2)依序討論，直到找出矩形向下或向右擴增都無法被填滿的情形。

(二) 剛開始的情形採用枚舉法

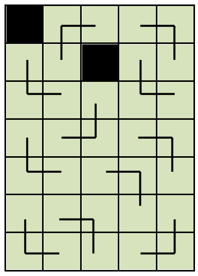
較小的初始矩形，我們使用枚舉法。枚舉法要全部討論一次很麻煩，所以我們只有在一開始的小矩形或無法用擴增法討論的情形，才會用到枚舉。

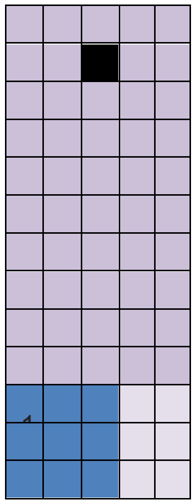
(三) 用擴增法進行大範圍的討論(須用到前面幾篇文獻的結果)

當擴增的面積小於擴增前矩形的面積，且擴增的面積能被虧格填滿時，我們就使用擴增法。例如: 4x5 矩形擴增一個 4x3 矩形，形成 4x8 矩形。這方法在矩形面積增加許多時非常有用，讓我們省下很多時間，但要小心注意圖形對稱的部分，結果不如預期時(例如擴增的區域大於原區域時)，還是得退回去使用枚舉法。

(四) 最後，特別的部分進行歸納、統整。

nx5 的矩形是這次作品中較特別、也是較難歸納的部分，我們發現 nx5 矩形在向下擴增時，無法填滿的情形反而會增加，這是因為 nx5 矩形當劃掉格子在(2,3)或((3t+1),3)時，除了右圖的特例外便無法填滿。所以在向下擴增而增加一個 3x5 矩形時，都會增加 9 個不能填滿的情形。





三、這些問題的延伸

(一) 長方型區域的特殊討論、生活上的應用

虧格的問題其實還有許多，目前發現虧格填滿長方形區域是最有趣的。在討論完關於 L 型的問題後，我們繼續思考是否能用別種圖形來填滿。而如果使用別種圖形來填滿，結果是否還是相同的？這也許可以當下次研究的主題。

另外，虧格在生活中的應用十分廣泛:鋪磁磚、疊積木，皆運用了在有限範圍內填滿的方法。也許我們可以發明一個有關虧格的遊戲。

(二) 立體的虧格問題

解決完平面的虧格問題後，我們開始思考立體的虧格問題。我們參考了一篇高中的科展，並運用索瑪立方塊來驗證。但因為這篇科展只討論關於 nxnxn-1 的情況，沒有討論關於 nxmxp-1 的情況，所以如果未來還要再繼續延伸，可能就朝三邊長度皆不相同發展，作一個立體虧格的最後一塊拼圖。

捌、 參考資料及其它

國中數學第四冊 等差數列

高中數學第二冊 數學歸納法

虧格與方陣的對話。第 50 屆全國中小學科展作品，李國豪等。(臺中縣國中第一名)

第 28 屆全國中小學科展作品，陳綽等。(國中組全國第三名)

擋不住的誘惑—虧格，杜信瑋等。(全國第 39 屆中小學科展初小組數學科第一名)。

台北市復興高中三年級作品，再論虧格覆蓋。(未有得獎紀錄)(整理前幾個作品)

【評語】030402

考慮 m×n 的長方形格狀圖，在缺了其中某一格或兩格的前提下，能否用三格的 L 形的積木填滿的（虧格）問題，對於缺一格的情形給出了完整的解答。對於缺兩格的情形，透過分割、拼剖的方式，將長方形分解為較小的長方形，再藉由對於較小的長方形的分析結果來說明原始圖形是否可被虧格填滿。前半部討論缺一格的情況的部分說明的很清楚，後半部分析缺兩格的情況的部分就顯得凌亂了些。就如作者們所述，前半部的結果應該都是已知的，真正有趣的應該是後半新增的部分，如果能把這部分的分析說的更清楚且有條理，會更好。討論用枚舉法，對稱等方式，應加入數學說明，否則可能會有漏掉情況。仔細地討論各種不能被填滿的情況並全部列出來，但焦點放在有幾種拼不成是有點奇怪的，判斷能不能拼才是數學上值得關注的問題。可惜研究結果並未歸納出一般的規律，可以直接判斷是否可被填滿。

作品海報

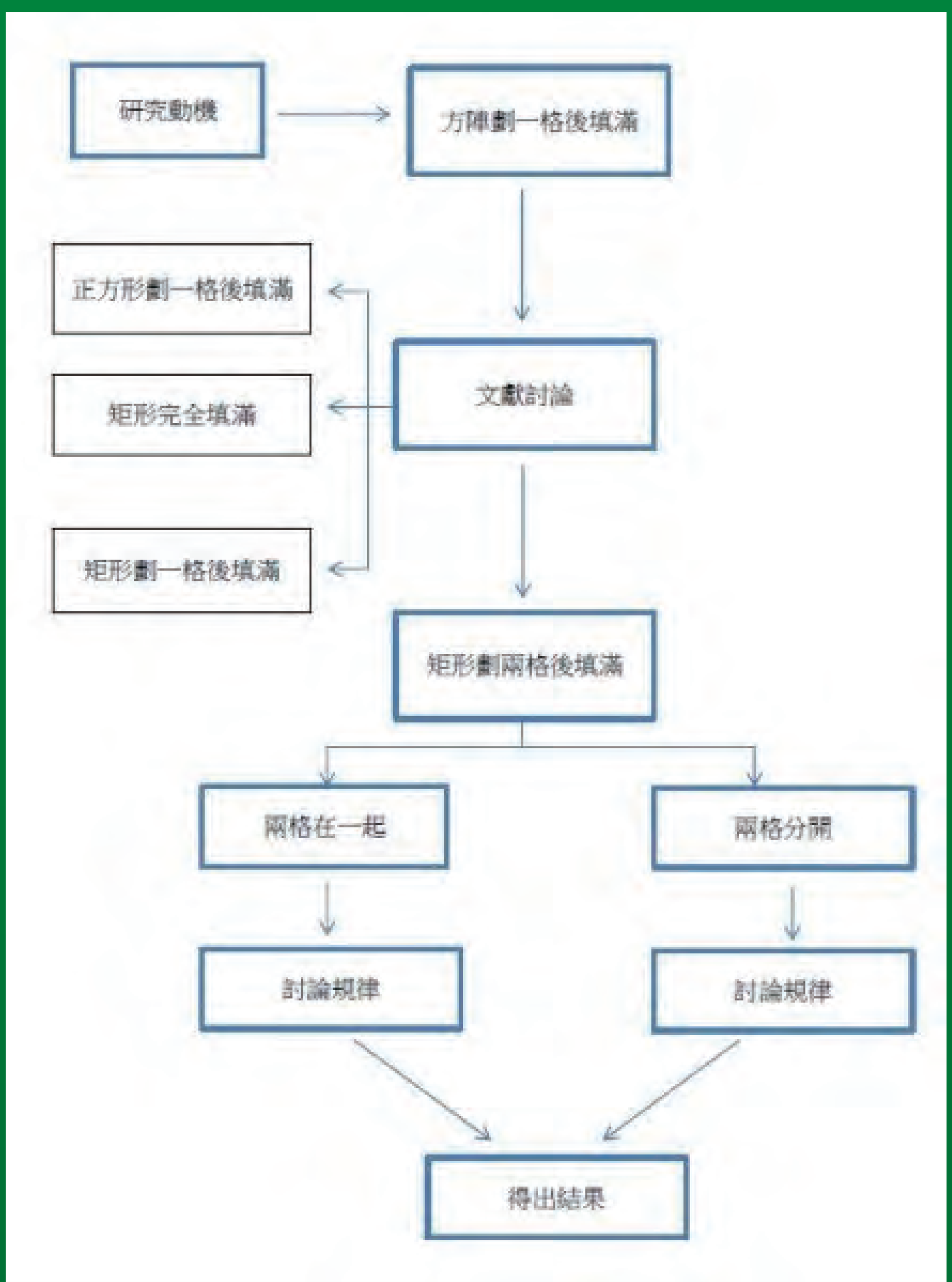
壹、研究動機

某次上數學課時，老師出了一道數學問題：規則是將 4×4 的方陣中，刪掉任意一格，剩下的方格是否能被L型方塊填滿？試驗後，發現無論是刪除哪一個位置的方格，皆能被填滿。其他的呢？除了5*5方陣，其餘的方陣都能被虧格填滿。出於好奇，我提議作這個科展。

貳、研究工具及步驟

很多格子紙、筆、網路、電腦

研究流程圖：



參、研究過程

一、文獻討論：

虧格是指四個正方形格子少一格，呈現虧格狀態。由它來填滿正方形或矩形的科展在歷屆都有完整的作品。我們把找到的重要文獻分類成表格：

矩形分類	邊　長	相關作品
虧格填滿正方形劃掉一格	n*n － 1，n≧2 的整數	虧格與方陣的對話。第50屆全國中小學科展作品，李國豪等。(臺中縣第一名)
虧格填滿長方形劃掉一格	(3k+1)(3t+1)，k、t≧1，k≠t或(3k+2)(3t+2)，k、t≧1，k≠t (以上k、t為整數)	第28屆全國中小學科展作品，陳綽等。(國中組全國第三名)
虧格剛好填滿長方形或正方形	(3m)*n m、n≧1 m、n為整數	擋不住的誘惑—虧格，杜信璋等。(全國第39屆中小學科展初小組數學科第一名)
虧格填滿長方形劃掉二格	(3k+1)(3t+2)，k、t≧1	國內尚無相關作品 台北市復興高中三年級作品，再論虧格覆蓋統整前面情形，並說明虧兩格的困難點是情形太多

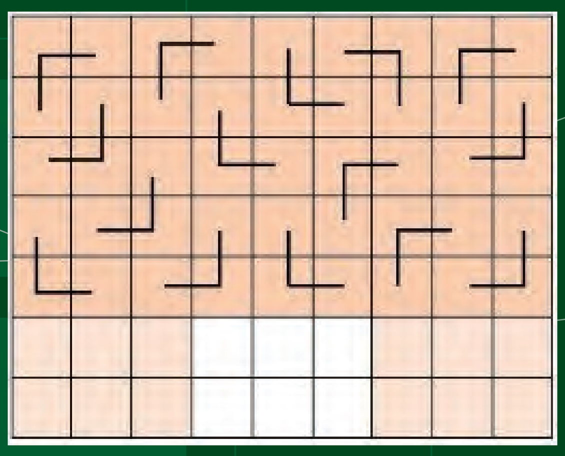
一、矩形填滿(s、t皆為正整數)

當矩形面積為3的倍數時，大部分矩形可被虧格填滿，而我們的任務就是找出無法被填滿的情況。

由3n、6n、9n……的順序討論後，我們找到一些規律：

(1) 3×(2t+1)的情形無法填滿

(2) 9×(2t+1)的情形(9×3在3n已討論過，所以跳過)，若t≧2，則在能被虧格填滿的9×5矩形下方增加(2t-4)/2=t-2個9×2矩形。



二、矩形劃一格後填滿(s、t皆為正整數)

矩形面積除以3餘1，邊長可能是(3t+1)×(3s+1)或(3t+2)×(3s+2)。

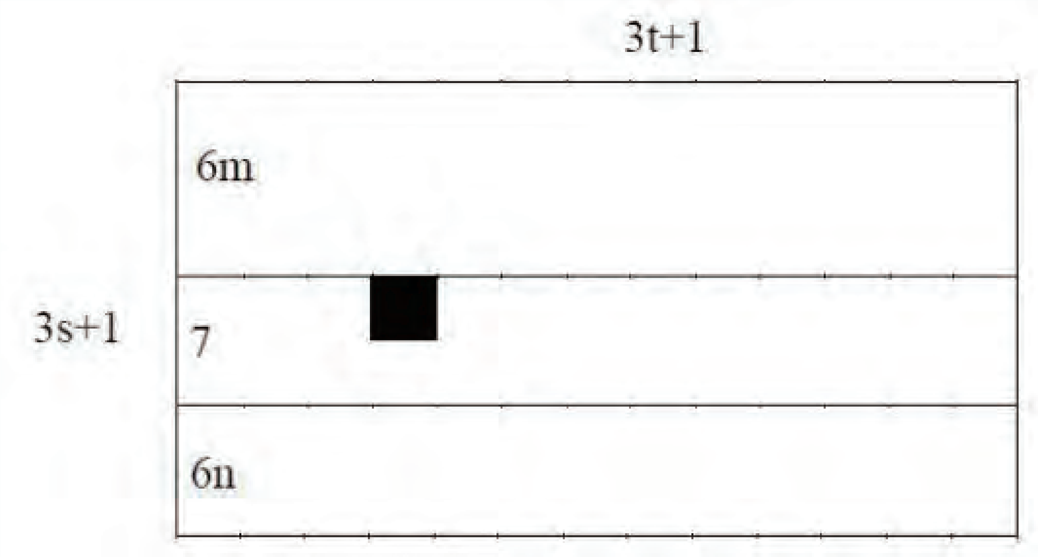
【A】(3t+1)×(3s+1)矩形的填滿設劃掉1格的位置在a列b行。

(1) 至少有一邊是奇數設3s+1為奇數。

① 可在第a列之前切出[(a-1)/6]個6×(3t+1)矩形(若a≦6，則直接在最上面切出一個7×(3t+1)矩形)

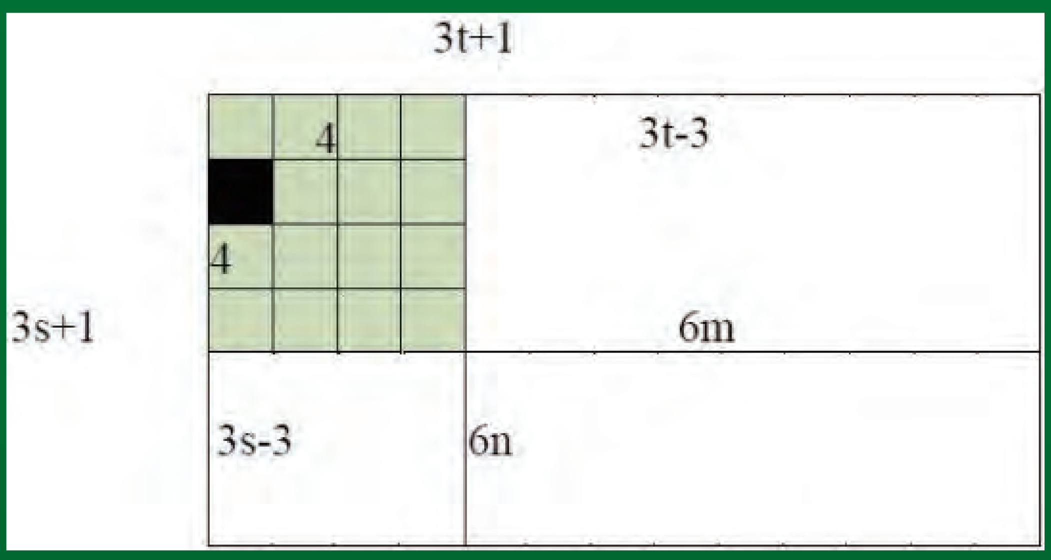
② 虧格置於7×(3t+1)矩形中，我們已證明7×(3t+1)矩形劃掉任一格後可被虧格填滿

③ 剩下的高是6的倍數，可再切出若干個6×(3t+1)矩形，如此原來的矩形有虧格必可以被虧格覆蓋。

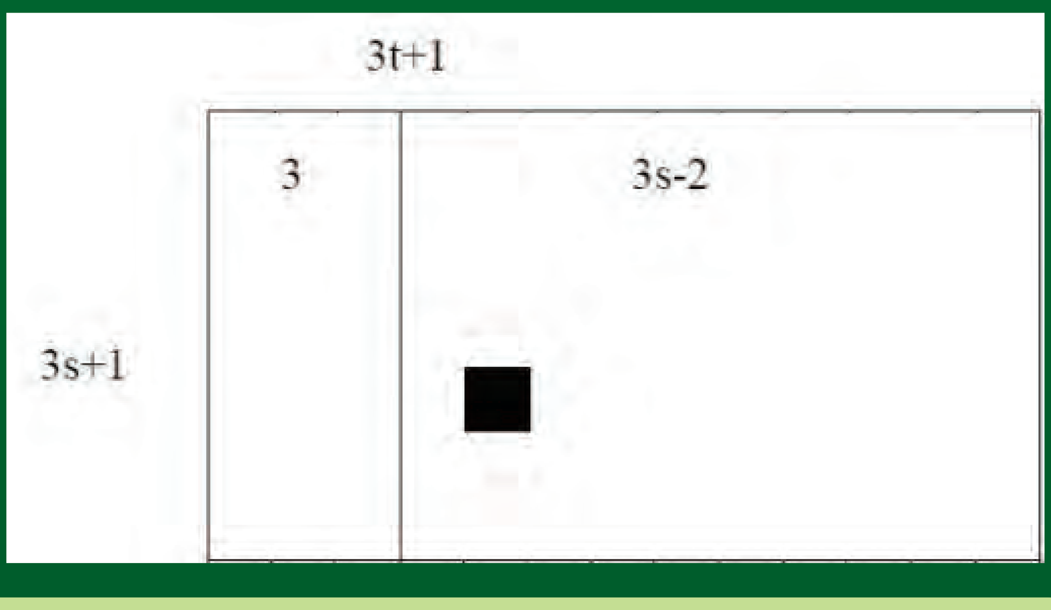


(2) 兩邊都是偶數

如果1≦a, b≦4，可以將矩形分成四塊，如下圖，左上角是一個包含虧格的4×4矩形，其餘三塊都是面積為6的倍數，可被虧格填滿的矩形。



若a, b至少有一個大於4，不失一般性設b>4，我們先從左邊切出一個(3s+1)×3的矩形，剩下的矩形有一邊是奇數，一邊是偶數，就可以用前面的切割法來被虧格覆蓋。



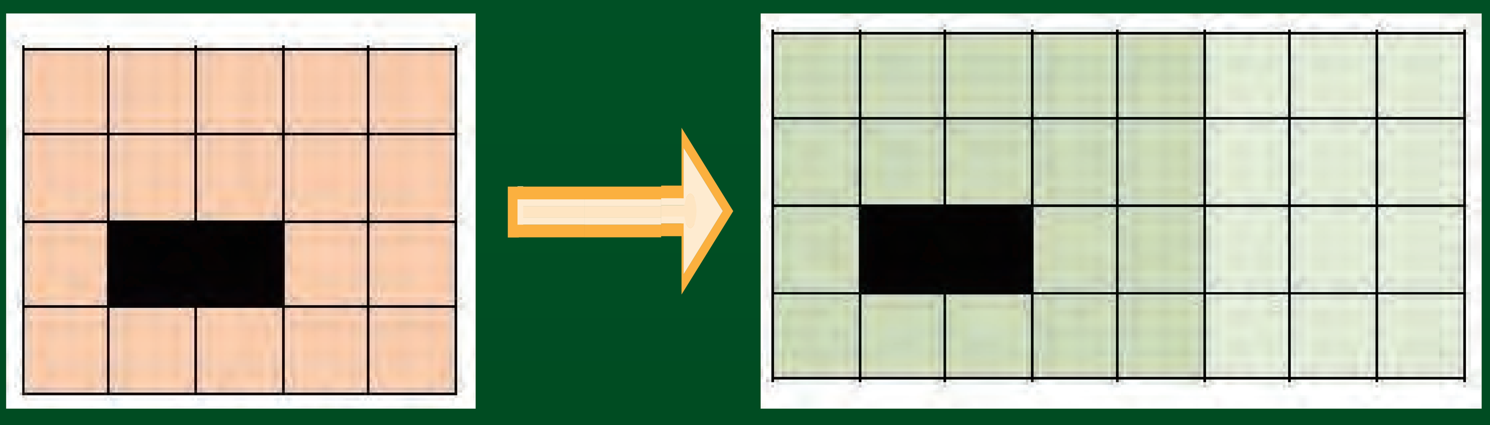
【B】(3t+2)×(3s+2)矩形的填滿與(3t+1)×(3s+1)矩形的分法類似。

三、矩形劃兩格後填滿

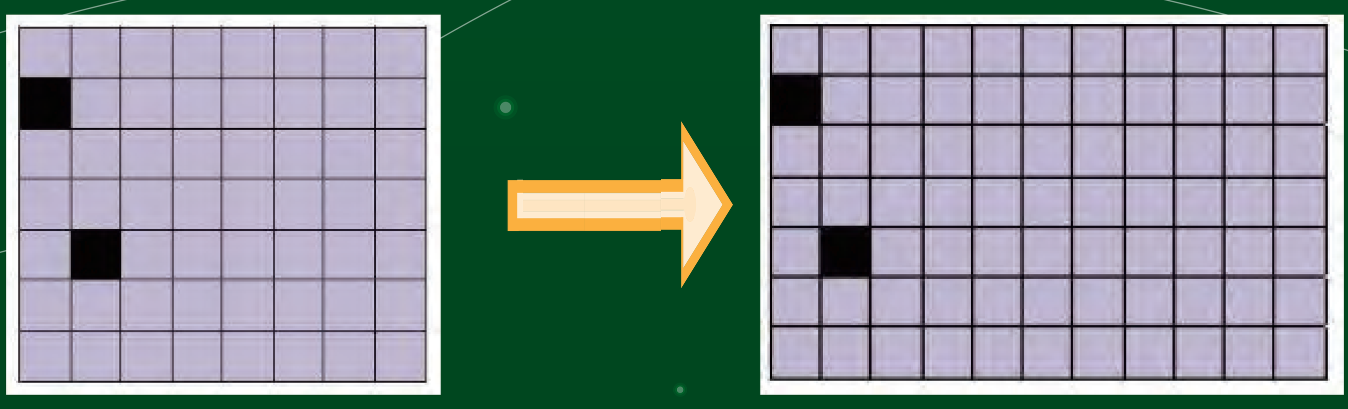
邊長(3m+1)*(3n+2)，劃掉兩格的問題，可以分成2格在一起和2格分開。

兩格在一起比兩格分開少很多，很快就完成。我們進行兩格分開的討論時，發現數量非常多，必須用長方形填滿和劃一格的方法才能完成。還好，當矩形的面積增加後，除了(3t+1)×5的矩形較特殊，大部分矩形不能填滿的情形會趨近於一個定值。

在面積較大且條件許可的矩形的增大，我們會使用擴增法以方便討論。



兩格分開的擴增比較麻煩，因為兩格可能一格在原區域，一格在擴增區域。



肆、研究結果

我們把 (3s+1) ×5以外矩形不能填滿的情形數整理成下圖兩個表格，(3s+1) ×5矩形會在討論和結論說明。

A • 兩格在一起

序號	方陣類型	不能被填滿個數
1	4*5 方陣的虧格	5
2	4*8 方陣的虧格	4
4*(3t+2)，且 t>=3 之後方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		
3	7*5 方陣的虧格	8
4	7*8 方陣的虧格	4
7* (3t+2)，且 t>=3 之後方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		
5	10*5 方陣的虧格	5
6	10*8 方陣的虧格	4
10*(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		
7	13*5 方陣的虧格	5
8	13*8 方陣的虧格	4
13*(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		

結果說明：
(3s+1)*(3t+2)，s>=5，t>=2 方陣的虧格
(1) t=1 時，s>=3 以後，被卡住的情形只有 5 種不能被虧格填滿
(2) t>=2 時，s>=2 以後，被卡住的情形只有 4 種不能被虧格填滿

B • 兩格分開

序號	方陣類型	不能被填滿個數
1	4*5 方陣的虧格	19
2	4*8 方陣的虧格	8
4*(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 8 個		
3	7*5 方陣的虧格	72
4	7*8 方陣的虧格	8
7*(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 8 個		
5	10*5 方陣的虧格	----
6	10*8 方陣的虧格	4
10*(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		
7	13*5 方陣的虧格 (暫時跳過)	----
8	13*8 方陣的虧格	4
13*(3t+2)，t>=3 方陣的虧格，不能被填滿的有 4 個		

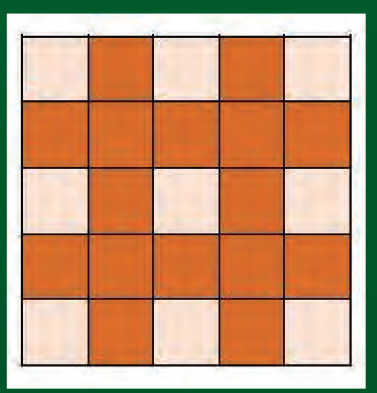
結果說明：
(3s+1)*(3t+2)，s>=5，t>=2 方陣的虧格
不能被虧格填滿情形依然維持在 4 個

伍、討論

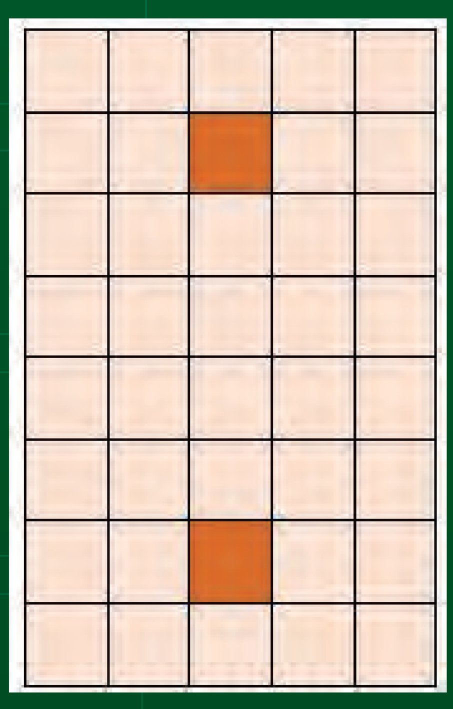
一、(3s+1) ×5的討論

這一類型集中在一條狹長的區域。在劃掉1格的情形是非常困難的：

(1) 5*5劃掉1格的情形，在橘色的區域無法被虧格填滿。



(2) (3k+2) *5，k>=2的情形 (如下圖)



只有在 (2, 3) 位置或 (3k+1, 3) 位置，無法被虧格填滿。

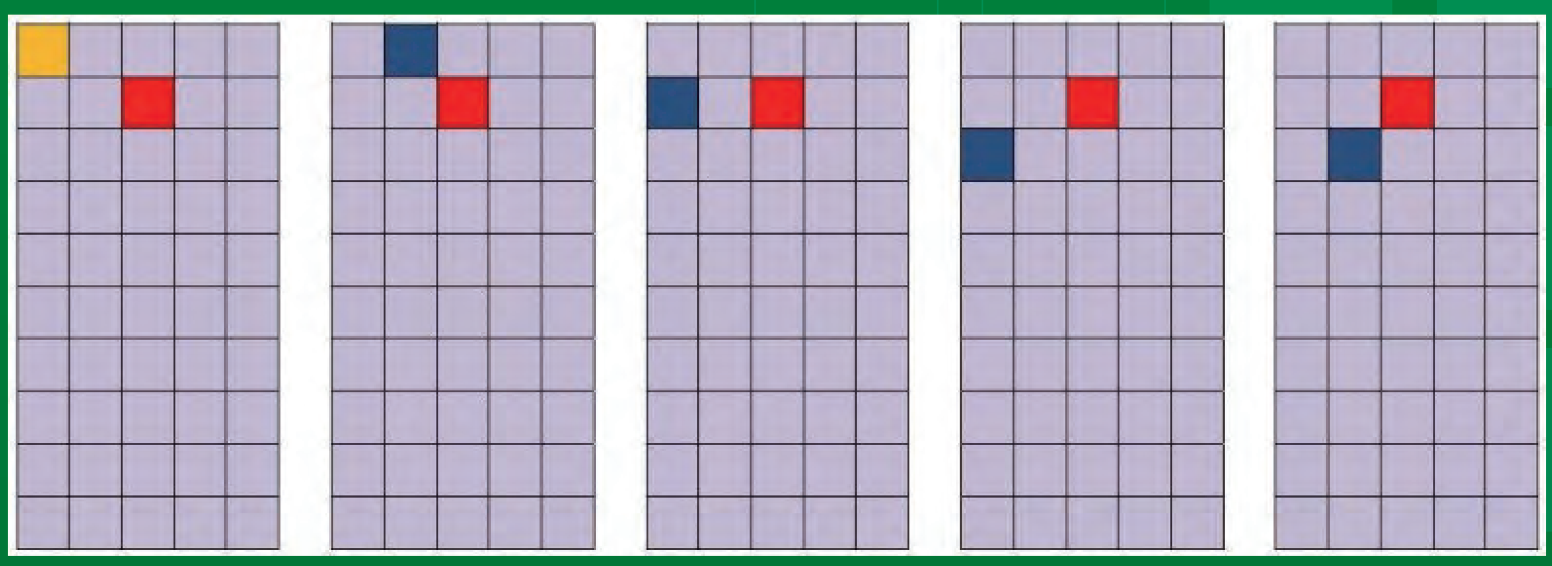
首先，我們處理4*5，採用枚舉的方法，有19種情形無法虧格填滿；討論7*5的情形，採用枚舉的方法，有72種情形無法虧格填滿。10*5的情形我們還是用枚舉法討論一遍，發現有39種不能的方式。

至此，好像發現7*5是最多的，接下來我們很仔細的用擴增法討論完13*5的情形，若兩格分開比較遠時須考慮虧1格不能填滿的區域 (8*5+5*5 = 13*5)，最後確認有49種不能的方式。

矩陣類型	4×5	7×5	10×5
無法填滿情形	19	72	39
矩陣類型	13×5	16×5	19×5
無法填滿情形	49	58	67

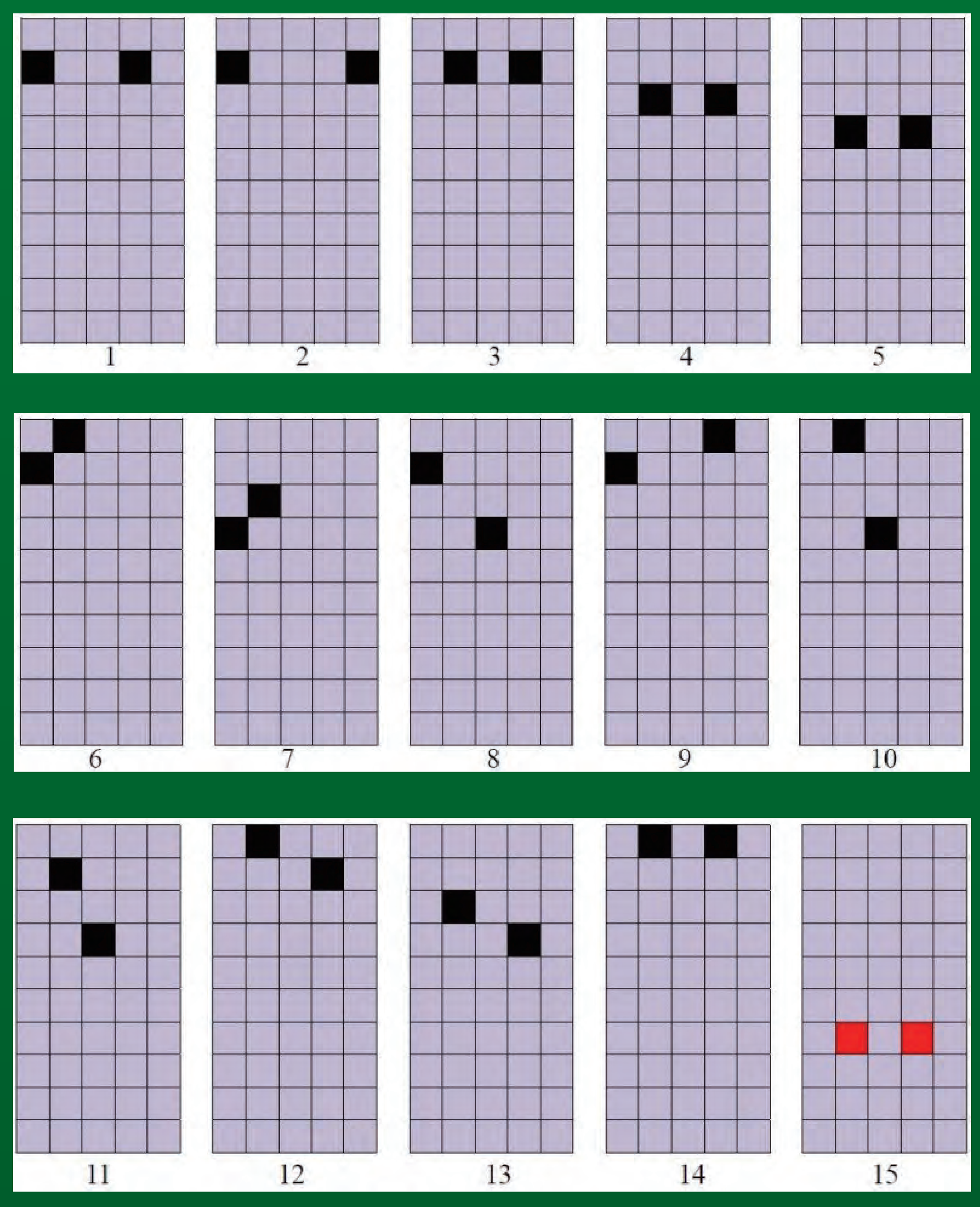
10*5後的數據呈現等差數列。我們觀察這些矩陣不能填滿的情形，發現以下的規律：

(1) 其中25種，一格是劃掉 (2, 3) 另一格分布在不相鄰的其他區域。



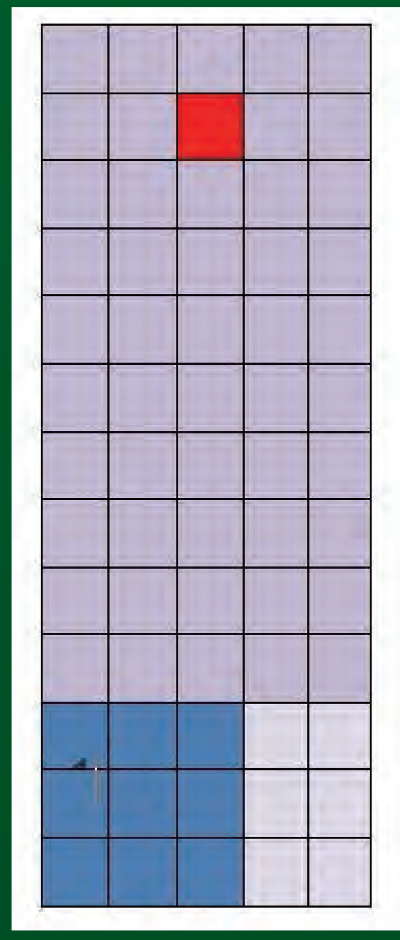
我們舉五個例子來說明。要特別注意的是，第一張虧紅黃區域的圖剛好可被虧格填滿。

(2) 除了這25種，另外15種虧兩格相對的情形，無論矩形區域如何增長都無法被虧格填滿。



第15種在10*5裡是第5種的對稱圖形，因此10*5不能被填滿的固定型式應該是14個，總數39個是正確的。補上這一個後，這一串不能被填滿個數等差數列的起始項就可以是40。

(3) 除了以上15種固定的以外，每增加3×5矩形區域則會增加9種不能的情形，這9種情形即是這一串等差數列的公差。

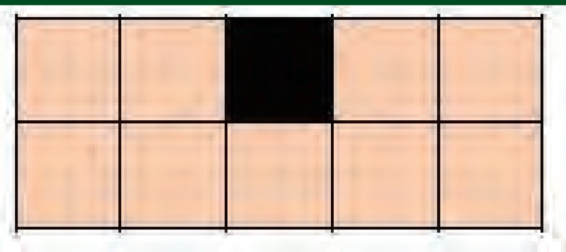


二、虧格不能填滿類型的討論

【A】矩形劃一格無法填滿的原因

劃一格有無法填滿情況的只有 (3t+2) × (3s+2) 矩形，所以我們拿2× (3s+2) 和5× (3s+2) 來討論。

(1) 2× (3t+2) 的矩形當劃掉格子在3k行時不能填滿

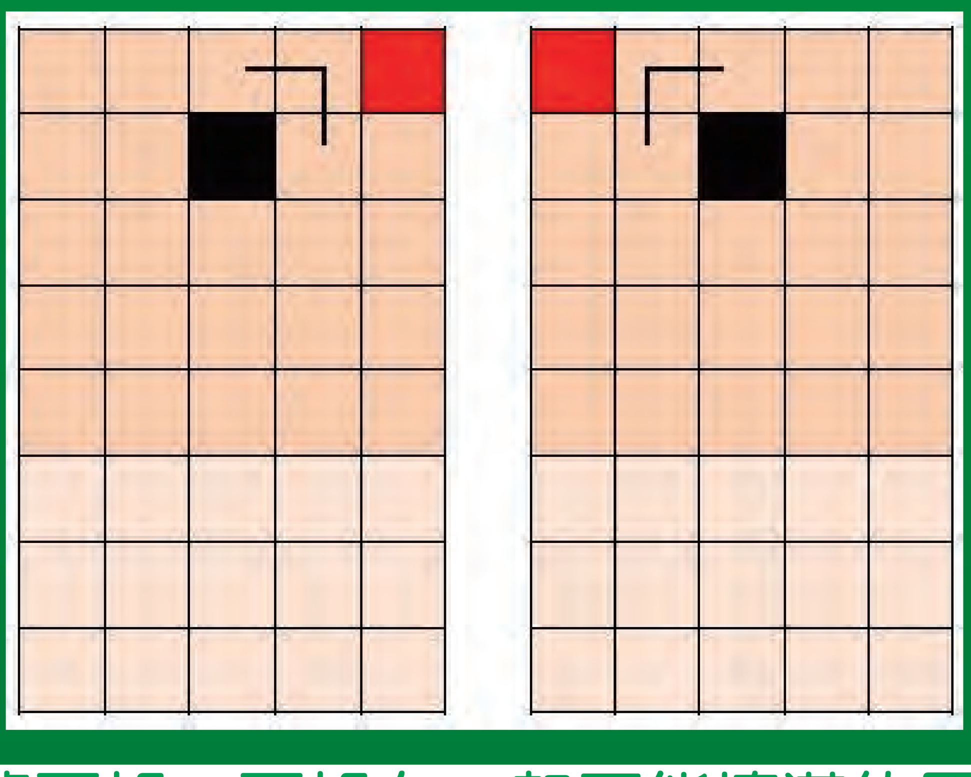


如上圖所示，當劃掉格子在3k行，與劃掉格同行的格子只能向左或向右連，但兩種都無法讓矩形被虧格填滿。

(2) 5×(3t+2) 矩形（這種情形深深的影響劃掉2格不能填滿的情形）

5×5矩形不能填滿的 (1, 2)、(2, 2)，在向下加長後都能被虧格填滿，但劃掉 (2, 3) 這格（考慮對稱），就會讓5×(3t+2) 矩形永遠無法填滿。

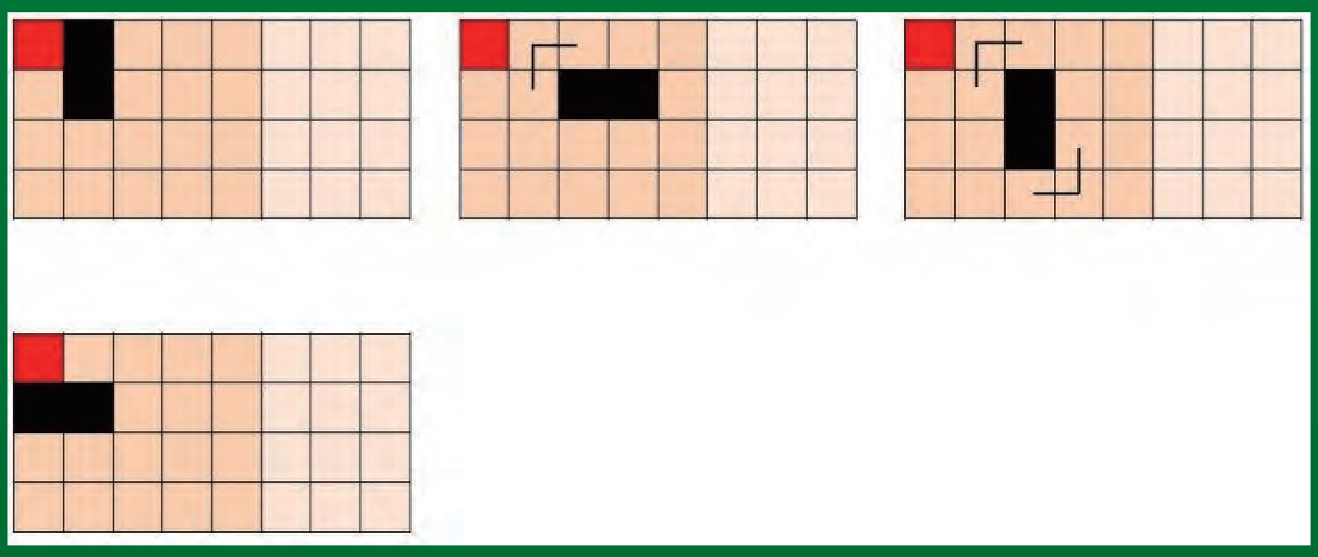
劃掉 (2, 3) 後，劃掉的格子上方那格只能向左或右連出虧格，但這會讓左上或右上的格子被卡住。



【B】劃掉兩格，兩格在一起不能填滿的原因：

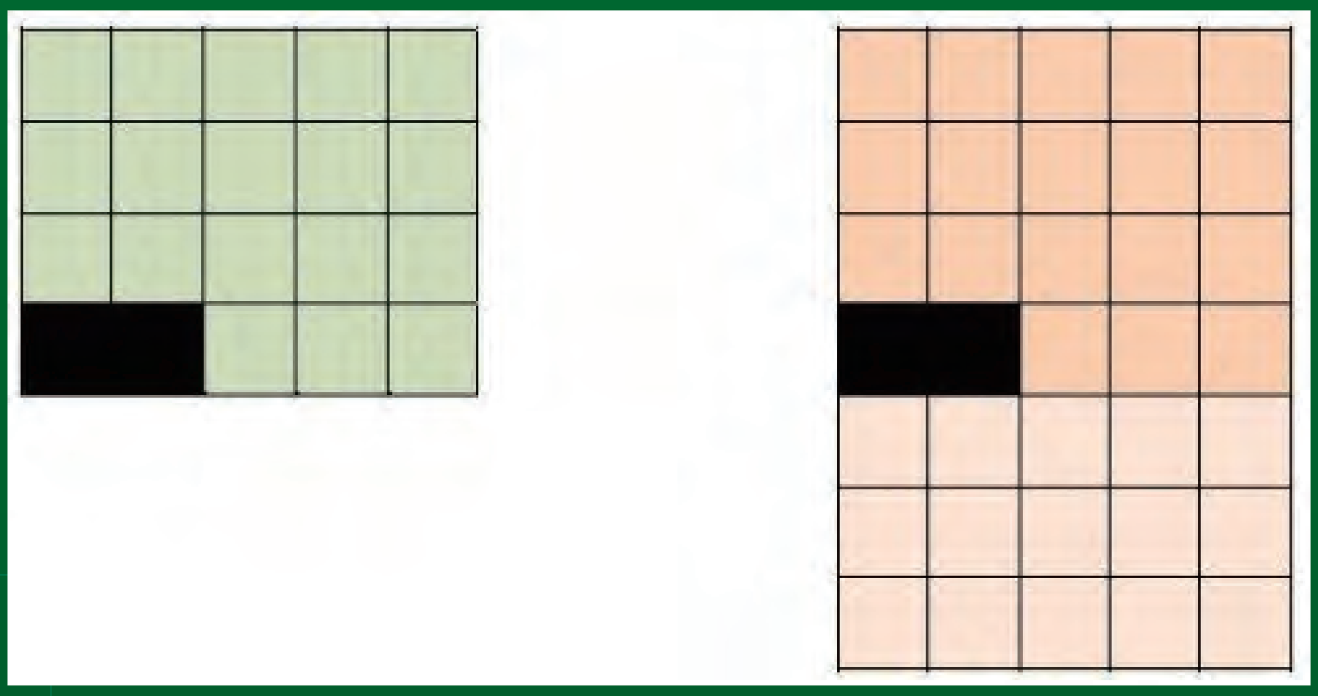
(1) 4×5向右擴增

我們一開始做4×5矩形的時候，因為空間很小、限制多，有很多無法填滿的情況，在矩形擴大之後有些可以填滿了；但有些圖形向右擴增也無法填滿，因為圖形本身會卡住邊角的地方，我們就是要找出這些情形：

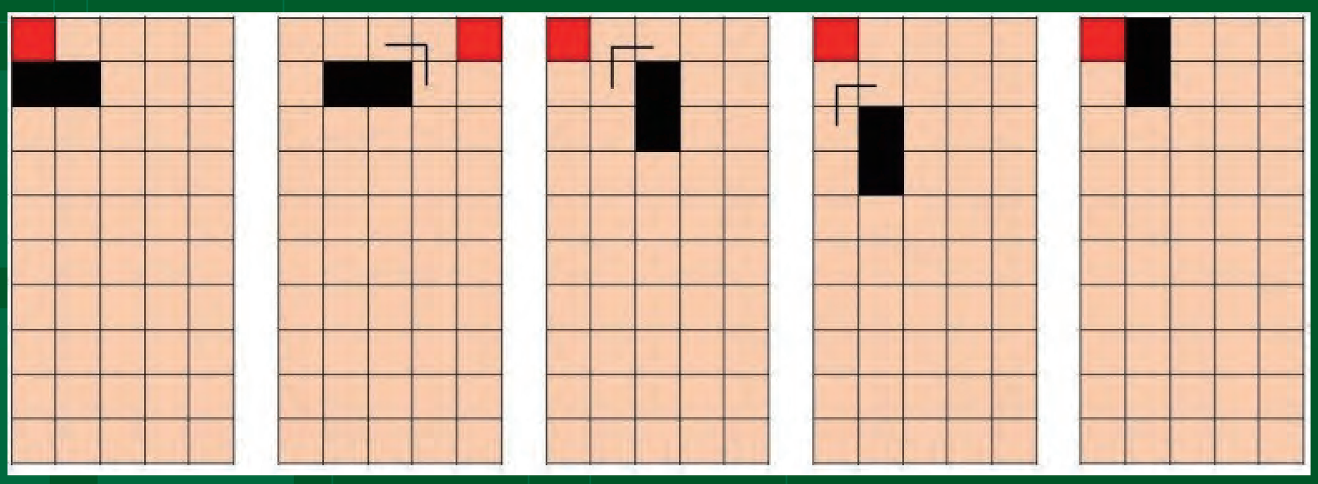


(2) 4×5向下擴增

當我們把4×5矩形向下擴增成7×5時，發現不能填滿的情形增加了！因為4×5矩形擴增成7×5時，會增加一個無法被虧格填滿的3×5矩形，所以原本矩形能填滿的擴增後也可能無法填滿。

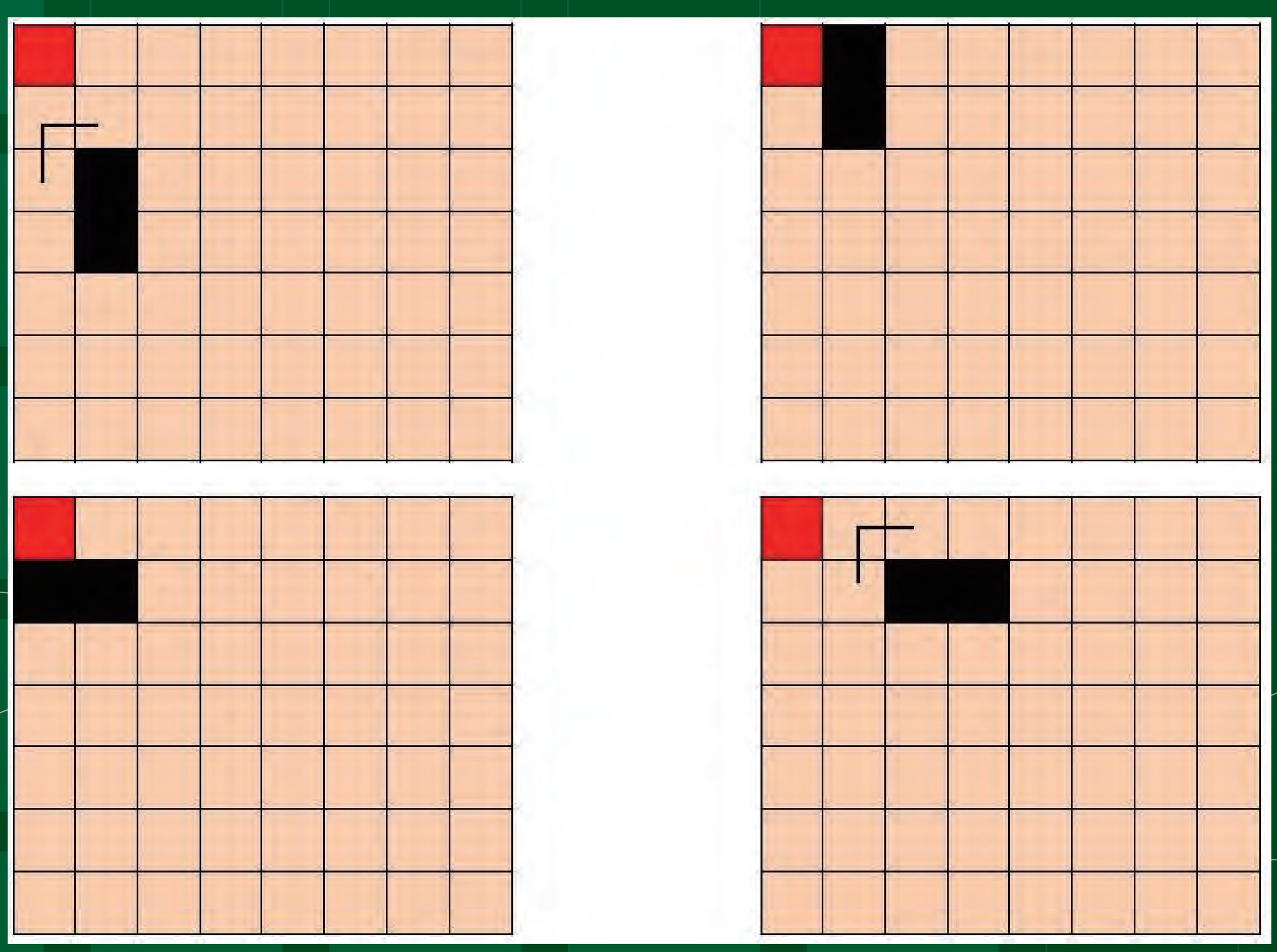


於是我們在討論 (3t+1)×5矩形的擴增時，會直接往下加6列，但要注意擴增前小於6×5的矩形不能這樣加。10×5後不能的情形只剩下下圖五種。



(3) 4×5同時向右向下擴增

當4×5矩形同時向右向下擴增成7×8矩形時，無法填滿的會剩下下圖4種，繼續擴增也不會再增減。

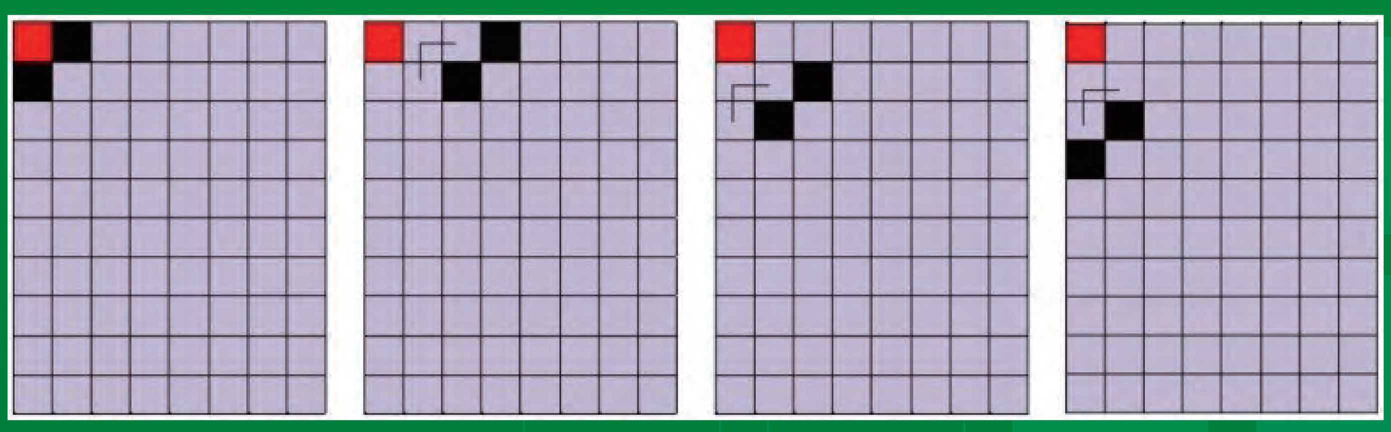


【C】劃掉2格，2格分開不能填滿的原因：

(1) 從4×5矩形開始，兩格分開無法填滿的情形有19種，向右擴增後發現從4×8開始，不能的情形都會剩下8種。

向下擴增時，我們先不管n×5的矩形，於是從同時向右向下擴增的7×8矩形開始。7×8的矩形，有8種無法填滿的情形，之後7×(3t+2)，t≧2的矩形也是保持這8種，不會增減。

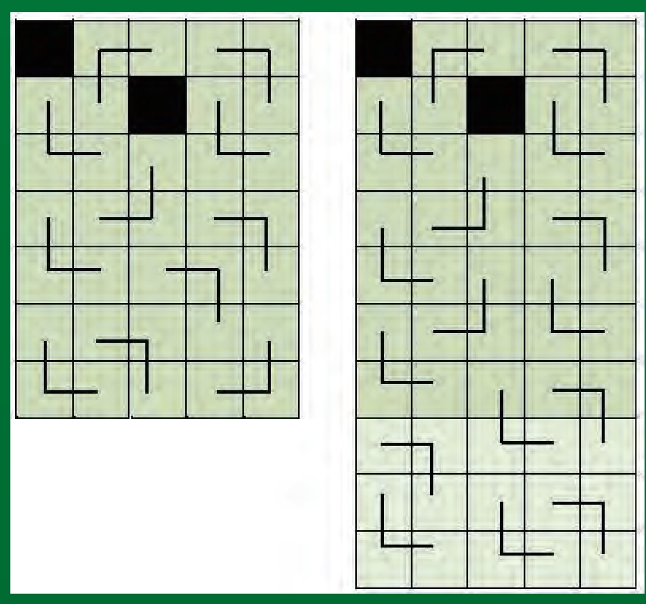
再向下擴成10×8矩形時，減少到下圖4種，之後不管是向右或向下繼續擴增，都不會再增減。



(2) (3t+1)×5矩形

(3t+1)×(3s+2) 矩形裡若劃掉的格子在 (2, 3) 或 ((3t+1), 3) 便無法填滿。以 (2, 3) 為例，若劃掉的格子有一格在 (2, 3)，因為虧格向左或向右連，都會使得 (1, 1) 或 (1, 5) 卡住，無法填滿，向下擴張也不會改變。

但我們找到一個特例，考慮對稱，若劃掉的格子有一格在 (2, 3)，一格在 (1, 1)，就剛好滿足會被卡住的那格，可被虧格填滿。

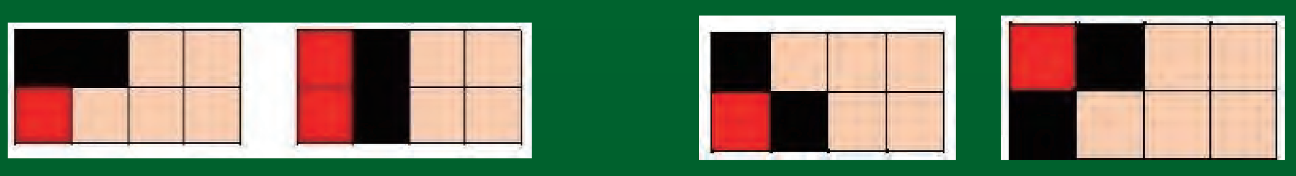


陸、結論

一、小範圍的情形：

比4×5還小的 (3t+1)×(3s+2) 矩形，有4×2和1×5兩個。而1×5矩形不能被虧格填滿，所以我們只討論4×2矩形的情況。

如下圖所示，4×2矩形有4種不能被填滿的情形，延伸成7×2、10×2後，也不會增減。



二、問題處理步驟

(一) 分類

我們把劃兩格的圖形分成兩格在一起和兩格分開，再各自從4×5矩形開始延伸。較特別的 (3t+1)×5矩形先不討論（後面會提到）。

(二) 剛開始的情形採用枚舉法，再用擴增進行大面積矩形討論

較小的初始矩形，我們使用枚舉法；當擴增的面積小於擴增前矩形的面積，且擴增的面積能被虧格填滿時，我們就使用擴增法。這讓我們省下很多時間，但關鍵步驟時還是得用枚舉法交叉比對。

(三) 最後，特別的部分進行歸納、統整

(3t+1)×5矩形是這篇最特別的部分，在向下擴增時，不能被填滿的情形數反而會增加。最後我們得出在向下擴增而增加一個3×5矩形時，都會增加9個不能填滿的情形。

三、這些問題的延伸

(1) 長方型區域的特殊討論、生活上的應用

可試著用不同圖形填滿矩形、鋪磁磚、疊積木。

(2) 立體的虧格問題

解決完平面的虧格問題後，我們開始思考立體的虧格問題。

我們參考了一篇高中科展和索瑪立方塊後，發現那篇科展只討論n×n×n-1的情況，所以如果未來還要再繼續延伸，可能就朝三邊長度皆不相同發展，作一個立體虧格的最後一塊拼圖。

柒、參考資料