中華民國第 57 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030401

正規正矩

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 林亞萱 國二 張云亭 國二 蔡悅曲	楊廷信

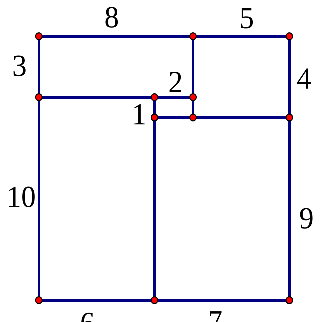
關鍵詞：矩形、拼正方形、等差數列

摘要

本研究主要探討將多塊長、寬不同的矩形拼成一塊大的正方形的情形。在圖形結構為 5 塊矩形時，我們分別討論了用等差數列、等比數列、費氏數列作為五塊矩形的長、寬的情況。在討論完圖形結構為 5 塊矩形的情形後，繼續去探討圖形結構為 1~4 塊矩形以及圖形結構為 6 塊矩形甚至是結構為 7 塊和 8 塊矩形的情形。

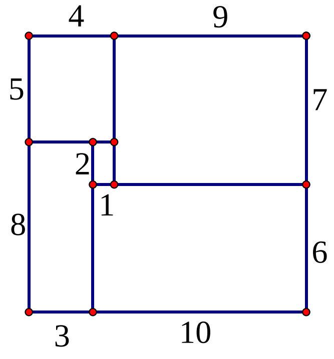
壹、　研究動機

有一次在上數學專題課時，老師在黑板上畫了如圖一的圖形，說明這是一個由五塊長寬皆不同的矩形所拼成的正方形，詢問我們在五塊矩形長寬為 1、2、……、10 時，是否有其他情形可以拼成正方形？

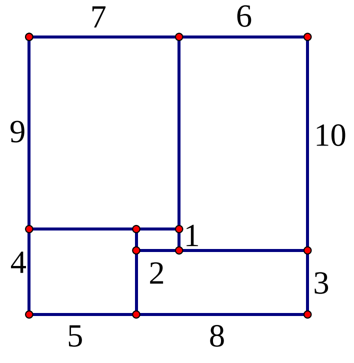


圖一

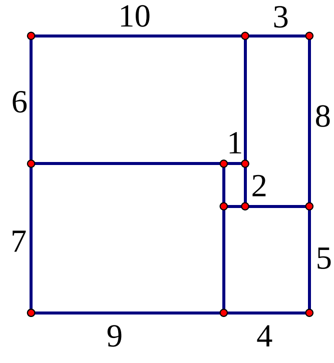
在老師提出問題之後，我們就開始嘗試著要找出其他可能的情形，在找的過程當中，我們發現了只要把原圖形分別旋轉 90°、180°、270° 就可以得到圖二到圖四的三組解，但是老師馬上就潑了我們一桶冷水，說：「若是兩個圖形經過旋轉或鏡射之後，兩個圖形是相同的，則把這兩個圖形視為同一種情形。」



圖二



圖三



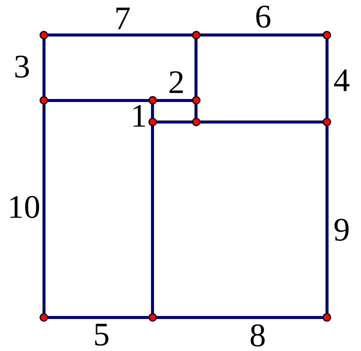
圖四

在被潑冷水之後，我們不氣餒的繼續尋找可能的解，在經過一番嘗試之後，我們找到了圖五的這一組解。在找出這一組解之後，我們除了繼續尋找是否還有其他解之外，我們也在思考著以下問題：

用五塊長寬為 1、2、……、10 的矩形所拼成的正方形結構(圖形)一定是這樣嗎？

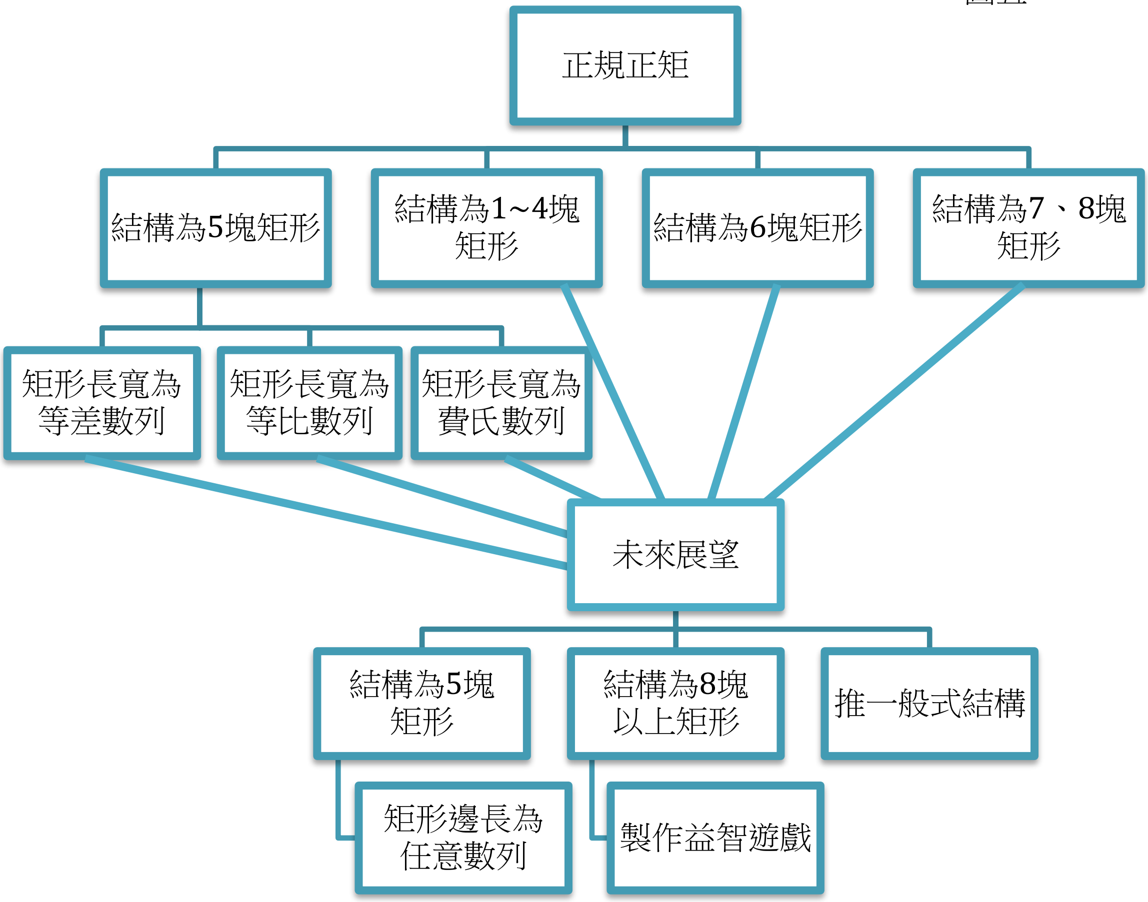
一、拼出來的正方形邊長只能是 13 嗎？

二、有沒有系統化的解法可以找出答案？



圖五

貳、 研究架構



參、 文獻探討

	作者	年代/類型	主要內容
文獻一	基測題	民國 99 年/基測	一正方形木板上剛好可割分成 36 個邊長均為 2 公分的正方形。若重新將此木板劃分成數個<u>大小相同</u>的長方形，則此長方形的長與寬不可能為何?
文獻二	林正倫、吳培綸	2006 / 科展	用「四角切割」，並結合輾轉相除法，研究長方形中切割正方形，再將概念延伸到三維空間，延伸成長方體切割出最少正立方體數。
文獻三	郭笛萱、黃建程、張高登	2008 / 科展	探討多方塊用最少刀切割後重組在拼成正方形的可能性。

表一

我們的報告主要是在探討「用限制條件下不同大小的矩形拼成正方形」，而基測題是「把正方形切割成數個相同大小的矩形」，文獻二是「把矩形切割成數個正方形」，文獻三是「把小正方形拼成的多邊形切割再拼成一大正方形」。

肆、　研究過程

一、　解決問題

首先，我們先把題目「用五塊不同形狀矩形拼正方形」，轉換成「把正方形切割成五塊不同形狀的矩形」。因為 $1\sim10$ 為五塊矩形的長、寬，把 $1\sim10$ 分成五組共有 $C_2^{10}\times C_2^{8}\times C_2^{6}\times C_2^{4}\times C_2^{2}=113400$ 種情形，在這麼多種可能的情況下，去考慮哪些可能拼成正方形是一件困難的工作，因此我們把題目轉換成一個正方形切割成五塊長、寬相異的矩形。

1. 正方形邊長是否唯一？

引理 1：已知a_1、a_2、a_3、a_4、…、a_{2n}為正整數，且$a_1<a_2<a_3<a_4<\cdots<a_{2n}$，則$a_1\cdot a_{2n}+a_2\cdot a_{2n-1}+\cdots+a_n\cdot a_{n+1}\leq$任意兩數乘積之和$\leq a_1\cdot a_2+a_3\cdot a_4+\cdots+a_{2n-1}\cdot a_{2n}$

由引理 1 可知正方形的面積範圍如下

正方形面積下界：$1\times10+2\times9+3\times8+4\times7+5\times6=110$

正方形面積上界：$1\times2+3\times4+5\times6+7\times8+9\times10=190$

$\Rightarrow 110\leq$正方形面積≤ 190

因為 $110<11^2<12^2<13^2<190$，所以正方形邊長可能為 11、12、13。

2. 五塊矩形拼正方形的結構

引理 2：當 $k>\frac{5+\sqrt{33}}{2}$ 時，$5k^2+3k+2>(2k+2)^2$

證明：

因為　$k>\frac{5+\sqrt{33}}{2}$

$$\Rightarrow 2k-5>\sqrt{33}$$
$$\Rightarrow 4k^2-20k+25>33$$
$$\Rightarrow 4k^2-20k-8>0$$
$$\Rightarrow k^2-5k-2>0$$

又 $k^2-5k-2=(5k^2+3k+2)-(2k+2)^2$

故 $(5k^2+3k+2)-(2k+2)^2>0$

$\Rightarrow 5k^2+3k+2>(2k+2)^2$ ■

引理3：用 $1\sim 2n$ 當矩形的長寬來拼正方形，當 $n\geq 5$ 時，所有矩形面積和最小值必大於 $(2n)^2$，

即 $1\times 2n+2\times(2n-1)+3\times(2n-2)+\cdots+n(n+1)>(2n)^2$，$(n\geq 5)$

證明：

由引理 1 可知，這 n 塊矩形面積和最小值為 $1\times 2n+2\times(2n-1)+\cdots\cdots+n(n+1)$

我們由數學歸納法來證明$1\times 2n+2\times(2n-1)+3\times(2n-2)\ldots+n(n+1)>(2n)^2$，$n\geq 5$

(1) 當 $n=5$ 時，

由引理 1 得知

$1\times 10+2\times 9+3\times 8+4\times 7+5\times 6>10^2$

$\Rightarrow 110>100$

故 $n=5$ 時，不等式成立。

(2) 設 $n=k$ $(k>5)$ 時，此不等式成立

$\Rightarrow 1\times 2k+2\times(2k-1)+3\times(2k-2)\ldots+k(k+1)>(2k)^2$

當 $n=k+1$ 時

$\Rightarrow 1\times(2k+2)+2\times(2k+1)+3\times 2k+\cdots+(k-1)k+(k+1)(k+2)$

$=[1\times 2k+1\times 2]+[2(2k-1)+2\times 2]+\cdots+[k(k-1)+2k]+[(k+1)k+2(k+1)]$

$=1\times 2k+\cdots+k(k+1)+2[1+2+3+\cdots+(k+1)]$

$>(2k)^2+2\times\dfrac{[1+(k+1)](k+1)}{2}$

$=(2k)^2+k^2+3k+2$

$=5k^2+3k+2$

由引理 2 可知，$5k^2+3k+2>(2k+2)^2=4(k+1)^2$

因此，

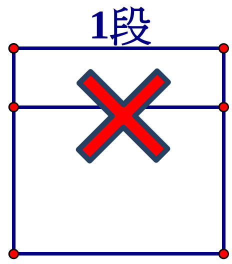
$1\times(2k+2)+2\times(2k+1)+3\times 2k+\cdots+(k-1)k+(k+1)(k+2)>4(k+1)^2$

故 $n=k+1$ 時，不等式成立。

(3) 由數學歸納法得知，當$n \geq 5$時，

$1\times 2k + 2\times 2(2k-1) + \cdots + (k-1)k + k(k+1) > (2n)^2$ 此不等式成立。 ■

由引理 3 我們可以知道當用五塊以上矩形來拼正方形時，正方形的任一邊必不可能只用一塊矩形拼成(如圖六)，我們把此情形稱為五塊矩形以上時，不可能「切一刀到底」。



圖六

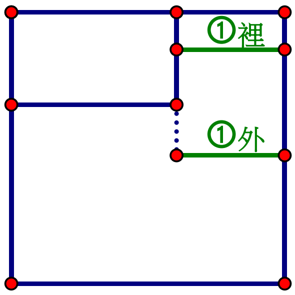
在確認五塊矩形拼正方形情形的邊至少有兩塊以上矩形所拼成之後，我們先討論正方形的四個邊皆切為兩段的情形。為了能夠清楚的了解我們是如何找出符合題意的圖形，我們定義了以下的符號，並以表格方式來呈現結果。

定義：

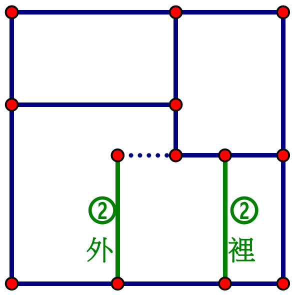
①：在第一條橫線裡/外

②：在①的裡/外

都沒有相等的線段，因為相等的線段必重複。



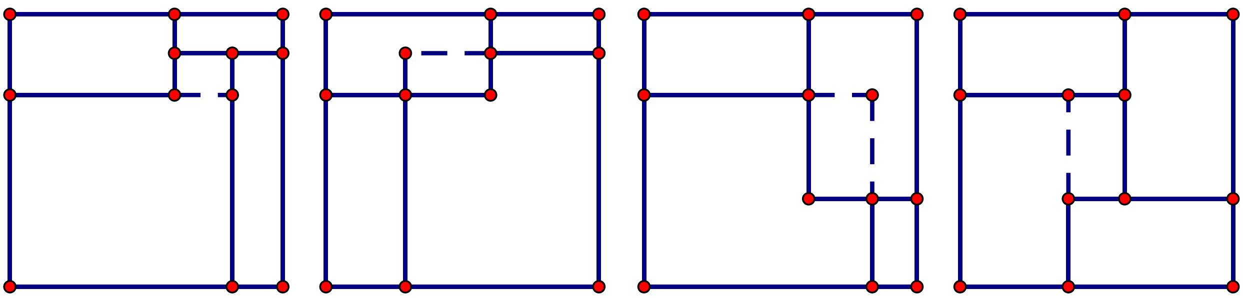
圖七



圖八

	①	②	合不合	不合的原因
1.	裡	裡	合	
2.	裡	外	不合	有兩塊不為矩形，且有線段重複
3.	外	裡	不合	有兩塊不為矩形，且有線段重複
4.	外	外	合	

表二



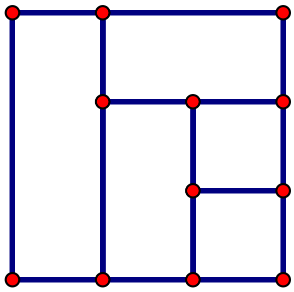
1. 2. 3. 4.

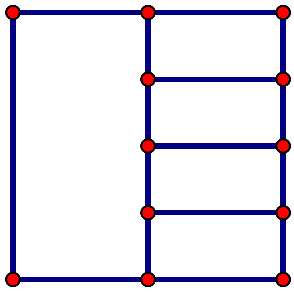
圖九

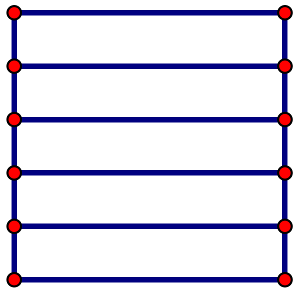
I. 由此表可知，五塊長方形組成的正方形，正方形四個邊皆切為兩段時，圖形有兩種情

形符合，但是經由鏡射之後 1. 和 4. 是同一種圖形，因此我們所找出來的圖形只有 4. 的情形。

II. 從圖十、十一、十二中可看出，正方形一邊為三或四或五塊矩形時，必定會有共用邊，因此不可能出現正方形一邊為三塊或四塊或五塊矩形的情形。


圖十

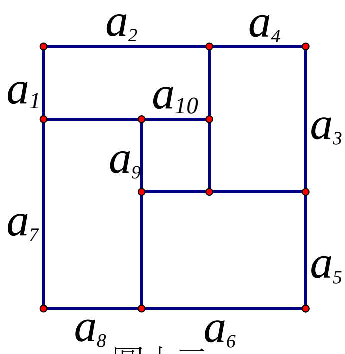

圖十一


圖十二

因此，我們證明出圖形只有唯一的一種圖形(如圖十三)。

3. 找出所有解

我們為了解題方便，把五塊矩形的長、寬命名，其中代號為偶數的邊為矩形的長；代號為奇數的邊為矩形的寬 (如圖十三)。



圖十三

由前面內容可知正方形的邊長可能為 11 、12 或 13 ，且

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10}=1+2+\cdots\cdots10=55$，因此在確認邊長的情況下，我們可以知道

a_9+a_{10}

$=(a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10})-(a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10})-$正方形周長

$=(a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10})-$正方形邊長$\times 4$

$=55-$正方形邊長$\times 4$

(1) 正方形邊長為 11

$a_9+a_{10}=55-11\times 4=11$

$11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$

在這裡，我們只討論 $a_9 < a_{10}$ 的情形，因為 $a_9 > a_{10}$ 的情形只是將 $a_9 < a_{10}$ 的圖形旋轉 $90°$ 而已。

① $a_9 = 1$，$a_{10} = 10$

因為 $a_4 + a_8 = 11 - 10 = 1$

$1 = 1 + 0$ (1 重複、0 不合)，所以不合。

② $a_9 = 2$，$a_{10} = 9$

因為 $a_4 + a_8 = 11 - 9 = 2$

$2 = 1 + 1$ (1 重複)，所以不合。

③ $a_9 = 3$，$a_{10} = 8$

$a_4 + a_8 = 11 - 8 = 3$

$3 = 1 + 2$

$a_1 + a_5 = 11 - 3 = 8$

$8 = 1 + 7$ (1 重複)$= 2 + 6$ (2 重複)$= 3 + 5$ (3 重複)$= 4 + 4$ (4 重複)

④ $a_9 = 4$，$a_{10} = 7$

$a_4 + a_8 = 11 - 7 = 4$

$4 = 1 + 3 = 2 + 2$ (2 重複)

$a_1 + a_5 = 11 - 4 = 7$

$7 = 1 + 6$ (1 重複)$= 2 + 5 = 3 + 4$ (3 重複)

所以答案可為 $a_9 = 4$，$a_{10} = 7$，$a_4 + a_8 = 1 + 3$，$a_1 + a_5 = 2 + 5$

⑤ $a_9 = 5$，$a_{10} = 6$

$a_4 + a_8 = 11 - 6 = 5$

$5 = 1 + 4 = 2 + 3$

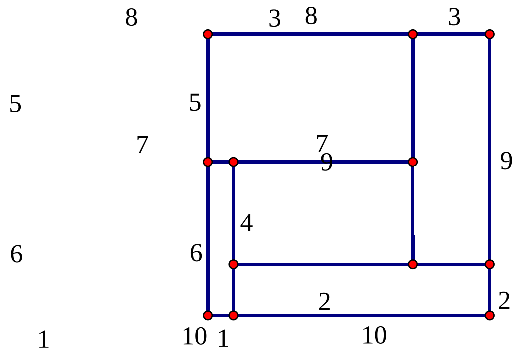
$a_1 + a_5 = 11 - 5 = 6$

$6 = 1 + 5$ (5 重複)$= 2 + 4$ (2 or 4 重複)$= 3 + 3$ (3重複)

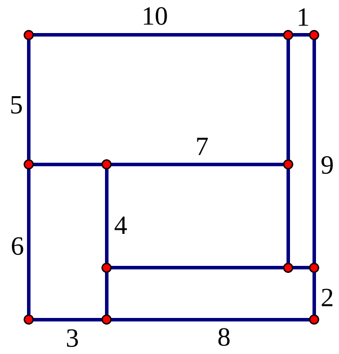
因此正方形邊長為 11 只有 $a_9 = 4$，$a_{10} = 7$，$a_4 + a_8 = 1 + 3$，$a_1 + a_5 = 2 + 5$ 的情

形。

其中 $a_4+a_8=1+3$，$a_1+a_5=2+5$ 的情形會有四組解，但我們只列出 $a_1=2$、$a_5=5$、$a_4=3$、$a_8=1$ 和 $a_1=2$、$a_5=5$、$a_4=1$、$a_8=3$ 這兩組解，因為另外兩組解是這兩組解的旋轉圖形。圖十四和圖十五就是這兩組解的圖形。



圖十四



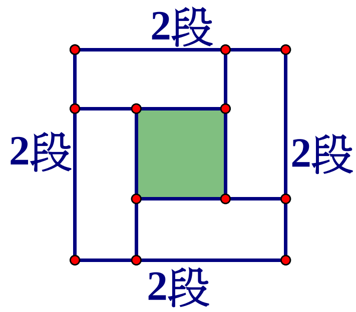
圖十五

(2) 邊長為 12

$a_9+a_{10}=55-12\times4=7$

$7=1+6=2+5=3+4$

因為 $12=6+6$，所以邊長為 6 的矩形無法放置於圖十六中任意白色矩形處，因此 a_9+a_{10} 必定只可能為 $1+6$ 這種情形。



圖十六

$a_9=1$，$a_{10}=6$

$a_4+a_8=12-6=6$

$6=1+5$ (1 重複)$=2+4$

$a_1+a_5=12-1=11$

$11=1+10$ (1 重複)$=2+9$ (2 重複)$=3+8=4+7$ (4 重複) $=5+6$ (6 重複)

$a_3=12-a_5=12-8=4$ (4 重複)

討論完所有情形都會有數字重複出現的情形，因此正方形邊長為 12 無解的。

(3) 邊長為 13

$a_9+a_{10}=55-13\times4=3$

$3=1+2$

$a_9=1$，$a_{10}=2$

$a_4 + a_8 = 13 - 2 = 11$

$11 = 1 + 10$ (1 重複)$= 2 + 9$ (2 重複)$= 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$

$a_1 + a_5 = 13 - 1 = 12$

$12 = 1 + 11$ (11 不合)$= 2 + 10$ (2 重複)$= 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6$ (6 重複)

① $a_4 + a_8 = 3 + 8$，$a_1 + a_5 = 5 + 7$

$a_7 = 13 - a_1 = 13 - 5 = 8$ (8 重複)

② $a_4 + a_8 = 4 + 7$，$a_1 + a_5 = 3 + 9$

$a_3 = 13 - a_5 = 13 - 9 = 4$ (4 重複)

③ $a_4 + a_8 = 5 + 6$，$a_1 + a_5 = 3 + 9 = 4 + 8$

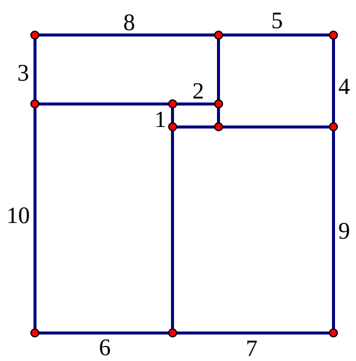
I. $a_4 + a_8 = 5 + 6$，$a_1 + a_5 = 3 + 9$

所以答案可為 $a_9 = 1$，$a_{10} = 2$，$a_4 + a_8 = 5 + 6$，$a_1 + a_5 = 3 + 9$

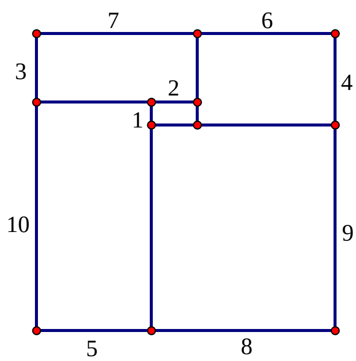
II. $a_4 + a_8 = 5 + 6$，$a_1 + a_5 = 4 + 8$

$a_3 = 13 - a_5 = 13 - 8 = 5$ (5 重複)

因此正方形邊長為 13 只有 $a_9 = 1$，$a_{10} = 2$，$a_4 + a_8 = 5 + 6$，$a_1 + a_5 = 3 + 9$ 的情形。其中 $a_4 + a_8 = 5 + 6$，$a_1 + a_5 = 3 + 9$ 的四種情形如之前情況會有兩種重複，因此只有圖十七和圖十八這兩種情形。



圖十七



圖十八

二、 矩形長、寬為等差、等比、費氏數式

在解決完一開始所想到的所有問題之後，我們接著思考若是把原題目的矩形長寬為 1、2、……、10 的數列，改成其他數列，是否一樣會有解？因此，接下來我們就來討論當數列為等差數列、等比數列以及費氏數列的情形。

1. 矩形長寬為「等差數列」的情形。

(1) 公差為 1

假設此等差數列為 n、$n+1$、$n+2$、 …… 、$n+9$， n 為正整數。

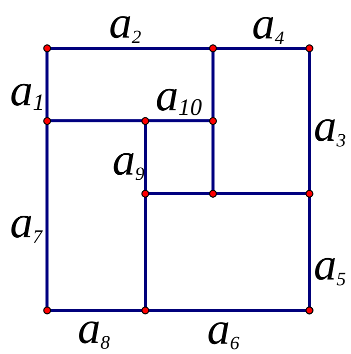
引理 4：矩形長寬為 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n+1}$、$\boldsymbol{n+2}$、 …… 、$\boldsymbol{n+9}$的情形下，正方形邊長不可為偶數。

證明：

已知

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10} = n + (n+1) + \cdots + (n+9) = 10n + 45$$

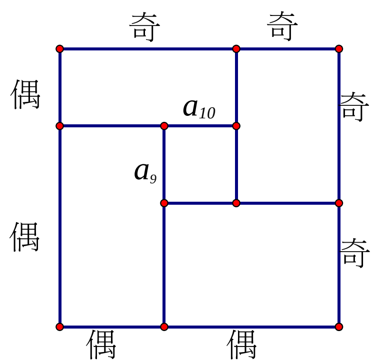
$$\begin{aligned} a_9 + a_{10} &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10}) - 4\times\text{邊長} \\ &= (10n + 45) - 4\times\text{邊長} \\ &= \text{奇數} - \text{偶數} \\ &= \text{奇數} \end{aligned}$$



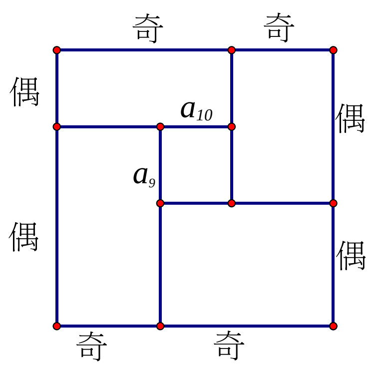
圖十九

所以 a_9、a_{10} 必為一奇數、一偶數

又因為 n、$n+1$、$n+2$、 …… 、$n+9$ 中有 5 個奇數、5 個偶數，若正方形邊長是偶數，則圖形只有以下兩種情形：



圖二十



圖二十一

圖二十中的 a_9 為偶數 − 偶數，所以 a_9 為偶數； a_{10} 為奇數 − 奇數，所以 a_{10} 為偶數，與上述 a_9、a_{10} 必為一奇數、一偶數矛盾。

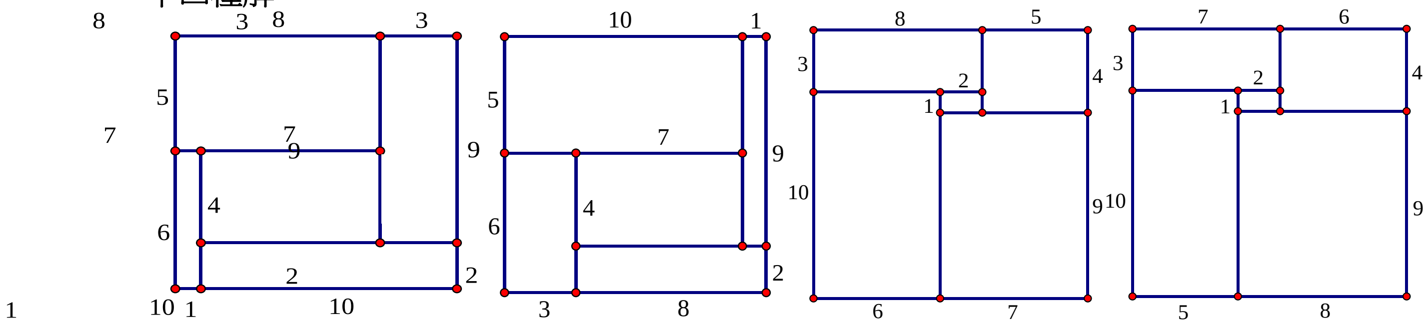
圖二十一中的 a_9 為偶數 – 奇數，所以 a_9 為奇數； a_{10} 為奇數 – 偶數，所以 a_{10} 為奇數，與上述 a_9、a_{10} 必為一奇數、一偶數矛盾。

因此，當矩形長寬為 n、$n+1$、$n+2$、 …… 、$n+9$ 時，正方形邊長不可能為偶數。 ■

由最一開始的問題解決，可以得到下列定理 1：

定理 1：

用五塊矩形長寬為 n、$n+1$、$n+2$、……、$n+9$ 來拼正方形時，當 $n=1$ 時有以下四種解。



定理 2：

用五塊矩形長寬為 n、$n+1$、$n+2$、……、$n+9$ 來拼正方形，當 $n \geq 9$ 時是無解的。

證明：

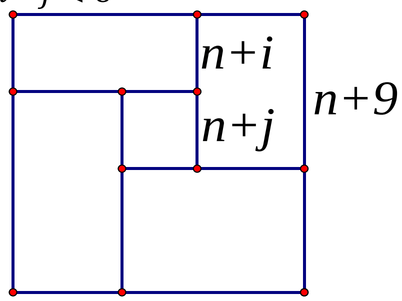
因為數列為 n、$n+1$、$n+2$、……、$n+9$ ，其中最大數 $n+9$ 必在正方形的外圍，且會如圖二十二所示： $n+9=(n+i)+(n+j)$，$0<i$、$j<8$

又 $n+9=(n+i)+(n+j) \geq \mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$

$n+9 \geq 2n+1$

$8 \geq n$

因此，當 $n \geq 9$ 時無解。



圖二十二

■

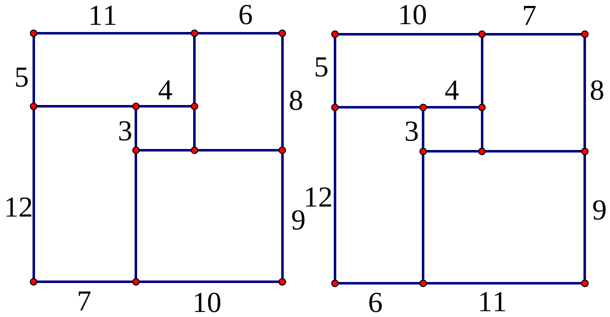
定理 3：

用五塊矩形長寬為 n、$n+1$、$n+2$、……、$n+9$ 來拼正方形，

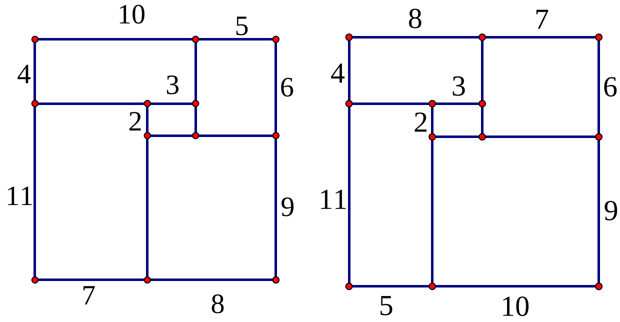
(1) 當 $n=8$、7、6、5、4 時都是無解的。

(2) 當 $n=3$、2 時，分別有以下兩組解。

$n=3$的解



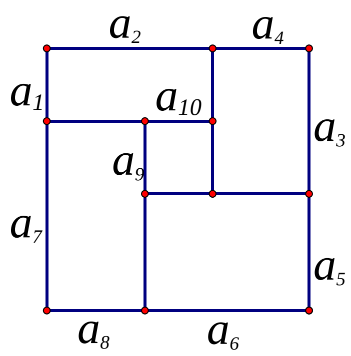
$n=2$的解



證明：由引理1可算出以下表格三

n	數列	可能邊長	扣除邊長為偶數的情形
8	8、9、……、17	28	無
7	7、8、……、16	25、26	25
6	6、7、……、15	23、24	23
5	5、6、……、14	21、22	21
4	4、5、……、13	18、19、20	19
3	3、4、……、12	16、17	17
2	2、3、……、11	14、15	15

表三



圖二十三

由表格三可以得知，當 $n = 8$ 是無解的。

接下來我們依序來討論當 $n = 7$、6、……、2 的情形

① 當 $n = 7$ ，數列為 7、8、……、16 ，邊長為 25

$a_9 + a_{10} = (7 + 8 + \cdots\cdots + 16) - 25 \times 4$

$= 115 - 100 \quad = 15$

所以 $a_9 = 7$、$a_{10} = 8$。

又因為 $a_{10} = 8$ ，且由圖可知 $a_{10} = a_2 - a_8$ ，所以 $a_2 - a_8 = 8$ ，

但 a_2 的最大可能值為 16、a_8 的最小可能值為 9，所以 $a_2 - a_8 \leq 7$，與 $a_2 - a_8 = 8$ 矛盾

所以當 $n = 7$ 時是無解的。

② 當 $n = 6$ ，數列為 6、7、……、15 ，邊長為 23

$a_9 + a_{10} = (6 + 7 + \cdots\cdots + 15) - 23 \times 4$

$= 105 - 92$

$= 13$

所以 $a_9 = 6$、$a_{10} = 7$。

又因為 $a_{10} = 7$ ，且由圖可知 $a_{10} = a_2 - a_8$ ，所以 $a_2 - a_8 = 7$ ，

且 a_2 的最大可能值為 15、a_8 的最小可能值為 8，所以 $a_2 - a_8 \leq 7$， 因此只能 $a_2 =$

15、$a_8 = 8$ ，但又因為邊長為 23 ，$a_4 = 23 - a_2 = 23 - 15 = 8$ ，與 $a_8 = 8$ 重複數字，

所以當 $n = 6$ 時也是無解的。

③ 當 $n = 5$ ，數列為 5、6、……、14 ，邊長為 21

$a_9 + a_{10} = (5 + 6 + \cdots\cdots + 14) - 21\times4$

$= 95 - 84$

$= 11$

所以 $a_9 = 6$、$a_{10} = 5$。

邊長為 21，$a_1 + a_5 = 21 - 5 = 16$，$a_1 \neq 8$(會重複) $\therefore a_8 = 7$，$a_4 = 9$。

$a_1 + a_5 = 16$，剩下合的只有 $a_1 = 8$，則 $a_5 = 7$，與 $a_8 = 7$重複，

所以當 $n = 5$ 時也是無解的。

④ 當 $n = 4$ ，數列為 4、5、……、13 ，邊長為 19

$a_9 + a_{10} = (4 + 5 + \cdots\cdots + 13) - 19\times4$

$= 85 - 76$

$= 9$

所以 $a_9 = 5$、$a_{10} = 4$。

邊長為 19 ，$a_1 + a_5 = 19 - 5 = 14$，$a_1 \neq 7$(會重複)，所以 $a_8 = 7$，$a_4 = 8$。

$a_1 + a_5 = 14$，剩下合的只有 $a_1 = 6$，則 $a_5 = 8$，與 $a_4 = 8$重複，

所以當 $n = 4$ 時也是無解的。

⑤ 當 $n = 3$ ，數列為 3、4、……、12 ，邊長為 17

$a_9 + a_{10} = (3 + 4 + \cdots\cdots + 12) - 17\times4$

$= 75 - 68$

$= 7$

所以 $a_9 = 3$、$a_{10} = 4$。

$a_4 + a_8 = 17 - 4 = 13$

$13 = 6 + 7 = 8 + 5 = 9 + 4(4\text{重複}) = 10 + 3(3\text{重複})$

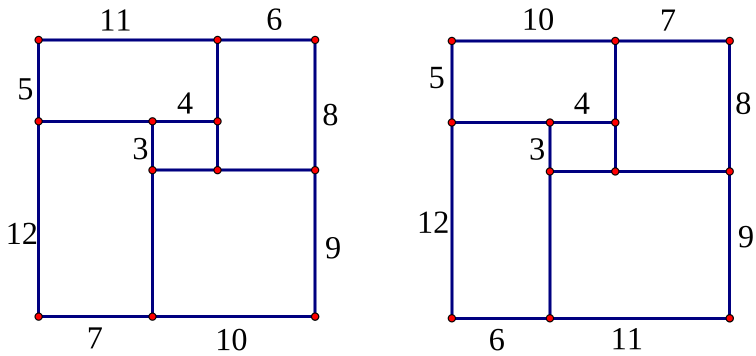
$a_1 + a_5 = 17 - 3 = 14$

$14 = 7 + 7$ (7重複)$= 8 + 6$(重複 8 or 6) $= 9 + 5 = 10 + 4$(4重複) $= 11 + 3$(3重複)

當$a_4 + a_8 = 8 + 5$ 時，$9 + 5$ 重複，不合

當$a_4 + a_8 = 6 + 7$ 時，答案可為 $a_9 = 3$，$a_{10} = 4$，$a_4 + a_8 = 6 + 7$，$a_1 + a_5 = 9 + 5$

解的圖形：



圖二十四

⑥ 當 $n = 2$ ，數列為 2、3、……、11 ，邊長為 15

$a_9 + a_{10} = (2 + 3 + \cdots\cdots + 11) - 15\times4$

$= 65 - 60$

$= 5$

所以 $a_9 = 2$、$a_{10} = 3$。

$a_4 + a_8 = 15 - 3 = 12$

$12 = 6 + 6$(6重複) $= 7 + 5 = 8 + 4 = 9 + 3$(3 重複) $= 10 + 2$(2重複)

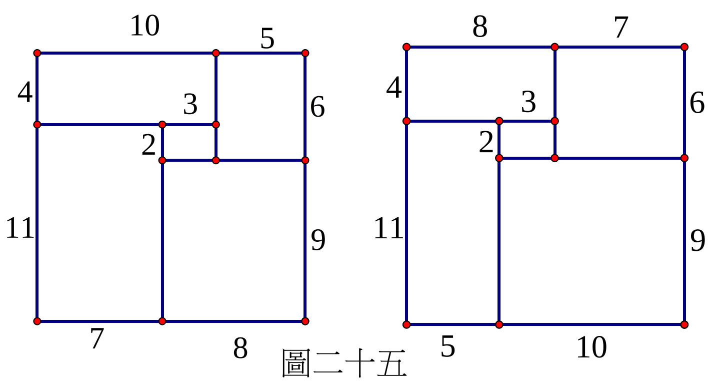
$a_1 + a_5 = 15 - 2 = 13$

$13 = 7 + 6 = 8 + 5$(重複 8 or 5) $= 9 + 4 = 10 + 3$(3重複) $= 11 + 2$(2重複)

當 $a_4 + a_8 = 8 + 4$ 時，可為 $a_1 + a_5 = 7 + 6$，但 $a_3 = 2 + 6 = 8$，8 重複，不合

當 $a_4 + a_8 = 7 + 5$ 時，答案可為 $a_9 = 2$，$a_{10} = 3$，$a_4 + a_8 = 7 + 5$，$a_1 + a_5 = 9 + 4$

解的圖形：



圖二十五

■

(2) 公差為 d，且 d 為正實數。

假設此等差數列為 n、$n+d$、$n+2d$、⋯⋯、$n+9d$ 。

引理 5：若矩形長寬為 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n+d}$、$\boldsymbol{n+2d}$、⋯⋯、$\boldsymbol{n+9d}$ 來拼正方形，只有在 $\boldsymbol{n=kd}$ ，$(\boldsymbol{k>0})$ 時，才有可能有解。

證明：

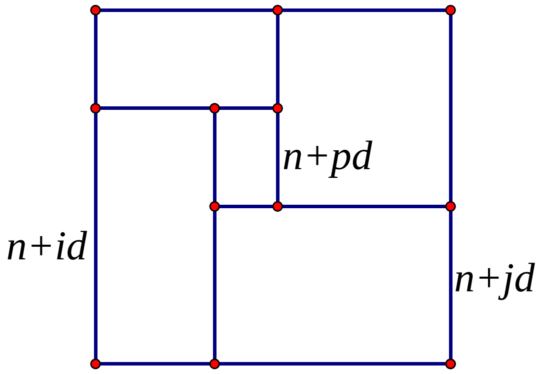
因為數列為 $n+md$，$m=0$、1、⋯⋯、9 ，所以如圖二十六所示，假設所拼成的正方形其中三段為 $n+id$、$n+jd$、$n+pd$ ，且 $i\neq j\neq p$ 。因此由圖形可以知道

$$(n+id)-(n+jd)=n+pd$$

$$(i-j)\times d=n+p\times d$$

$$(i-j-p)\times d=n$$

$$k\times d=n$$



圖二十六

■

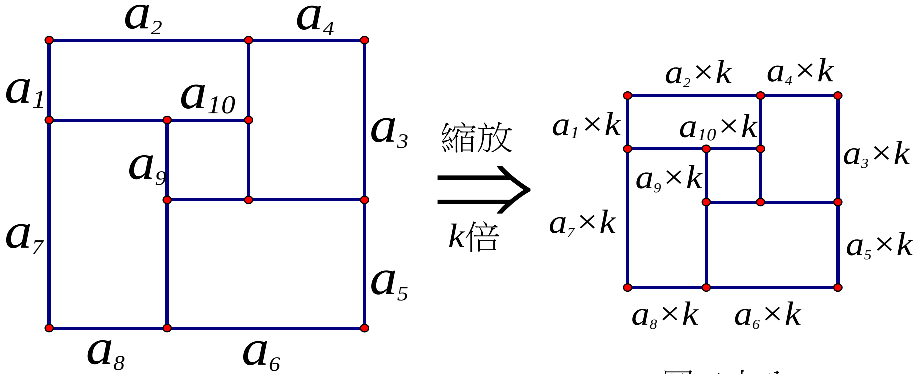
所以只有在 $n=kd$ 時，才有可能由 n、$n+d$、$n+2d$、⋯⋯、$n+9d$ 來拼出正方形。

引理 6：若矩形長寬為 $\boldsymbol{a_1}$、$\boldsymbol{a_2}$、⋯⋯、$\boldsymbol{a_{10}}$ 拼正方形是有解的 則用矩形長寬為 $\boldsymbol{a_1\times k}$、$\boldsymbol{a_2\times k}$、⋯⋯、$\boldsymbol{a_{10}\times k}$，$\boldsymbol{k>0}$ 拼正方形亦是有解的；

反之，矩形長寬為 $\boldsymbol{a_1}$、$\boldsymbol{a_2}$、⋯⋯、$\boldsymbol{a_{10}}$ 拼正方形是無解的 則用矩形長寬為 $\boldsymbol{a_1\times k}$、$\boldsymbol{a_2\times k}$、⋯⋯、$\boldsymbol{a_{10}\times k}$，$\boldsymbol{k>0}$ 拼正方形亦是無解的。

說明：

假設矩形長寬為 $<a_1$、a_2、⋯⋯、$a_{10}>$ 拼正方形的解如下圖二十七所示，則由圖二十七縮放 k 倍成圖二十八的圖形則會是矩形長寬為 $<a_1\times k$、$a_2\times k$、⋯⋯、$a_{10}\times k>$ 拼正方形的解。



圖二十七

圖二十八

■

定理 4：矩形長寬為 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n+d}$、$\boldsymbol{n+2d}$、……、$\boldsymbol{n+9d}$ 拼正方形時，當 $\boldsymbol{n \le 8d}$ 時才有解。

證明：

因為數列為 n、$n+d$、$n+2d$、……、$n+9d$ ，其中最大數 $n+9d$ 必在正方形的外圍，且會如圖二十九所示： $n+9d=(n+id)+(n+jd)$，$0<i<9$、$0<j<9$

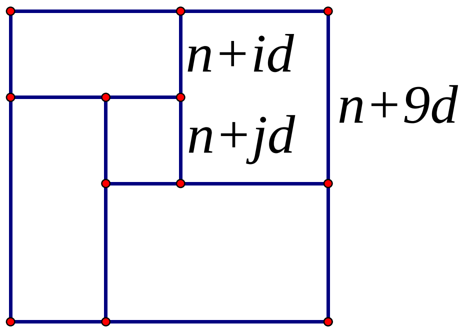
又

$n+9d=(n+id)+(n+jd) \ge n+(n+d)$

$n+9d \ge 2n+d$

$8d \ge n$

因此，當 $n \le 8d$ 時才會有解。 ■



圖二十九

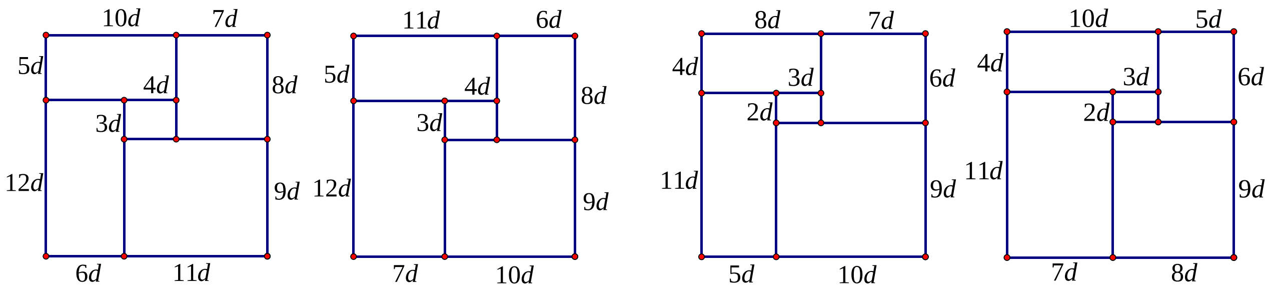
假設數列為 n、$n+d$、$n+2d$、……、$n+9d$ 來拼正方形，由引理 6 和定理 4 可知，當 $n=8d$、$7d$、$6d$、$5d$、$4d$、$3d$、$2d$、d ，才有可能會有解。

定理 5：矩形長寬為 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n+d}$、$\boldsymbol{n+2d}$、……、$\boldsymbol{n+9d}$ 拼正方形時，

(1) 當 $\boldsymbol{n=8d}$、$\boldsymbol{7d}$、$\boldsymbol{6d}$、$\boldsymbol{5d}$、$\boldsymbol{4d}$ 時都是無解的。

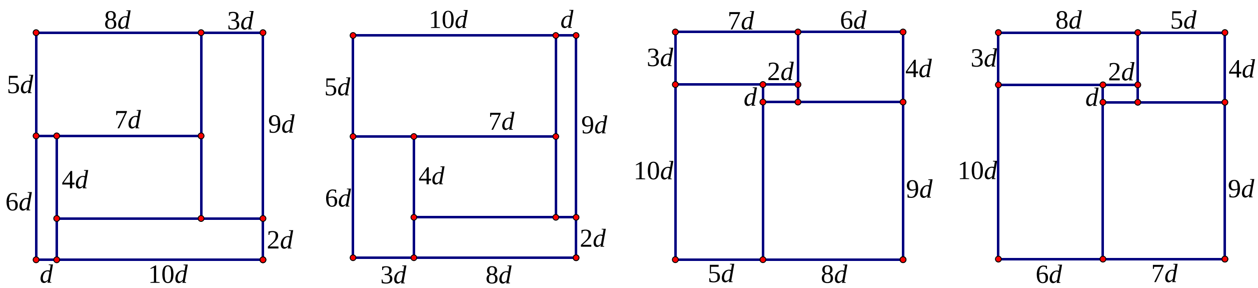
(2) 當 $\boldsymbol{n=3d}$、$\boldsymbol{2d}$、$\boldsymbol{d}$ 時，解的情形如下圖。

$n=3d$ 的解　　　　$n=2d$ 的解



圖三十

$n=d$ 的解



圖三十一

證明：

① 當 $n=8d$，數列為 $8d$、$9d$、⋯⋯、$17d$

由引理 6 可知，因為用 8、9、⋯⋯、17 來拼正方形是無解的，所以可以得知用 $8d$、$9d$、⋯⋯、$17d$ 來拼正方形亦是無解的。

同理，可以得知當 $n=7d$、$6d$、$5d$、$4d$ 時都是無解的，

② 當 $n=3d$、$2d$、d 時，由引理 6 可知，因為用 3、4、⋯⋯、12 來拼正方形、用 2、3、⋯⋯、11 來拼正方形、用 1、2、⋯⋯、10 來拼正方形都是有解的，因此$n=3d$、$2d$、d 的解都是 $n=3$、2、1 的解乘以 d 倍。 ■

2. 矩形長寬為「等比數列」的情形。

在討論完等差數列的情形後，我們接下來繼續討論等比數列的情形。一般情況下，假設等比數列為 a、ar、ar^2、⋯⋯、ar^9，其中 $r>1$ 。

定理 5：當矩形長寬為等比數列1、r、r^2、⋯⋯、r^9 **來拼正方形是無解的。**

證明：

我們由引理 6 可以知道，1、r、r^2、⋯⋯、r^9，$r>1$ 解的情形和a、ar、ar^2、⋯⋯、ar^9，$r>1$ 解的情形相同，而且 1、r、r^2、⋯⋯、r^9 ，$r>1$ 解的情形亦和 1、$\frac{1}{\mathrm{r}}$、$\frac{1}{r^2}$、⋯⋯、$\frac{1}{r^9}$ ，$r>1$ 解的情形相同，因此，等比數列我們只需要討論1、r、r^2、⋯⋯、r^9，$r>1$ 的情況即可。

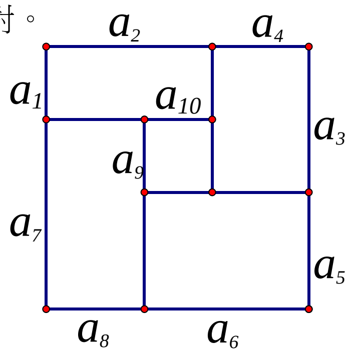
由右圖可以看出，若數列要有解，則以下四個恆等式必需全對。

$$a_3=a_1+a_9$$

$$a_7=a_5+a_9$$

$$a_2=a_8+a_{10}$$

$$a_6=a_4+a_{10}$$



圖三十二

有了以上的發現，我們就開始來討論矩形長寬為 1、r、r^2、⋯⋯、r^9，$r>1$ 的情形。

因為一定要有一個式子需滿足 $1+r^a=r^b$，其中 a、b 為正整數，且 $1\le a<b\le 9$，因此為了找到滿足上述的四個式子一起成立的情況，我們去嘗試了當 $f(x)=r^b-r^a-1$，其中 a、b 為正整數，且 $1\le a<b\le 9$ 時，能不能因式分解。我們利用了網路上提供的因式分解產生器一個一個去嘗試，發現只有在 $a=4$、$b=5$ 時，$f(x)$ 才能因式分解，即$f(x)=r^5-r^4-1=(r^2-r+1)(r^3-r-1)$。

因此

$$r^5-r^4-1=0$$

$$(r^2-r+1)(r^3-r-1)=0$$

又因為 r^2-r+1 恆正，所以 $r^5-r^4-1=0 \Leftrightarrow r^3-r-1=0$

在確認了 $r^5-r^4-1=0 \Leftrightarrow r^3-r-1=0$ 這件事情之後，我們接下來分兩部分去討論 $1+r^a=r^b$ 的情況：

(1) $a=4$、$b=5$

已知 $1+r^4=r^5$ 成立時，$1+r=r^3$ 亦成立，且由引理 6 知，$1+r^4=r^5$ 成立時，$r+r^5=r^6$、$r^2+r^6=r^7$、$r^3+r^7=r^8$、$r^4+r^8=r^9$ 也會成立；$1+r=r^3$ 成立時，$r+r^2=r^4$、$r^2+r^3=r^5$、$r^3+r^4=r^6$、$r^4+r^5=r^7$、$r^5+r^6=r^8$、$r^6+r^7=r^9$。

因此接下來要來確認下面所有式子中，會不會有四個式子在圖形中同時成立

$1+r^4=r^5$	$1+r=r^3$
$r+r^5=r^6$	$r+r^2=r^4$
$r^2+r^6=r^7$	$r^2+r^3=r^5$
$r^3+r^7=r^8$	$r^3+r^4=r^6$
$r^4+r^8=r^9$	$r^4+r^5=r^7$
	$r^5+r^6=r^8$
	$r^6+r^7=r^9$

若 $1+r^4=r^5$ 成立，則 $r+r^5=r^6$、$r+r^2=r^4$、$r^2+r^3=r^5$、$r^4+r^5=r^7$、$r^5+r^6=r^8$ 皆不會成立；且若 $1+r=r^3$ 成立，則 $r^3+r^7=r^8$、$r^3+r^4=r^6$ 皆不會成

立；若 $r^6+r^7=r^9$ 成立，則 $r^2+r^6=r^7$、$r^4+r^8=r^9$ 不會成立。因此在這三個式子滿足圖形的情況下是無解的。

$1+r^4=r^5$	✔	$1+r=r^3$	✔
$r+r^5=r^6$	✘	$r+r^2=r^4$	✘
$r^2+r^6=r^7$	✘	$r^2+r^3=r^5$	✘
$r^3+r^7=r^8$	✘	$r^3+r^4=r^6$	✘
$r^4+r^8=r^9$	✘	$r^4+r^5=r^7$	✘
		$r^5+r^6=r^8$	✘
		$r^6+r^7=r^9$	✔

仿照以上作法，一組一組去嘗試，最終確認在這一種情況下是無解的。

(2) $a=4$、$b=5$ 之外的所有情形

因此情形太多種了，這裡只列出 $a=1$、$b=2$ 這一種情形來說明，其他就不一一列出討論，因為 $a=1$、$b=2$ 的情形是不可因此分解的，因此 $1+r=r^2$ 成立時，只有$r+r^2=r^3$、$r^2+r^3=r^4$、$r^3+r^4=r^5$、$r^4+r^5=r^6$、$r^5+r^6=r^7$、$r^6+r^7=r^8$、$r^7+r^8=r^9$ 這幾種會成立，因此一樣來討論這幾種中是否有四個會同時在圖形上成立？

若 $1+r=r^2$ 成立，則 $r^2+r^3=r^4$、$r^2+r^3=r^4$ 不會成立；若 $r^3+r^4=r^5$ 成立，則 $r^4+r^5=r^6$、$r^5+r^6=r^7$ 不會成立；若 $r^6+r^7=r^8$ 成立，則 $r^7+r^8=r^9$ 不會成立。因此在這種情況之下是無解的。

$1+r=r^2$	✔	$r^4+r^5=r^6$	✘
$r+r^2=r^3$	✘	$r^5+r^6=r^7$	✘
$r^2+r^3=r^4$	✘	$r^6+r^7=r^8$	✔
$r^3+r^4=r^5$	✔	$r^7+r^8=r^9$	✘

在 $a=1$、$b=2$ 的其它情況下，我們一組一組的去嘗試的結果，發現都是無解的。同理，在 a、b 為其它數字的情況下，我們去嘗試出來的結果，也發現它們都是無解的。

因此，我們證明了當矩形長寬為等比數列拼正方形的情形是無解的。 ■

3. 矩形長寬為「費氏數列」的情形。

在處理完「等差數列」和「等比數列」的情況後，我們最後來討論國中時期第三個常見的數列：費氏數列。

定理 6：當矩形長寬為費氏數列 $<\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a+b}$、$\boldsymbol{a+2b}$、$\boldsymbol{2a+3b}$、$\boldsymbol{3a+5b}$、$\boldsymbol{5a+8b}$、$\boldsymbol{8a+13b}$、$\boldsymbol{13a+21b}$、$\boldsymbol{21a+34b}$，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{>0>}$ 來拼正方形是無解的。

證明：

因為此數列是一個遞增數列，最大數為 $21a+34b$，因此 $21a+34b$ 必須放在正方形的外圍。又因為在 a、$b>0$ 的情況下，只有 $8a+13b$ 和 $13a+21b$ 相加才會等於 $21a+34b$，其餘任兩數相加若等於 $21a+34b$，所算出來的 a、b 必為一正一負，與一開始假設不符。

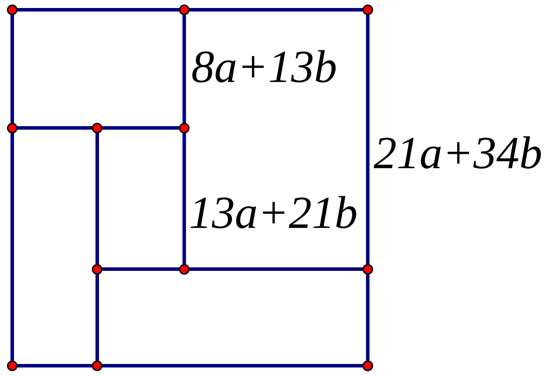
例：若 $(5a+8b)+(13a+21b)=21a+34b$

$18a+29b=21a+34b$

$-3a=5b$

a、b 為一正一負，與一開始假設不符

因此，$21a+34b$ 只有 $(8a+13b)+(13a+21b)$ 這一種可能，即如下圖三十三所示的情形。但是由圖形可以看出，正方形邊長必大於 $21a+34b$，但是剩餘數字中，在 a、b >0 的情況下，是找不到兩個數字和會大於 $21a+34b$，所以可以推出，矩形長寬為費氏數列來拼正方形的情況是無解的。



圖三十三

■

三、 用一塊、二塊、三塊、四塊矩形拼正方形的情形

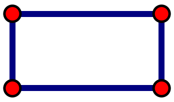
在討論完用五塊矩形拼正方形的情形之後，我們接下來去思考，如果把矩形的個數增加或是減少，又會有什麼結論產生呢？

定理 7：當矩形個數為一塊、二塊、三塊、四塊矩形拼正方形的情形是無圖形的。

證明：

1. 用一塊矩形且長寬為 1、2 拼正方形

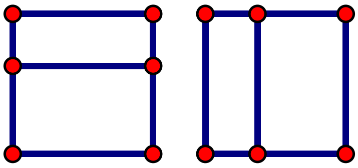
   顯而易見，長、寬為 1 和 2 的矩形，並不是正方形。



圖三十四

2. 用二塊矩形且長寬為 1、2、3、4 拼正方形

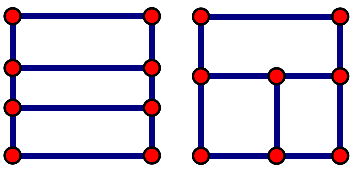
   把正方形切割為兩塊矩形，圖形只有圖三十五這兩種情形，但此兩種圖形中，兩塊矩形都有一共用邊，因此這種情形是沒有圖形的。



圖三十五

3. 用三塊矩形且長寬為 1、2、3、4、5、6 拼正方形

   把正方形切割為三塊矩形，圖形只有圖三十六這兩種情形，但此兩種圖形中，兩塊矩形會有一共用邊，因此這種情形也是沒有圖形的。

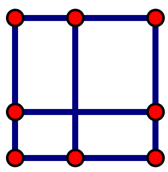


圖三十六

4. 用四塊矩形且長寬為 1、2、……、7、8 拼正方形

   (1) 切兩條直線

   把正方形切割成四塊矩形時，至少需要切兩刀，如圖三十七所示，兩直線必垂直，由圖可知，矩形有共用邊，所以此種畫法不可能。



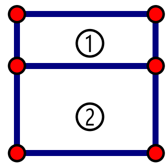
圖三十七

(2) 切三條直線

因為切三條直線以上的圖形會越來越複雜，因此我們討論所有把直線分成「一切到底和不切到底」兩種情形。

① 第一條直線一切到底，如圖三十八

因為第一條直線一切到底，分出區塊①的矩形，所以在區塊②還需再分割成 3 塊矩形，但由「用三塊矩形拼正方形」得知，無法在區塊②中分割成 3 塊符合題意的矩形，因此此種畫法不可能。



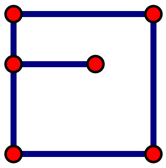
圖三十八

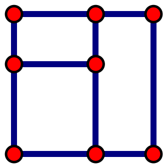
② 第一條直線不切到底，如圖三十九

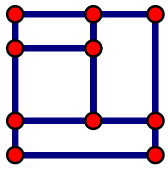
I. 第二條直線一切到底，如圖四十，且由「用二塊矩形拼正方形」，第三條直線不管如何切，都不能符合題意。

II. 第二條直線不切到底，第三條直線必切到底，如圖四十一。

這兩種情形中，兩塊矩形會有一共用邊，所以此種畫法不可能。


圖三十九


圖四十


圖四十一

因此，當矩形個數為「一塊、二塊、三塊、四塊矩形拼正方形」的情形皆是無圖形的。 ■

四、 用六塊矩形拼正方形的情形

在確認減少矩形個數的情況都是無圖形後，那增加矩形個數到六塊，又會是怎麼樣的情形呢？

定理 8：當矩形個數為六塊矩形拼正方形的情形是無圖形的。

證明：

我們一開始來討論用六塊矩形拼正方形的結構，討論情形如五塊的情形，且利用引理 3 可以知道，在六塊的情形下，不可能「切一刀到底」的，即每一邊至少要有兩塊以上矩形所拼成。我們這裡使用了和討論五塊結構時一樣的方法。

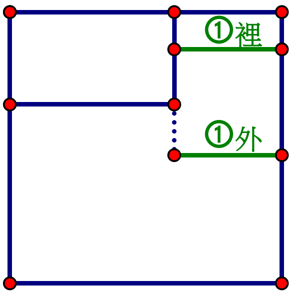
定義：

①　：在第一條橫線裡/外(如圖四十二)

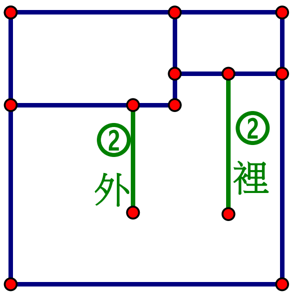
②　：在①的裡/外(如圖四十三)

③　：在②的裡/外(如圖四十四)

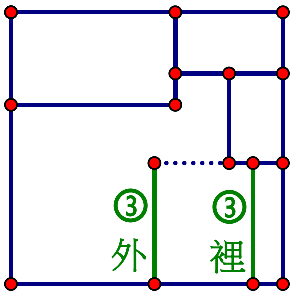
都沒有相等的線段，因為相等的線段必重複。



圖四十二



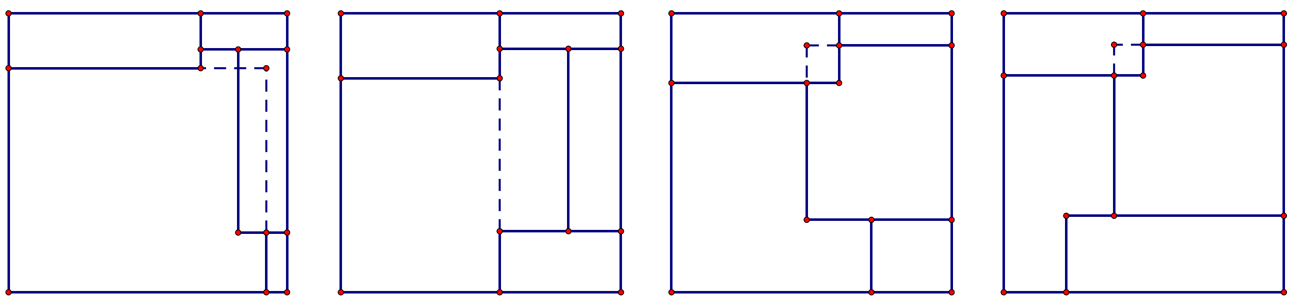
圖四十三



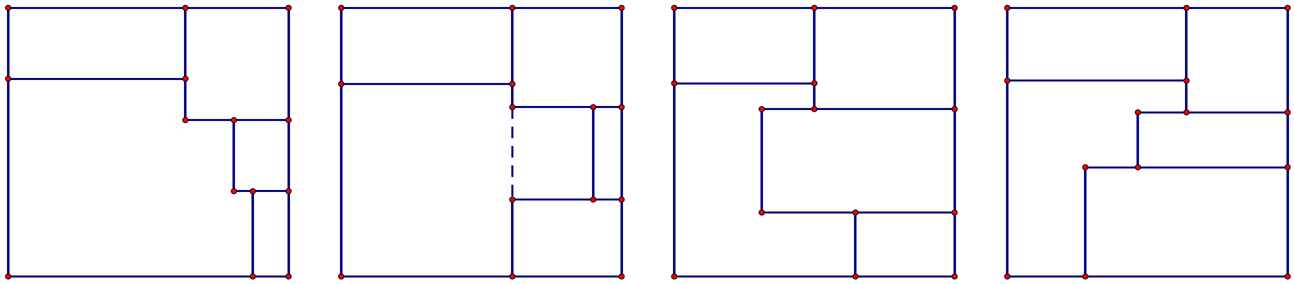
圖四十四

	①	②	③	合不合	不合的原因
1.	裡	裡	裡	不合	有三塊不為矩形，且有線段重複
2.	裡	裡	外	不合	有線段重複
3.	裡	外	裡	不合	有兩塊不為矩形，且有線段重複
4.	裡	外	外	不合	有兩塊不為矩形，且有線段重複
5.	外	裡	裡	不合	無法再分割成兩塊矩形
6.	外	裡	外	不合	有線段重複
7.	外	外	裡	不合	無法再分割成兩塊矩形
8.	外	外	外	不合	無法再分割成兩塊矩形

表四



1.　2.　3.　4.



5. 6. 7. 8.

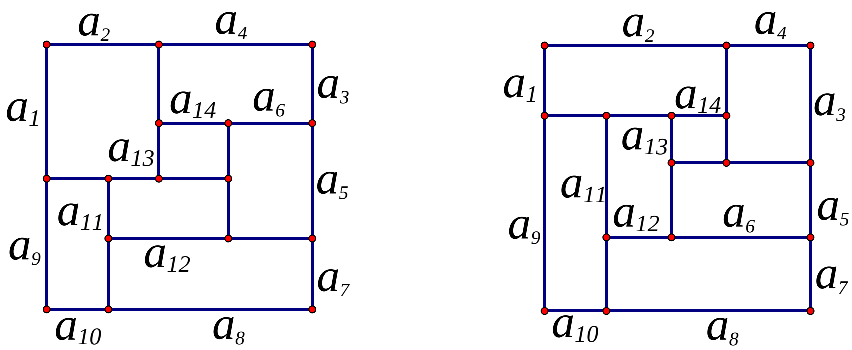
圖四十五

由以上可以得到，用六塊矩形拼正方形的情形是沒有圖形的。 ■

五、 用七、八塊矩形拼正方形的情形

在討論完結構為六塊是沒有圖形之後，那我們就在想是否只有在結構為五塊時才有圖形，因此我們用了上述相同的手法去找七塊和八塊的圖形。

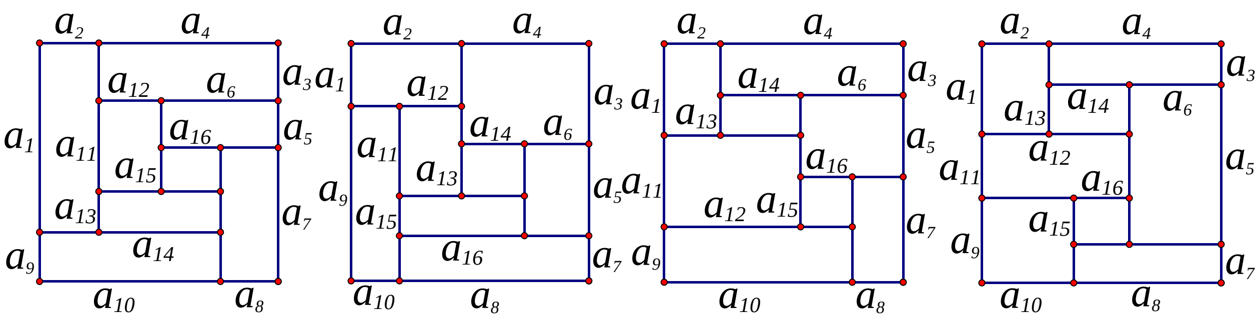
1. 用七塊矩形拼正方形的圖形



圖四十六

用七塊矩形拼正方形的圖形我們找出來圖四十六的兩種情形。

2. 用八塊矩形拼正方形的圖形

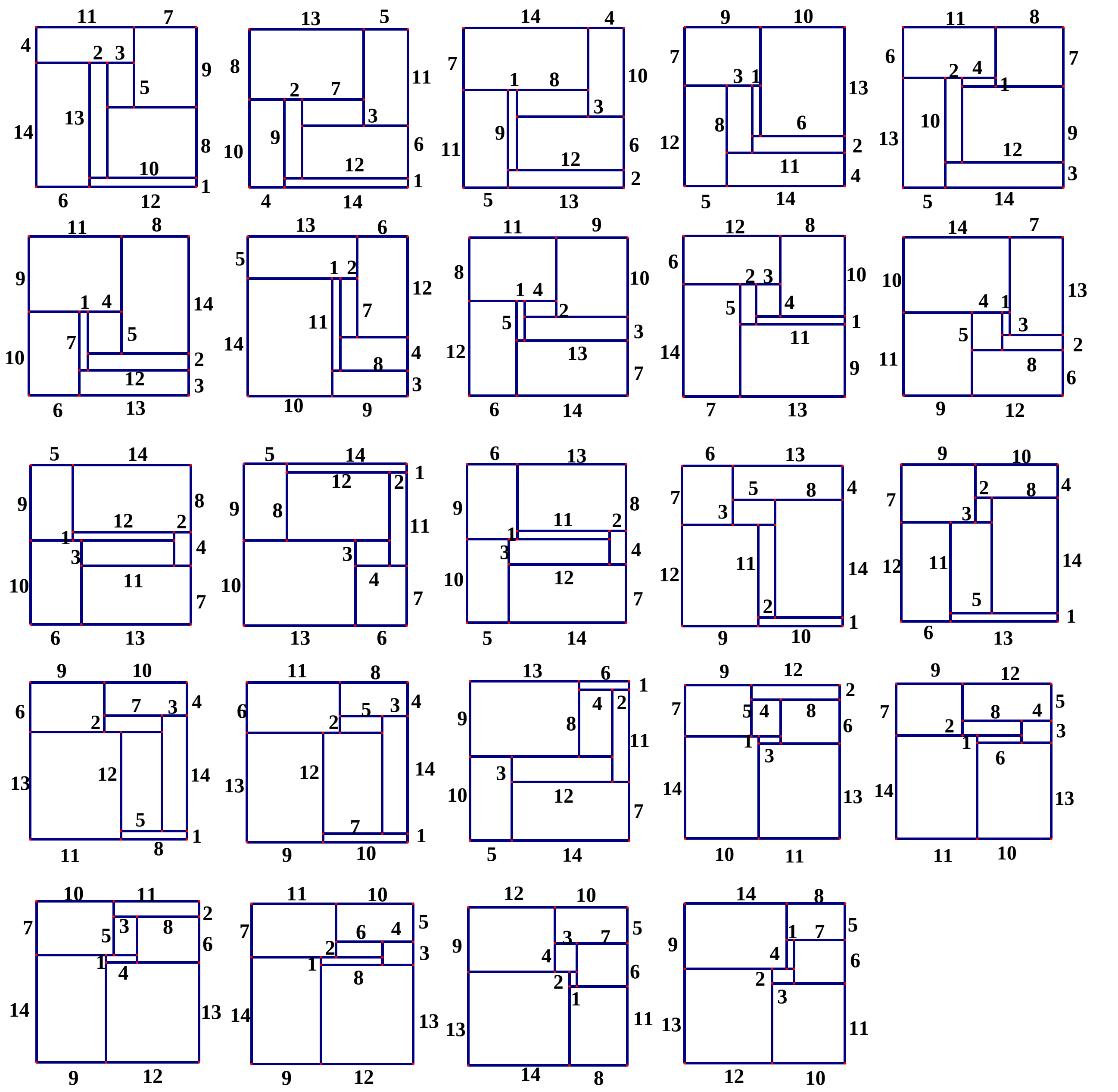


圖四十七

用八塊矩形拼正方形的圖形我們找出來圖四十七的四種情形。

3. 七、八塊矩形拼正方形的解

在找出了七、八塊矩形拼正方形是有圖形的之後，我們一樣要仿照五塊的方法先來找出矩形長、寬為 1、2、3、……、14 (七塊)和 1、2、3、……、16 (八塊)的答案，但是我們在找的過程中，發現變數太多了，導致於我們尚未找到好的方法來找出七塊和八塊的所有解，因此我們的指導老師寫了一個程式來幫我們找出了七塊和八塊的所有解，以下是程式跑出來七塊矩形拼正方形的所有解。



八塊矩形拼正方形的解程式也有跑出來，但是因為總共有 130 組解，因此這裡就不特別放上來了。

伍、 結論與未來展望

由上述研究我們得到下列結論：

一、五塊矩形拼正方形

1. 矩形長寬為等差數列：

   (1) 數列為 1、2、……、10 時有四組解。

   (2) 數列為 2、3、……、11 時有二組解。

   (3) 數列為 3、4、……、12 時有二組解。

   (4) 其餘等差數列只有是以上三組數列乘以 k 倍時才會有解。

2. 矩形長寬為等比數列是無解的。

3. 矩形長寬為費氏數列是無解的。

二、1~4 塊矩形拼正方形均是無圖形的。

三、6 塊矩形拼正方形是無圖形的。

四、6 塊矩形拼正方形是無圖形的。

五、7 塊和 8 塊矩形拼正方形的解分別有 24 組解和 130 組。

未來展望：

以下三點都是我們想更加深入探討的內容

1. 我們找出當結構為五塊時，矩形長寬成等差、等比、費氏數列的情形，那如果矩形長寬為任意數列時會是怎樣的情形？能找出規律亦或是沒有規律。

2. 我們找到了結構為五塊、七塊、八塊時的圖形，發現八塊時的圖形共有 130 組解，我們或許有機會能夠利用這些解來設計出一種益智遊戲。

3. 我們希望未來能夠在等差數列的條件下，推展到矩形長寬 n 塊的一般式，讓報告更加完整。

【評語】030401

探討以矩形來拼出正方形，在限制拼接的矩形邊長必須為連續正整數的前提下，拼接的各矩形的邊長可能組合問題。針對組合正方形的矩形個數為 5 個時，給出了完整的結果。對於組合正方形的矩形個數為 2 到 8 個的情形，也作了一些討論。本作品討論用矩形來分割正方形，但多了一個限制：所使用的矩形的邊長必須為連續整數（或是滿足特定規則的整數），問題跟正方形分割正方形的問題頗為不同，但仍然是一個有趣的問題。作者們確實給出了一些分割存在的條件，也說明了如果矩形個數恰為 5 個時，可能的解答有哪些，但有一些說明稍嫌簡略了些，有部分的討論又顯的過於繁複了。針對不同的分割個數，是否能給出更一般化的結果（對於夠大的分割數，能否保證一定可以構造滿足條件的解）？如果可以在這方面給出一些討論會更好。作者有系統地討論矩形切割的問題，研究精神與數學的思維值得肯定，可惜題目本身限制太多，發展性不大。

作品海報

壹、研究動機

有一次在上數學專題課時，老師畫了如下的圖形，說明這是由五塊長寬皆不同的矩形所拼成的正方形，並詢問我們在五塊矩形長寬為 1、2、……、10 時，是否有其他情形可以拼成正方形？

備註：若圖形經旋轉、鏡射後與另一圖形相同，則視為同一種圖形。

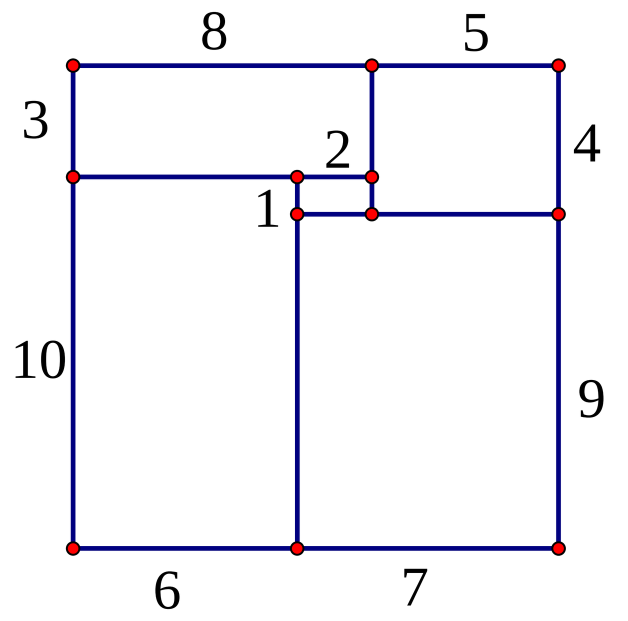
在找出其中一組解之後，我們除了繼續尋找是否還有其他解之外，也在思考著以下問題：

一. 用五塊長寬為 1、2、……、10 的矩形所拼成的正方形結構(圖形)一定是這樣嗎？

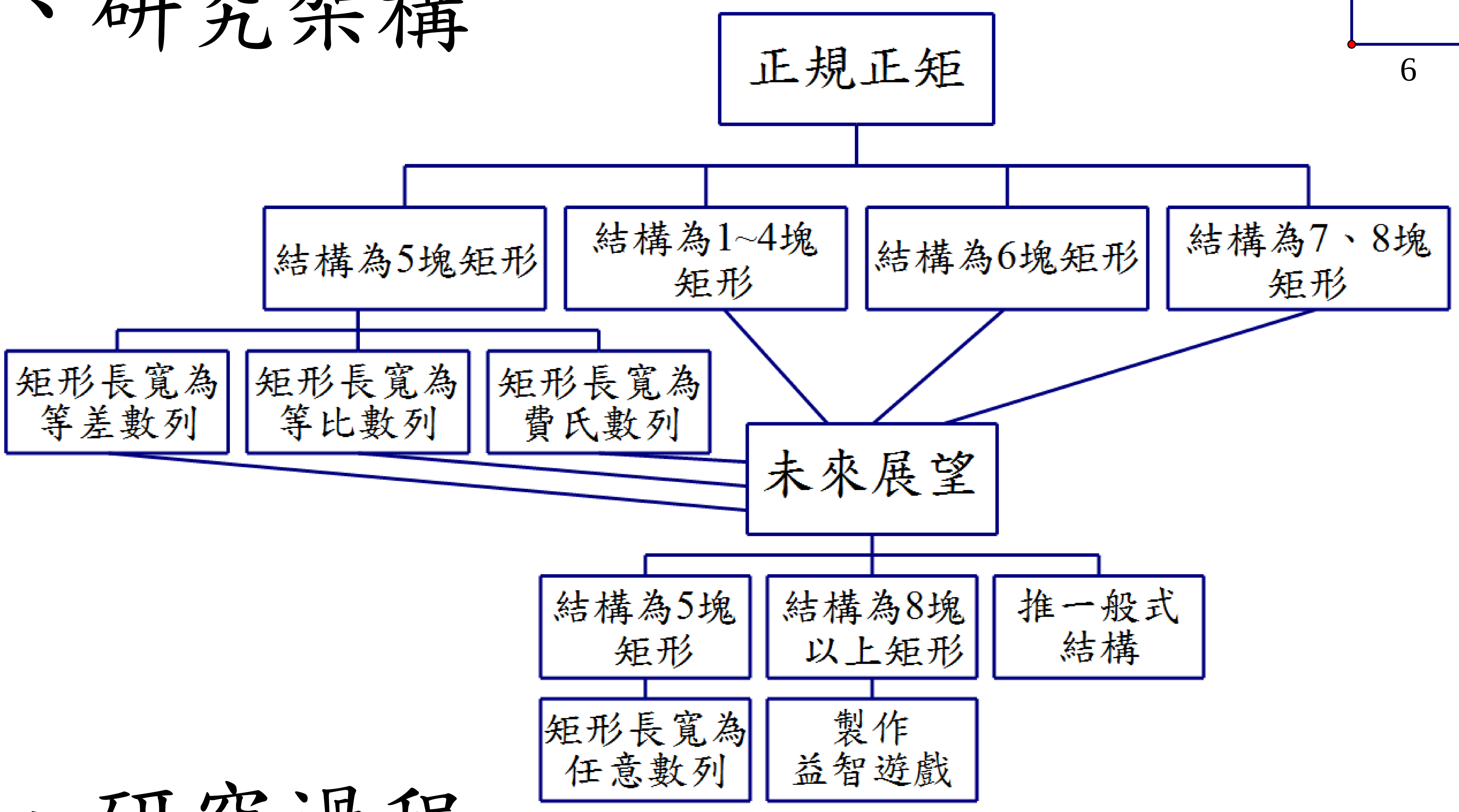
二. 拼出來的正方形邊長只能是 13 嗎？

三. 有沒有系統化的解法可以找出答案？

為了解決這些問題，我們開啟了這次的研究。



貳、研究架構



參、研究過程

一. 原始題目

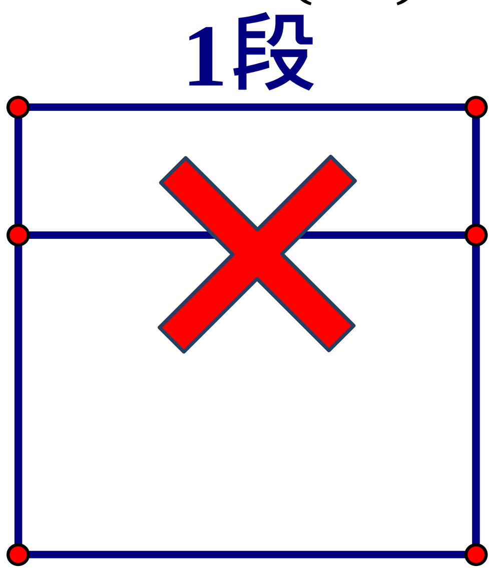
引理：已知 a_1、a_2、a_3、a_4、 … 、a_{2n} 為正整數，且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < a_{2n}$，則

$a_1 \cdot a_{2n} + a_2 \cdot a_{2n-1} + \cdots + a_n \cdot a_{n+1} \le$ 任意兩數乘積之和 $\le a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 + \cdots + a_{2n-1} \cdot a_{2n}$

引理：用 $1 \sim 2n$ 當矩形的長寬來拼正方形，當 $n \ge 5$ 時，所有矩形面積和最小值必大於 $(2n)^2$，

即 $1 \times 2n + 2 \times (2n-1) + 3 \times (2n-2) + \cdots + n(n+1) > (2n)^2$，$(n \ge 5)$

由引理可知五塊矩形以上時，不可能有如右圖的情形。



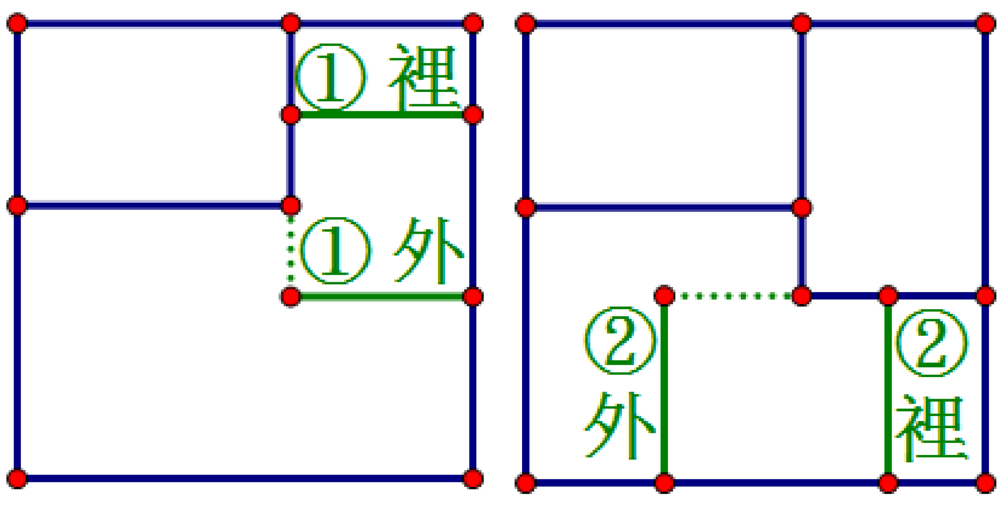
1. 確認結構唯一

定義：

①：在第一條橫線裡/外

②：在①的裡/外

都沒有相等的線段，因為相等的線段必重複



2. 求解

$a_9 + a_{10} = 55 -$ 正方形邊長 $\times 4$

(1) 正方形邊長為 11：

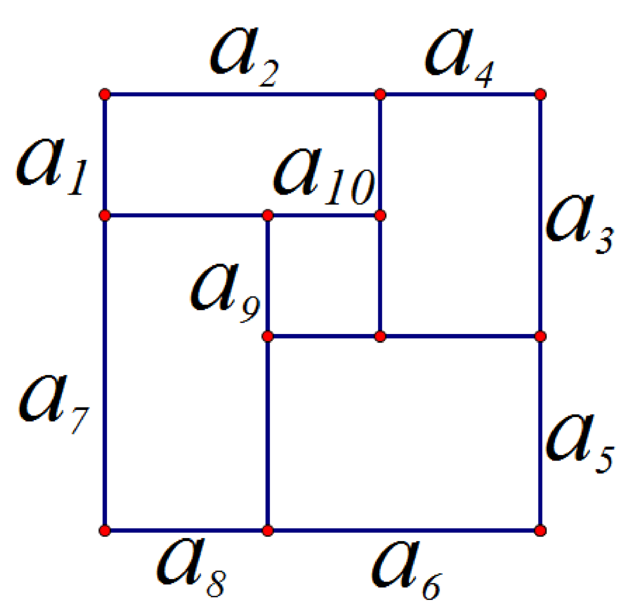
$a_9 + a_{10} = 55 - 11 \times 4 = 11$

$11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$

當 $a_9 = 4$，$a_{10} = 7$

$a_4 + a_8 = 11 - 7 = 4 = 1 + 3$

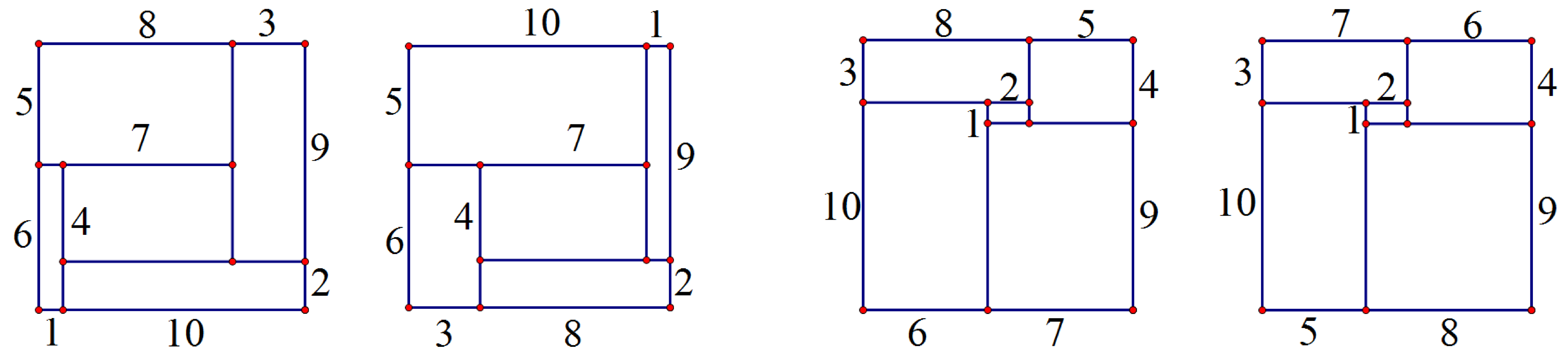
$a_1 + a_5 = 11 - 4 = 7 = 2 + 5$



正方形邊長為 11 時，只有 $a_9 = 4$，$a_{10} = 7$，$a_4 + a_8 = 1 + 3$，$a_1 + a_5 = 2 + 5$ 的情形。

(2) 正方形邊長為 12 時，無解。

(3) 正方形邊長為 13 時，只有 $a_9 = 1$，$a_{10} = 2$，$a_4 + a_8 = 5 + 6$，$a_1 + a_5 = 3 + 9$ 的情形。



二. 矩形長、寬為等差、等比或費氏數列

1. 矩形長寬為「等差數列」的情形

(1)公差為 1

假設此等差數列為 n、$n+1$、$n+2$、……、$n+9$， n 為正整數。

定理：

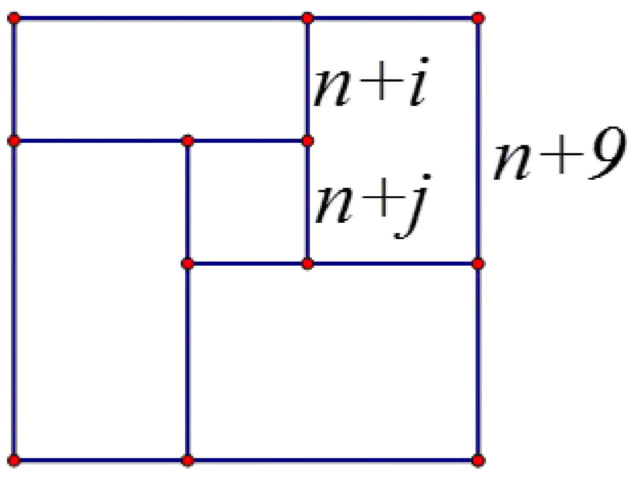
① 用五塊矩形長寬為 n、$n+1$、$n+2$、……、$n+9$ 來拼正方形，當 $n=1$ 時有四組解。

② 用五塊矩形長寬為 n、$n+1$、$n+2$、……、$n+9$ 來拼正方形，當 $n\geq 9$ 時是無解的。

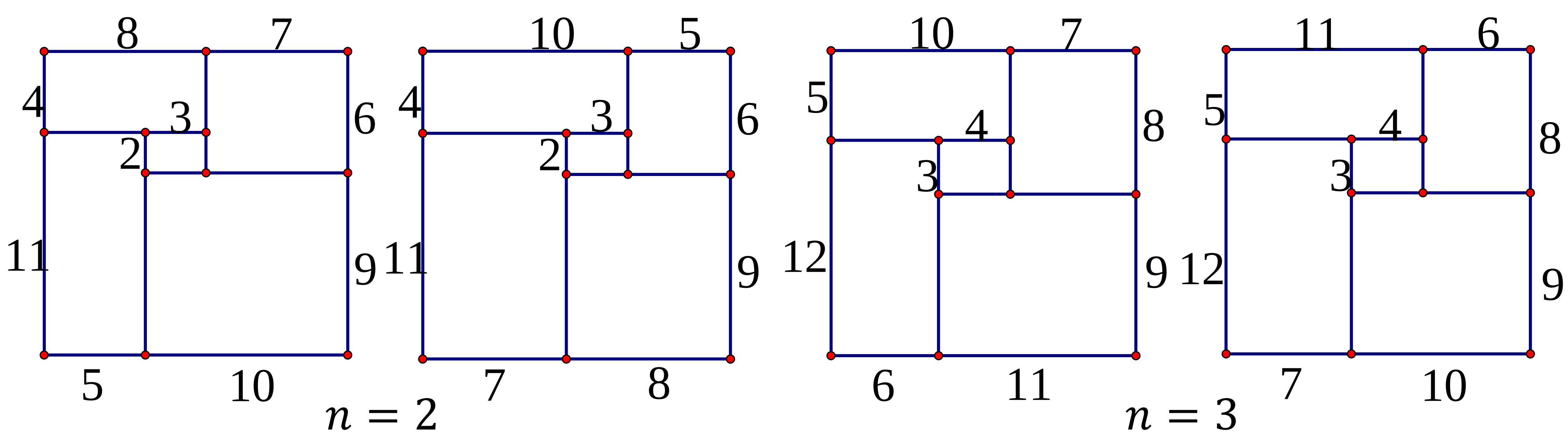
③ 用五塊矩形長寬為 n、$n+1$、$n+2$、……、$n+9$ 來拼正方形，

Ⅰ. 當 $n=8$、7、6、5、4 時都是無解的。

Ⅱ. 當 $n=3$、2 時，分別有以下兩組解。



$n+9=(n+i)+(n+j)$
$\geq n+(n+1)$

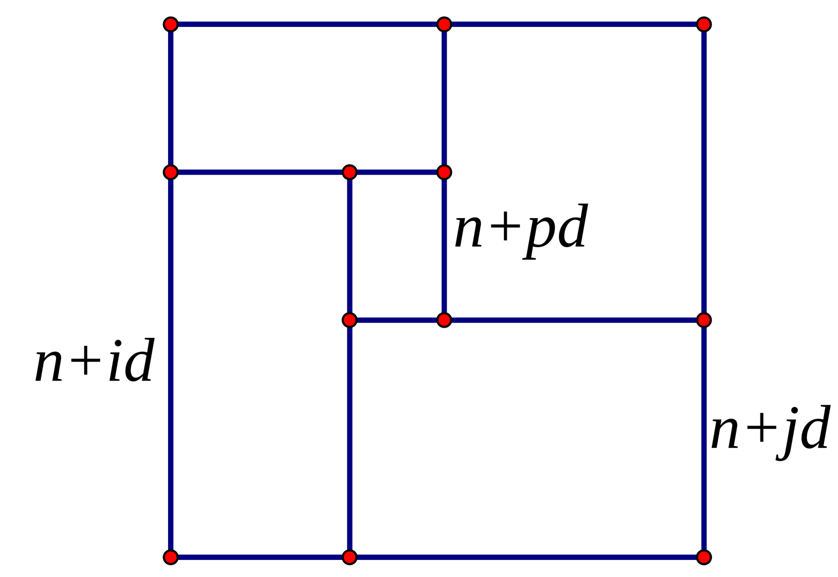


$n=2$　　$n=3$

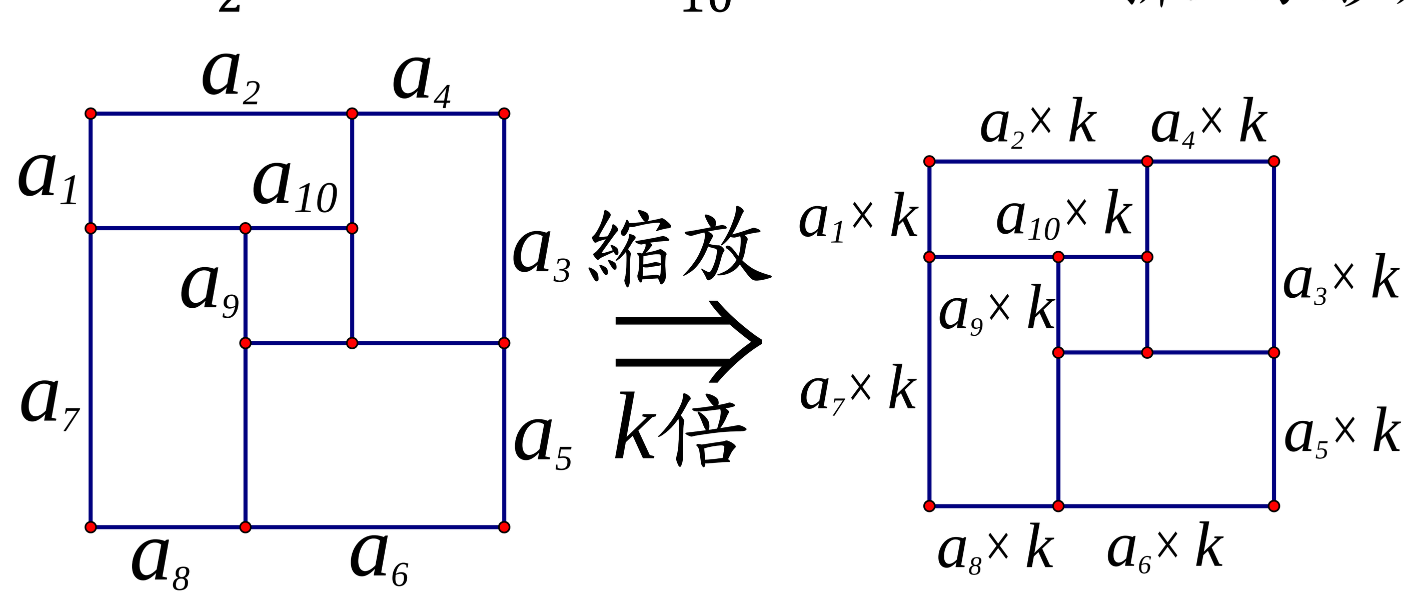
(2)公差為 d，且 d 為正實數。

假設此等差數列為 n、$n+d$、$n+2d$、……、$n+9d$ 。

引理：若矩形長寬為 n、$n+d$、$n+2d$、……、$n+9d$ 來拼正方形，只有在 $n=kd$ ，$(k>0)$ 時，才有可能有解。



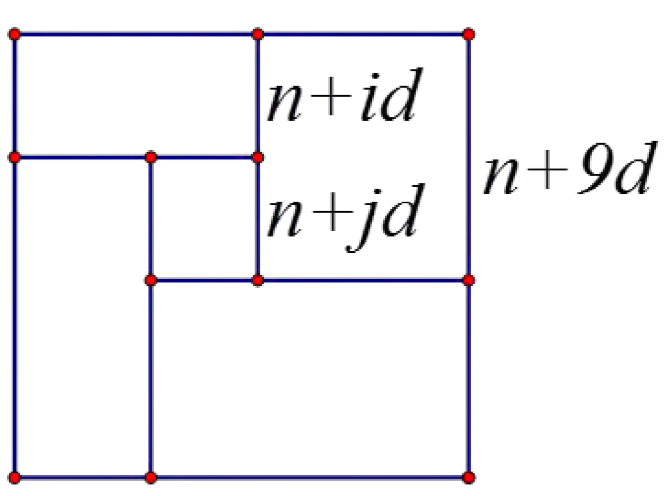
引理：若矩形長寬為 a_1、a_2、……、a_{10} 拼正方形是有解（或是無解）的，則用矩形長寬為 $a_1\times k$、$a_2\times k$、……、$a_{10}\times k$，$k>0$ 拼正方形亦是有解（或是無解）的。



定理：矩形長寬為 n、$n+d$、$n+2d$、……、$n+9d$ 拼正方形時，

① 當 $n=8d$、$7d$、$6d$、$5d$、$4d$ 時都是無解的。

② 當 $n=3d$、$2d$、d 時，是有解的。



2. 矩形長寬為「等比數列」的情形

a、ar、ar^2、……、ar^9，$r>1$ 解的情形

$\Leftrightarrow 1$、r、r^2、……、r^9，$r>1$ 解的情形 $\Leftrightarrow 1$、$\frac{1}{r}$、$\frac{1}{r^2}$、……、$\frac{1}{r^9}$ ，$r>1$ 解的情形

因此我們只討論 1、r、r^2、……、r^9，$r>1$ 的情況。

定理：當矩形長寬為等比數列 1、r、r^2、……、r^9 來拼正方形是無解的。

由圖形發現以下四個恆等式須全對：$a_3=a_1+a_9$、$a_7=a_5+a_9$、$a_2=a_8+a_{10}$、$a_6=a_4+a_{10}$，且必存在一組 a、b，須滿足 $1+r^a=r^b$，$1\leq a<b\leq 9$

我們發現 $r^b-r^a-1=0$ 只有在 $a=4$、$b=5$ 時才能因式分解。

即 $r^5-r^4-1=(r^2-r+1)(r^3-r-1)=0$

又因為 r^2-r+1 恆正，所以 $r^5-r^4-1=0\Leftrightarrow r^3-r-1=0$

(1) $a=4$、$b=5$ 之外的所有情形

舉例：$a=1$、$b=2$ 的情形

$1+r=r^2$　　$r^4+r^5=r^6$

$r+r^2=r^3$　　$r^5+r^6=r^7$

$r^2+r^3=r^4$　　$r^6+r^7=r^8$

$r^3+r^4=r^5$　　$r^7+r^8=r^9$

(2) $a=4$、$b=5$ 的情形

已知 $1+r^4=r^5$ 成立時，$1+r=r^3$ 亦成立

$1+r^4=r^5$　　$1+r=r^3$

$r+r^5=r^6$　　$r+r^2=r^4$

$r^2+r^6=r^7$　　$r^2+r^3=r^5$

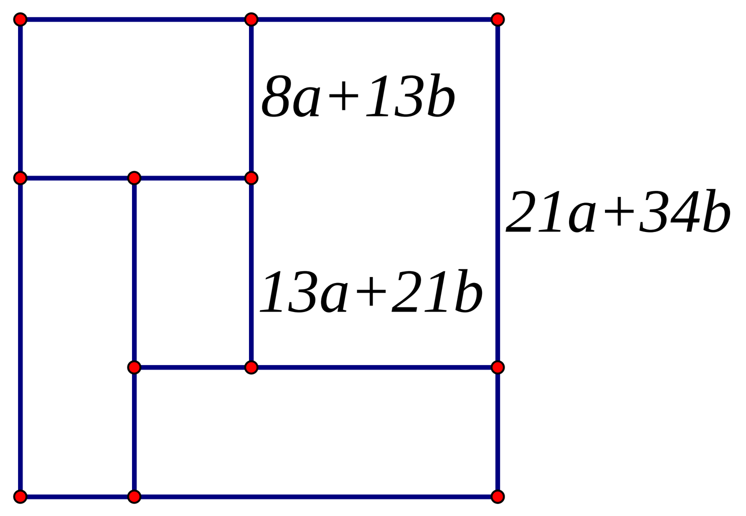
$r^3+r^7=r^8$　　$r^3+r^4=r^6$

$r^4+r^8=r^9$　　$r^4+r^5=r^7$

$r^5+r^6=r^8$

$r^6+r^7=r^9$

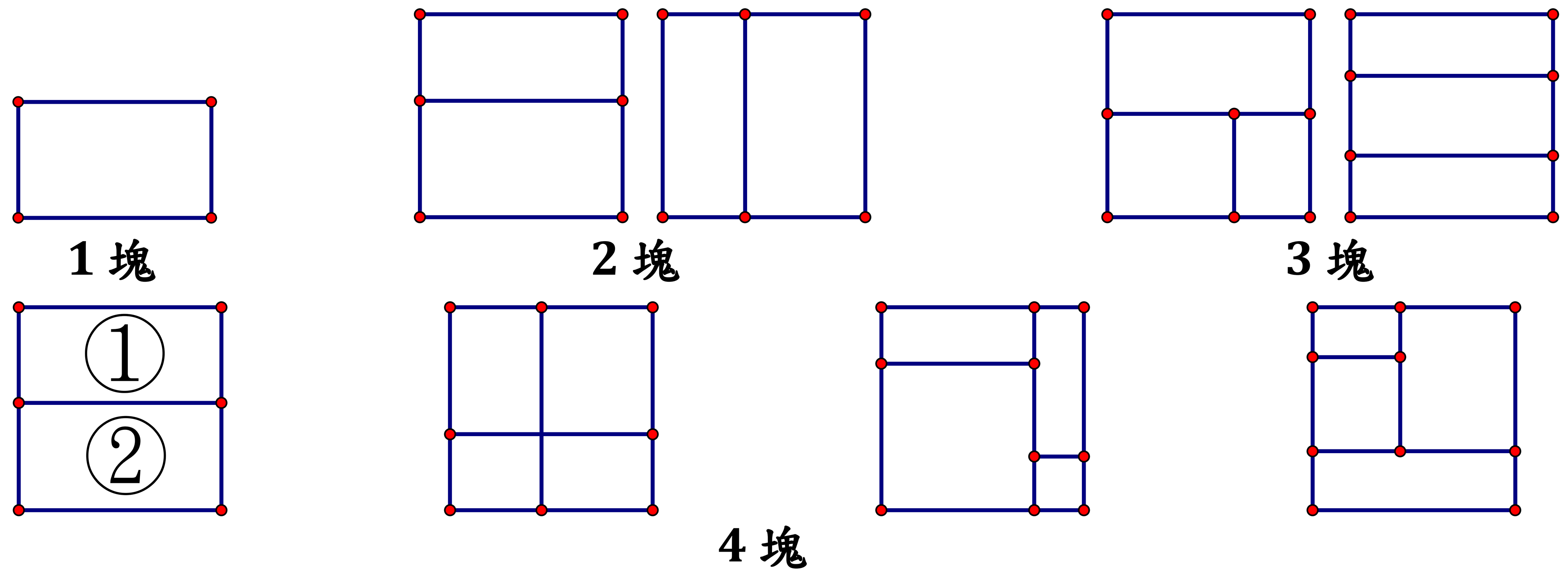
3. **矩形長寬為「費氏數列」的情形**



定理： 當矩形長寬為費氏數列 a、b、$a+b$、$a+2b$、$2a+3b$、$3a+5b$、$5a+8b$、$8a+13b$、$13a+21b$、$21a+34b$，a、$b>0$來拼正方形是無解的。

三. 用一塊、二塊、三塊、四塊矩形拼正方形的情形

定理： 當矩形個數為一塊、二塊、三塊、四塊矩形拼正方形的情形無圖形。

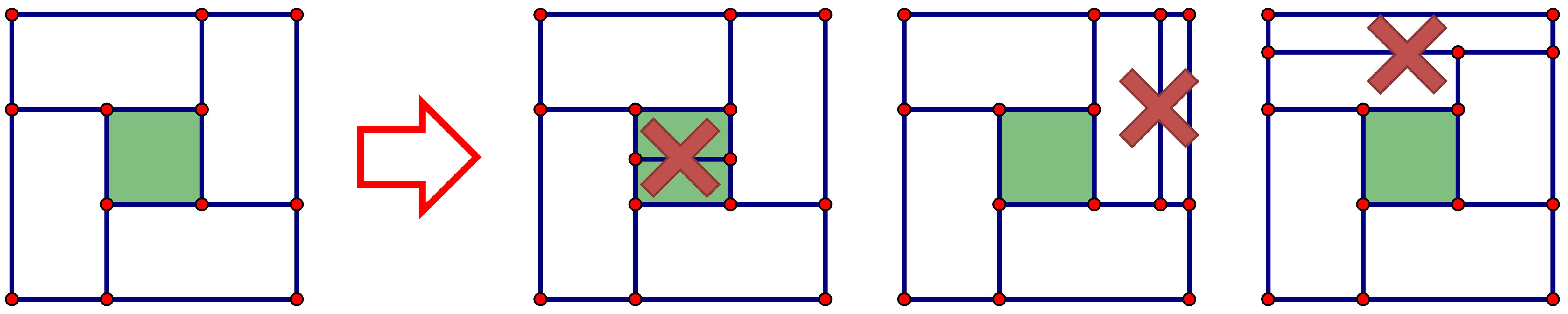


1 塊　2 塊　3 塊

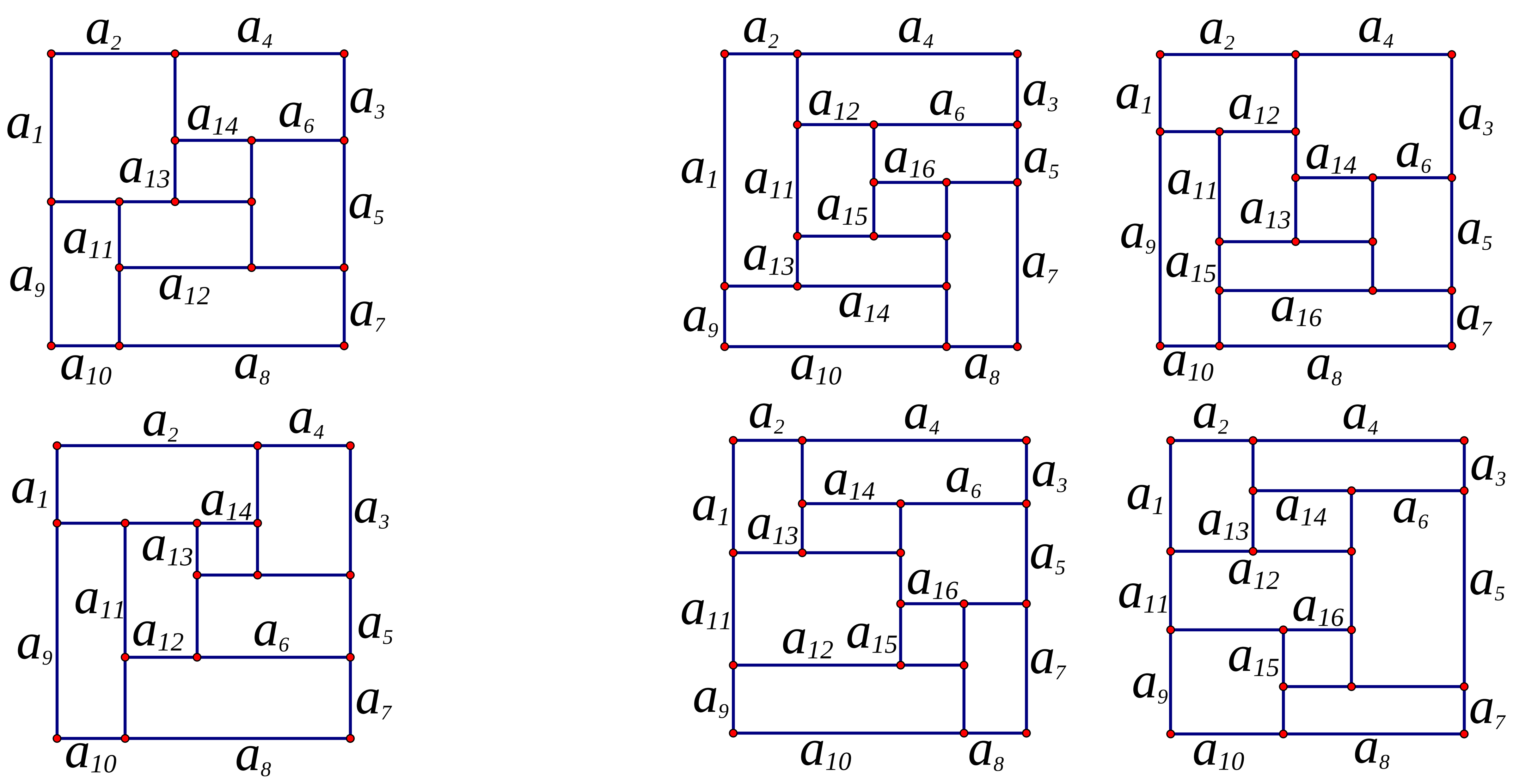
4 塊

四. 用六塊矩形拼正方形的情形

定理： 當矩形個數為六塊矩形拼正方形的情形是無圖形的。



五. 用七、八塊矩形拼正方形的情形



7 塊　8 塊

7 塊和 8 塊矩形拼正方形的解分別有「24 組解」和「130 組解」。

肆、未來展望

一. 我們找出當結構為五塊時，矩形長寬成等差、等比、費氏數列的情形，那如果矩形長寬為任意數列時會是怎樣的情形？能找出規律亦或是沒有規律。

二. 我們希望未來能夠在等差數列的條件下，推展到結構為 n 塊的一般式，讓報告更加完整。

伍、益智遊戲

結構為八塊時因為共有 130 組解，我們利用它們設計出了一種益智遊戲。

以下兩個是我們設計的益智遊戲，它們是由「八塊矩形」拼成的正方形，且矩形的長寬為整數「1~16」，歡迎大家挑戰看看。