

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 生物(生命科學)科

第三名

040706

生物世界數學遊戲

—以碎形理論解釋植物的生長形態

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者： 高二 郭翰霖 高二 陳威濤	指導老師： 林獻升 郭瓊華
-------------------------	---------------------

關鍵詞：生物數學、碎形幾何、型態測量學

## 摘要

芒萁是中低海拔常見優勢種，以往文獻提出的解釋是「適應台灣酸性土壤」，但我們提出另一假說：芒萁的羽狀複葉具有特殊的樹狀碎形生長形態，二分岔疊代循環，使其生長效率提高，具有較佳的生長優勢因而成為地被層優勢種。我們從野外生長形態及模擬生長模式進行驗證。

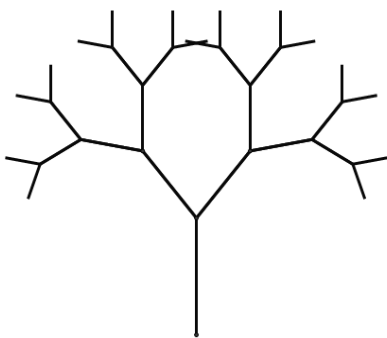
野外調查結果，複葉枝條長度與分岔角度有遞減的趨勢，以降低末端小葉重疊比例而提高光合作用葉面積。軟體模擬結果，最佳生長模式為二分岔3階層且分岔長度比為1.0，分岔角度為100。重複二分岔次數模擬中以3階層效率最好，最差為6階層，此結果與野外生長狀況相符。從野外及模擬資料互相比對後，發現樹狀碎形生長模式能讓能量收支達最佳化，有較佳的生長效率，有助成為優勢種。

## 壹、研究動機

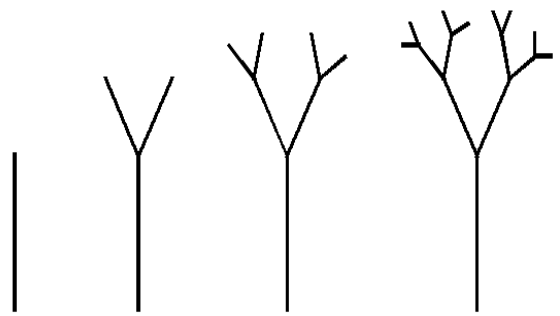
優勢種 (dominant species)，是指對於群集及群集的環境形成有明顯控制作用的植物，通常優勢種個體數量多、覆蓋面積大、生物量高、生活能力較強，即優勢度較大的種類，且在不同層次會有各自的優勢種，例如在森林的群集中，有喬木層、灌木層、草本層及地被層的區分，且分別存在各自的優勢種，又優勢層的優勢種又被稱為建群種 (constructive species) (周，2003)。

芒萁(*dicranopteris linearis (burm. f.) und. var. linearis*)(彩圖一)是中低海拔山區向陽坡地常見的指標植物，因其適應台灣的酸性土壤而常成叢出現在林地底層或是山間小路旁，是重要的先鋒型植物 (郭，2001)。在台北內湖金面山區常可見到芒萁一大片出現在相思樹林，為地被層優勢種植物(彩圖二、彩圖三)，芒萁生長的區域少有其它種類植物可以與其競爭。芒萁的羽狀複葉具有特殊的生長形態，在每一個分支點上會多有一個分支，因此不斷地重複二分岔往外擴展，稱為假二分岔分支 (pseudo-dichotomously branch) (彩圖四)，此外頂葉分岔處又有休眠芽(彩圖五)，隔年會再從休眠芽處繼續發芽，所以枝條可以無限延伸(郭，2006)。

芒萁羽狀複葉特殊的二分岔生長形態引起我們的興趣，查閱相關資料後，發現其重複二分岔分支的形態符合碎形幾何中的樹狀碎形 (Tree Fractal) (圖一)。碎形 (Fractal) 有零碎、破裂的意思存在。將一個零碎的幾何形狀，分成數個部份，其中每一小部份都是整體縮小尺寸的形狀，碎形具有自相仿性，有自我模仿的特質存在，自相仿性為在越小的尺度下，以某種固定方式縮小細節，而且重覆不斷製造細節，因此造成不斷循環的現象產生(圖二) (廖，2006)。碎形的提出旨在把不規則的現象透過碎形的觀念找出其存在的規則性，在混亂中找出統一性，解決其不確定性。



圖一、碎形幾何中的樹狀碎形。



圖二、樹狀碎形的形成步驟。

我們觀察到芒萁羽狀複葉樹狀碎形生長形態，使其葉枝二分岔不斷往外擴展，以葉軸起始點形成一個扇形，擴展其複葉的面積，以捕捉陽光而行光合作用。此外，樹狀碎形還能使其葉枝二分岔往外擴展時讓其葉軸上小葉片重疊的比例降低，因而提高小葉的陽光捕捉效率（彩圖六）。植物的枝條生長需要消耗能量，此為獲得利益前的投資 C（cost），但當枝條生長將葉子往外擴展後，能接受到陽光獲得能量或者遮蔽底層植物抑制競爭者（彩圖七、彩圖八），可算是其所獲得的利益 B（benefit），當  $B \div C$  時所得到的比值為「生長效率 GR」（Growth Ratio），可以表示植物消耗能量的投資與獲得能量的利益之間的關係。

由於芒萁具有此特殊的生長形態，因此我們以「形態特徵」的角度切入而提出另一個新的假說：**羽狀複葉假二分岔分支樹狀碎形生長形態具有較高的生長效率，芒萁使成為向陽坡地優勢種的原因之一。**因此我們計畫調查野外族群中不同個體的形態資料，進行統計分析，並同時使用數學幾何繪圖分析軟體 GSP 來模擬芒萁樹狀碎形生長模式，計算各種分岔生長形態的生長效率 GR，計算出理想上的最佳生長模式，最後綜合與比對野外族群生長形態（pattern）與最佳生長理論模式（model），來驗證我們的假說。

本研究作品與教材單元相關性說明如下：

高級中學基礎生物(翰林版) 第二章第七節 植物（蕨類）

高級中學基礎生物(翰林版) 第三章第二節 群集（種間競爭）

高級中學必修生物(龍騰版) 第二章第一節 植物營養器官的構造（羽狀複葉）

## 貳、研究目的

### 一、探討問題

芒萁具有何種「特性」或「特徵」能成為地被層的優勢種？

### 二、實驗假說

芒萁的羽狀複葉呈樹狀碎形生長形態，能提高「生長效率GR」，有助於成為優勢種。

公式： $GR=B/C$

(一) 生長效率 GR：獲得「利益 B」所需要的「投資 C」

(二) 利益 Benefit=：

1. 有效面積 = 光合作用 = 能量獲得 → 生物量

2. 覆蓋面積 = 遮蔽陽光 = 種間競爭 → 覆蓋面積

(三) 投資 Cost = 生長複葉的能量消耗

### 三、研究目的

(一) 建立芒萁野外族群碎形幾何資料，瞭解羽狀複葉外部形態特徵。

(二) 模擬野外植株及虛擬個體之生長型態，並找出最佳生長模式。

(三) 比對野外族群生長形態與最佳理論生長模式，以驗證實驗假說。

## 參、研究設備與器材

### 一、實驗物種芒萁(*dicranopteris linearis (burm. f.) und. var. iinearis*)

(一)分類：裏白科(Gleicheniaceae)芒萁屬(*Dicranopteris*) 英名False Staghorn Fern

(二)分布：低海拔山區的山坡或森林的邊緣

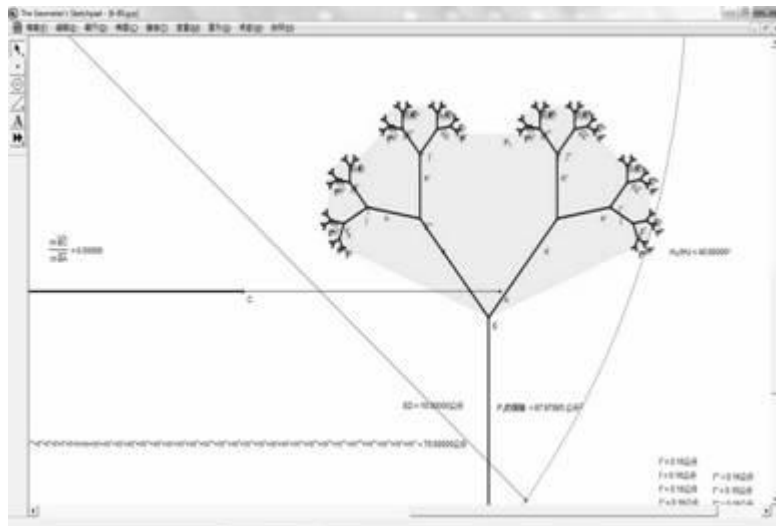
(三)特徵：多年生草本；莖部發達，莖高30 - 60公分，根莖匍伏，成棕褐色，密佈金褐色鱗片；葉柄長，在葉軸、羽軸及小羽片的中軸上均佈有星狀的細毛，每一個二又分支的長度大致相同。葉長達 20 - 100 公分，為長橢圓狀的羽狀的葉片，每一分岔有1對，分岔基部另具稍小形之同形葉片1對；葉表均呈綠色，有光澤，葉背白色。

### 二、實驗器材

器材	用途	數量
捲尺	測量芒萁枝長	1把
量角器	測量芒萁假二分岔角度	1個
電腦	數據計算分析	1台
相機	拍攝照片	1台
GSP軟體	模擬芒萁生長形態	1套
EXCEL軟體	統計分析數據	1套

### 三、GSP 軟體

GSP (Geometer's Sketchpad) —幾何學家的畫板，是由美國 Key Curriculum Press 公司所開發出的動態幾何教學軟體，藉由其工具箱中的一些基本作圖元件（點、線、圓）與功能表中所提供的一些幾何基本操作（平移、旋轉、鏡射、建立軌跡等），可使用簡易的尺規作圖法來構造出複雜的幾何圖形，也可對固定結構圖形設計連續的變化。它也提供動態模擬，在圖形改換時具有度量長度、角度、比例、面積的功能。藉著觀察，有助於增強開放式的猜測與研究，因此GSP可說是一個助於探討與發掘幾何性質的工具軟體。



## 肆、研究過程及方法

### 一、野外族群生長形態

以台北市內湖金面山區特定向陽坡地為樣區(彩圖九)，在樣區內隨機採集20株個體，測量羽狀複葉形態，以捲尺測量「枝條長度」，以量角器測量「分岔角度」(葉片之主幹長度與面積的個體及不同植株差異皆大，不易測量故不納入分析項目)，由於野外族群的一片羽狀複葉會有不同重複循環的二分岔形態(2次二分岔、3次二分岔...等)，因此將一片羽狀複葉不同的分岔次數以「層級」概念轉化，同一次分岔的所有枝條與小葉視為同一層級，進行統計與分析(彩圖十、彩圖十一)。

分析項目如下：

#### (一)幾何特徵：瞭解羽狀複葉幾何形態

##### 1.同一層級(彩圖六)：瞭解單一分岔層級的特徵

- (1)枝條數量 $N$ ：將同一階級的所有枝條總加。
- (2)枝條長度 $L$ ：將同一層枝長的20組數據進行平均。
- (3)分岔角度 $D$ ：將同一層分岔角度的20組數據進行平均。

##### 2.不同層級(彩圖七)：瞭解重複二分岔的變化

- (1)總枝條數 $N_{total}$ ：將所有階層的枝條總加。
- (2)長度變化 $L_{vary}$ ：將不同層枝長，以下一層除以上層，瞭解不同層枝長比例關係
- (3)角度變化 $D_{vary}$ ：將不同層分岔角度，以下一層除以上層，瞭解不同層分岔角度比例關係。

#### (二)碎形特徵：瞭解羽狀複葉碎形形態

##### 1.形維度fractal dimension, $D$ ：數值表示幾何圖形形狀的複雜程度

- (1)支點階層數及該階層總分支數目的關係可以推算碎形維度。
- (2)不同分支點階層數 $A$ 作為主要計算基準點，經由測量每階層範圍內枝幹總數目 $N_a$ 後，作 $N_a$ 與 $A$ 的雙對數線性回歸圖，並以圖中的「斜率」代表碎形維度。

##### 2.疊代循環 Iteration or Recursive, $R$ ：數值表示重複二分岔次數

#### (三)野外族群階層數統計

調查的方式，抽樣200株個體，統計野外族群各層數出現的比例。

#### (四)野外族群分岔生長完整度

調查方法，抽樣野外各階層20株個體，統計野外族群各階層個體分岔生長完成度。

## 二、軟體模擬生長模式

### (一)羽狀複葉幾何形態之模擬

將20株個體的形態數據分2階層、3階層和4階層等三組數據（5階層樣本數量極少無法取得足夠樣數），每組各取5株較完整的樣本進行數據統整。各組分析後之數據代入GSP幾何作圖軟體，模擬野外族群羽狀複葉樹狀碎形的生長形態。

分析方法如下：

#### 1.分岔枝長：

為減少個體體型差異影響模擬的結果，故分岔枝長項目以「比例長度」換算後的數值進行分析。換算方法：將枝條進行編號(彩圖十二)，並先將1-1/1-2求得第一層的枝長比例後，以下一層枝長除以上一層枝長的方式求得各層比例長度，最後各層數據分別加總平均。

$$\frac{\Sigma L(m+1)-n / Lm-n}{N(m+1)}$$

#### 2.分岔角度：

將屬於同一分岔階層的葉軸分岔角度加總之後，求取平均值，得到這一階層的分岔角度。

$$\frac{\Sigma A(m+1)-na / Am-na}{N(m+1)}$$

### (二)羽狀複葉最佳生長模式之探討

以GSP軟體模擬的方式，模擬各種二分岔階層數、枝條長度與分岔角度的組合所形成的羽狀複葉，建構各種生長模式，找出最佳的分岔階層數、分岔角度和分支長度比，形成羽狀複葉的最佳生長模式。

分析方法如下：

分別操縱「分岔層數」、「分岔角度」和「分支長度比」三大變因，以求出枝幹總長(L)和枝幹末端所圍的面積(A)，計算出生長效率。

1.羽狀複葉所圍面積  $A = \text{光合作用葉面積} - \text{覆蓋底層葉面積} = \text{利益獲得} = \text{Benefit} = B$

2.羽狀複葉枝條長度  $L = \text{器官生長長度} = \text{能量投資} = \text{Cost} = C$

3.生長效率  $GR = B/C = A/L$

4.最佳生長模式  $= GR_{max} = \text{以最「經濟 } C \text{」的生長形式獲得最大的「利益 } B \text{」}$

在固定其中兩個變因時，比較第三個變因與生長效率的關係，做成曲線圖表，歸納出最佳的分岔層數、分岔角度和分支長度比。



### 三、生長形態 (pattern) 與生長模式 (model) 之比較

#### (一) 野外生長形態與模擬生長模式之比較

以 GSP 模擬各分岔階層的分岔角度與分支長度比之變化，再比對野外生長形態。

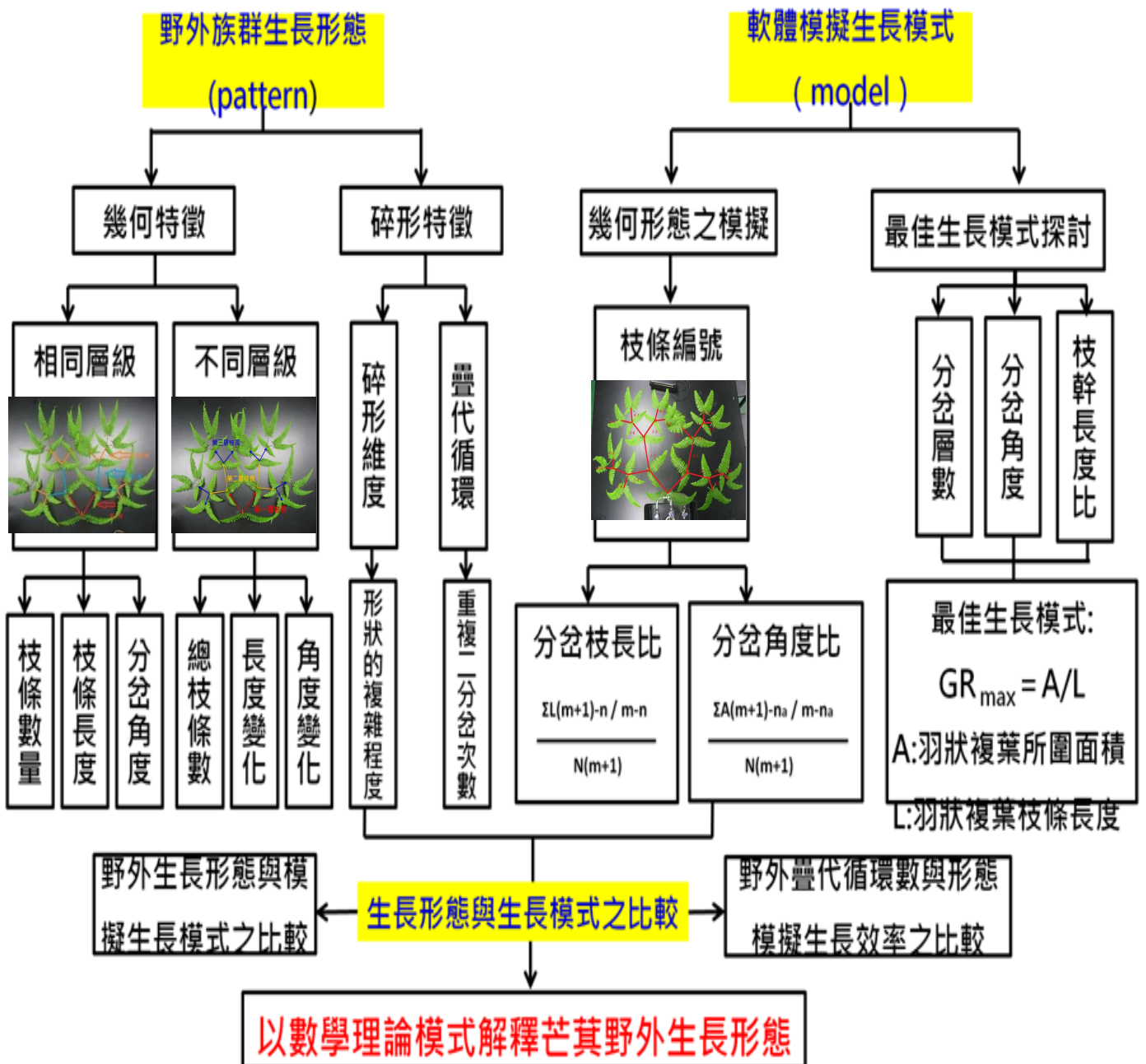
三種模擬狀況：1. 全部固定不變

2. 逐漸縮小與變短

3. 逐漸增大與變長

#### (二) 野外二分岔層數與形態模擬生長效率之比較

以 GSP 模擬各分岔階層的生長模式，比較生長效率變化與野外二分岔層數的出現比例，瞭解野外生長形態是否符合理論生長模式。



## 伍、研究結果與討論

### 一、野外族群生長形態

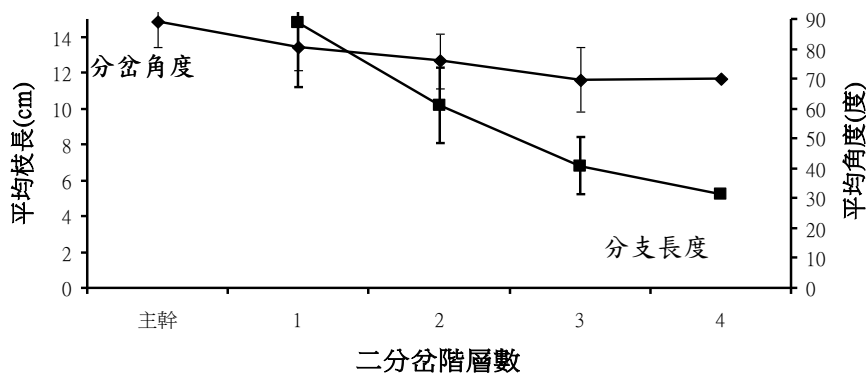
#### (一)幾何特徵 (彩圖十三~彩圖十六):

##### 1.羽狀複葉分支長度與分岔角度之變化

(1)同一階級二分岔測量數據平均後，結果如表一與圖三所示。

表一、同一階級分支長度與分岔角度測量結果

	主幹	第 1 層	第 2 層	第 3 層	第 4 層
長度(cm)	x	14.8±4.4	10.2±3.6	6.8±2.1	5.1±1.6
角度(度)	89.3±8.8	80.6±7.7	76.0±9.1	69.8±10.9	70.0°±0



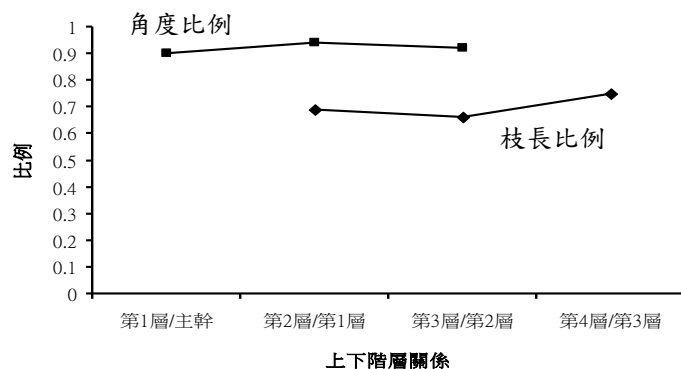
圖三、同一階層分支長度與分岔角度變化趨勢圖。

(2)不同階級二分岔測量數據平均後，結果如表二所示。

表二、不同階級分支長度比例與分岔角度比例計算結果

	第 1 層/主幹	第 2 層/第 1 層	第 3 層/第 2 層	第 4 層/第 3 層
長度比例	x	0.69	0.66	0.75
角度比例	0.90	0.94	0.92	x

由上表之結果可以發現羽狀複葉的枝條以第一層級的枝條最長，往越外層其長度有遞減之趨勢，分岔角度分析方面也發現以主幹的分岔角最大，越往外層角度越趨縮小的趨勢。各層級長度比例差異不大，各層級角度的比例也無明顯差異。綜合以上的結果，芒萁的羽狀複葉呈現長度及角度越往外層而逐漸變短與縮小的趨勢，且角度有一定的縮小比例。





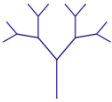
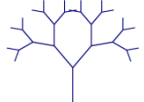
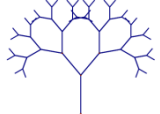
圖四、不同階級枝長比例及角度比例趨勢圖。

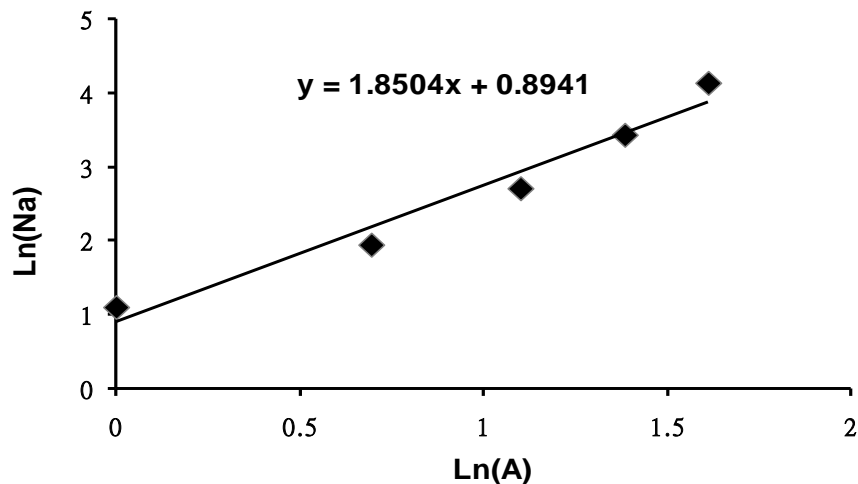
## 2.碎形特徵

### (1)碎形維度

芒萁的分岔階層數及分支總數經整理後，結果如表三，並且由自然對數 $\ln(Na)$ 及 $\ln(A)$ 求得芒萁外部形狀的碎形維度，結果如圖五所示。

表三、芒萁分層數及分支數總表

分層數(A)	$\ln(A)$	新增枝數	總枝數(Na)	$\ln(Na)$	圖示
1	0	2	3	1.1	
2	0.69	4	7	1.94	
3	1.09	8	15	2.71	
4	1.38	16	31	3.43	
5	1.61	32	63	4.14	



圖五、分層數A與分支總數Na雙對數線性回歸圖。(回歸線的斜率為碎形維度 $D=1.85$ )

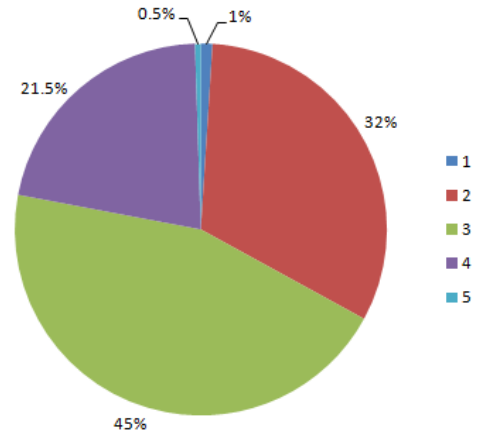
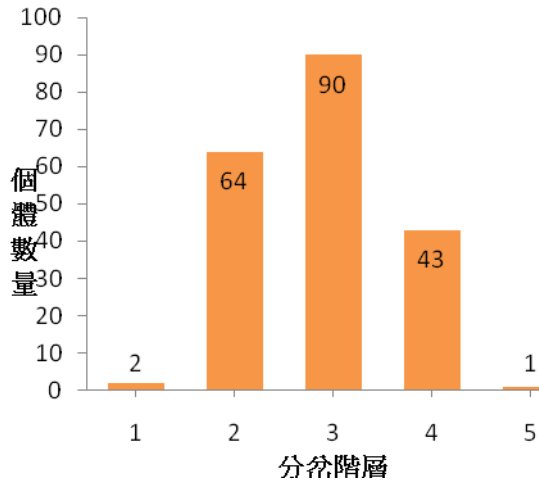
本實驗是將芒萁野外生長形態分支數的最完整無缺少枝條的情況代入計算，故無法探討環境因素對於外部形狀之影響關係，經過整理及計算後我們可以得到芒萁的碎形維度為1.85，而碎形維度是一種用以表是外部形態複雜度的數值，但是因為芒萁的分支生長有其固定的規律，所以在碎形維度的計算結果上也會呈現較有規律的數值。

## (2) 疊代循環

隨機抽樣 200 株個體，統計羽狀複葉二分岔層數與個數，其結果如表四、圖六、圖七所示。

表四、羽狀複葉二分岔疊代層數出現個體調查結果

疊代重複	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	6 次
數量	2	64	90	43	1	0
比例(%)	1.0	32.0	45.0	21.5	1.0	0



圖六、二分岔疊代層數出現個體出現頻度圖。

圖七、二分岔疊代階層數個體出現比例圖。

綜合以上結果，芒萁野外族群個體二分岔以 3 階層的數量最多，出現比例最高，而 2 階層的數量次之，第三是 4 階層，5 階層的數量及 1 階層之數量都極少，無法找到 6 階層以上。因此可知分岔重複疊代次數有上限，樣區中最多到達 5 階層。

### 3.各階層芒萁分枝生長完成度比例

採芒萁不同階層個體，各 20 株，觀察其分枝生長是否有生長至最大值，並統計在各階層所佔的比例。結果如表五所示。

表五、芒萁分枝生長完整度統計

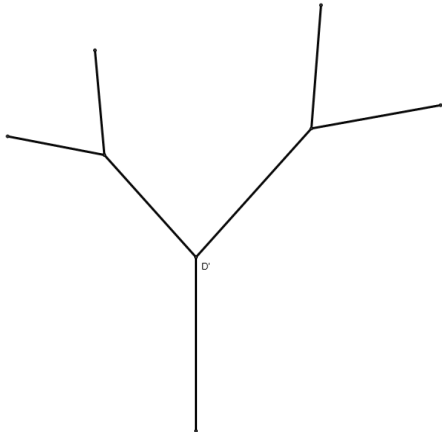
階層數	1	2	3	4
分枝生長完整個體數	20	17	18	8
分枝生長不完整個體數	0	3	2	12
各階層完整生長佔比例	100%	85%	90%	40%

經過調查後發現生長至第四層時，芒萁的最末端分枝會出現分枝生長不完整的現象，並且相較於 1、2、3 的比例更高，經過討論後，我們推測可能原因是因為，生長至四階層的個體消耗的能量過多，無法和其光合作用的獲得能量達成平衡，因此會出現分枝生長不完整的情況，故推測芒萁完整生長至四階層，並不利於其在生長效率上達到最佳化。

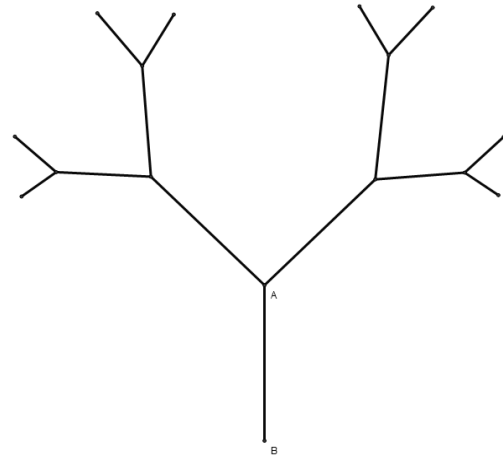
## (二)軟體模擬生長模式

### 1. 羽狀複葉幾何形態之模擬

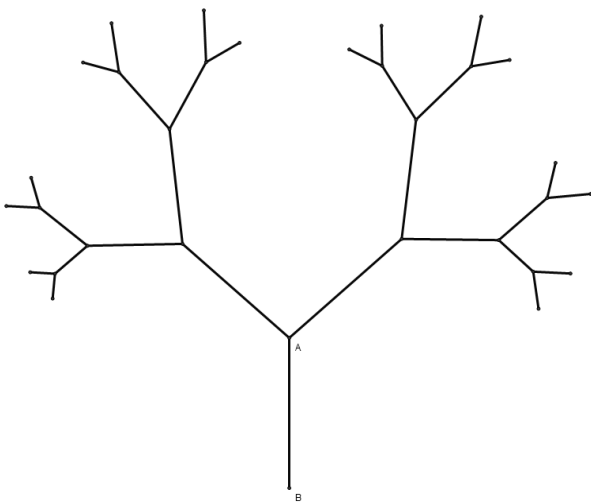
統計野外形態數據後，輸入 GSP 模擬，其模擬結果如圖八、圖九、圖十所示。可以明顯得看出出芒莢假二岔分支生長形態的趨勢，是往越外層，分支長度與分岔角度均有逐漸變短與縮小的趨勢。



圖八、羽狀複葉 2 階層二分岔生長形態圖



圖九、羽狀複葉 3 階層二分岔生長形態圖



圖十、羽狀複葉 4 階層二分岔生長形態圖

## 2.羽狀複葉最佳生長模式之探討

### (1)模擬各種生長模式的生長效率值

以 GSP 軟體模擬所建構各種生長模式，各種組合的生長效率結果如表五至表十所示。

表六、固定分支長度比 0.5，各分岔層數與角度之生長效率值

	50°	60°	70°	80°	90°	100°
分岔層數 1	0.96	1.08	1.18	1.23	1.25	1.23
分岔層數 2	1.51	1.75	1.96	2.13	2.27	2.36
分岔層數 3	1.61	1.86	2.07	2.24	2.37	2.46
分岔層數 4	1.50	1.71	1.89	2.01	2.11	2.15
分岔層數 5	1.32	1.50	1.63	1.73	1.78	1.79
分岔層數 6	0.99	1.11	1.19	1.25	1.28	1.28

表七、固定分支長度比 0.6，各分岔層數與角度之生長效率值

	50°	60°	70°	80°	90°	100°
分岔層數 1	1.15	1.3	1.41	1.48	1.5	1.48
分岔層數 2	1.94	2.25	2.52	2.73	2.91	3.04
分岔層數 3	2.14	2.46	2.74	2.97	3.14	3.26
分岔層數 4	1.98	2.26	2.50	2.67	2.79	2.85
分岔層數 5	1.71	1.94	2.11	2.23	2.29	2.30
分岔層數 6	1.31	1.47	1.58	1.66	1.67	1.68

表八、固定分支長度比 0.7，各分岔層數與角度之生長效率值

	50°	60°	70°	80°	90°	100°
分岔層數 1	1.34	1.52	1.64	1.72	1.75	1.72
分岔層數 2	2.40	2.79	3.13	3.40	3.62	3.77
分岔層數 3	2.73	3.16	3.52	3.82	4.04	4.19
分岔層數 4	2.57	2.95	3.26	3.49	3.63	2.74
分岔層數 5	2.20	2.50	2.73	2.90	2.99	3.03
分岔層數 6	1.69	1.90	2.05	2.16	2.21	2.22

表九、固定分支長度比 0.8，各分岔層數與角度之生長效率值

	50°	60°	70°	80°	90°	100°
分岔層數 1	1.53	1.73	1.88	1.97	2	1.97
分岔層數 2	2.90	3.36	3.77	4.10	4.36	4.55
分岔層數 3	3.42	3.96	4.41	4.78	5.07	5.26
分岔層數 4	3.31	3.80	4.20	4.52	4.79	4.88
分岔層數 5	2.78	3.15	3.45	3.67	3.80	3.85
分岔層數 6	2.17	2.44	2.64	2.78	2.86	2.89

表十、固定分支長度比 0.9，各分岔層數與角度之生長效率值

	50°	60°	70°	80°	90°	100°
分岔層數 1	1.72	1.95	2.11	2.22	2.25	2.22
分岔層數 2	3.45	3.99	4.48	4.86	5.17	5.40
分岔層數 3	4.23	4.89	5.45	5.91	6.26	6.49
分岔層數 4	4.20	4.82	5.34	5.73	6.18	6.20
分岔層數 5	3.63	4.13	4.35	4.81	4.96	5.08
分岔層數 6	2.83	3.19	3.46	3.64	3.76	3.80

表十一、固定分支長度比 1.0，各分岔層數與角度之生長效率值

	50°	60°	70°	80°	90°	100°
分岔層數 1	1.91	2.17	2.35	2.46	2.5	2.46
分岔層數 2	4.03	4.67	5.24	5.68	6.04	6.28
分岔層數 3	5.15	5.95	6.64	7.19	7.61	7.90
分岔層數 4	5.27	6.06	6.71	7.22	7.58	7.79
分岔層數 5	4.68	5.33	5.84	6.23	6.47	6.59
分岔層數 6	3.74	4.22	4.58	4.84	5.00	5.08

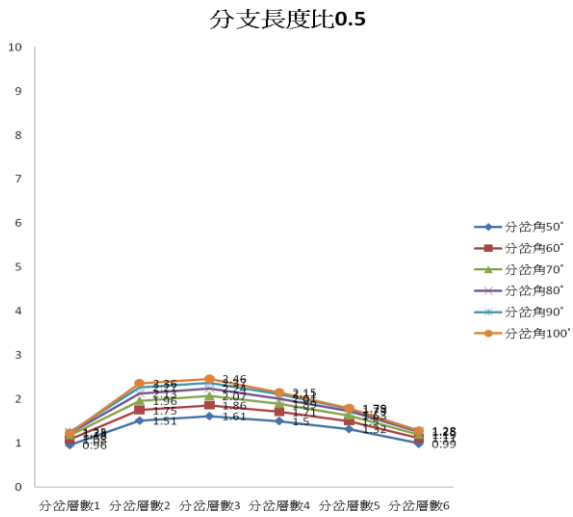
(2)各種生長模式的生長效率變化趨勢如圖九至圖十四所示。

(3)模擬結果之分析：

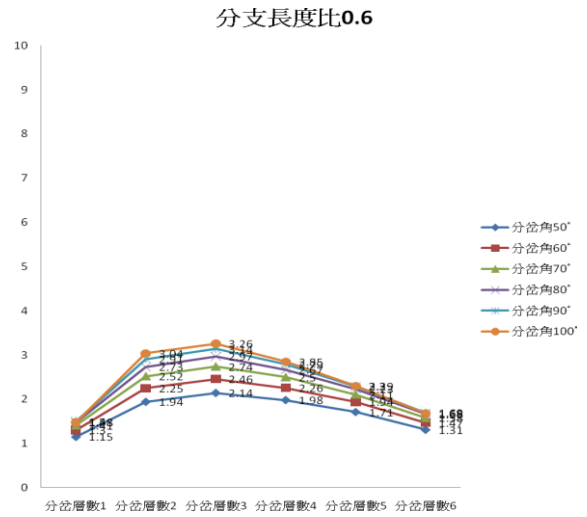
由 GSP 模擬的各種生長模式組合，可以得到分支長度如果越長，其生長效率有增大的趨勢，而角度的增大（野外觀察之最大分岔角度約為 100°，所以將模擬的上限值訂為 100°）也有助於其生長效率的提升。然而在分岔層數方面，卻發現從 2 階層開始到 3 階層的生長效率是有上升的趨勢，但到 4 階層後生長效率開始下降，而 6 階層則明顯低於其他三者。經由此結果可以發現羽狀複葉在模擬的狀態下以分岔疊代至 3 階層之生長效率最佳，而 2 階層和 4 階層差不多，而 5 階層之後則變得很差。綜和以上的分析結果，羽狀複葉最佳生長效率的生長模式為：**3 階層且分岔長度比為 1.0，分岔角度為 100。**

我們認為分岔 5 階層以上的效率會下降的主要原因是因為：葉片要生長至 5 階層以上需消耗較多的能量(cost)，但因小葉「**重疊面積**」增加，而使其獲得的利益(benefit)減少，造成生長效率反而下降。至於 2 階層以下雖然用於生長的能量很低，然而因為葉面積較小，所以其獲得的利益亦相對較少，不符合其生長之效益。

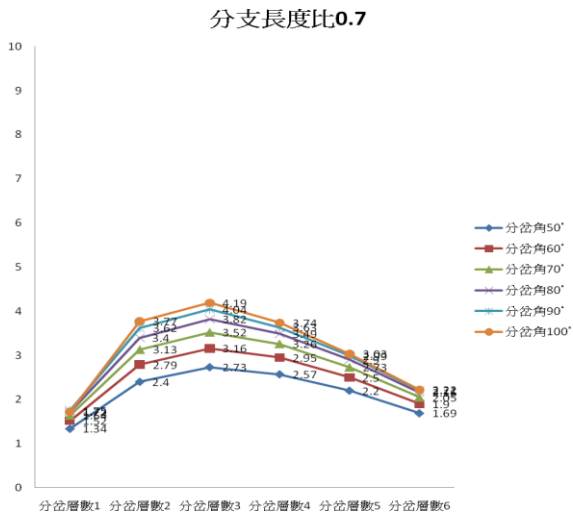




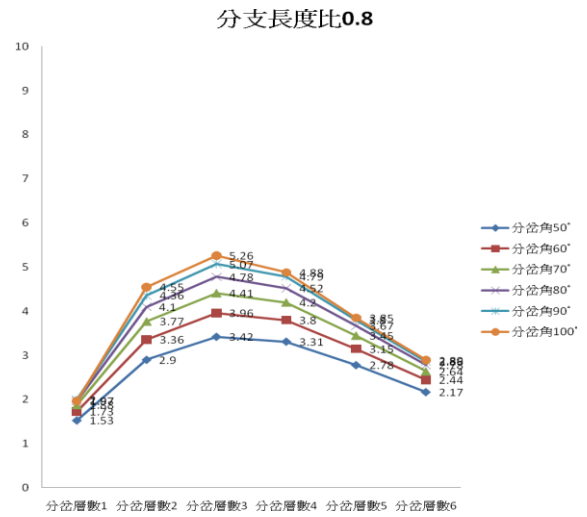
圖十一、長度比 0.5 之生長效率變化曲線圖



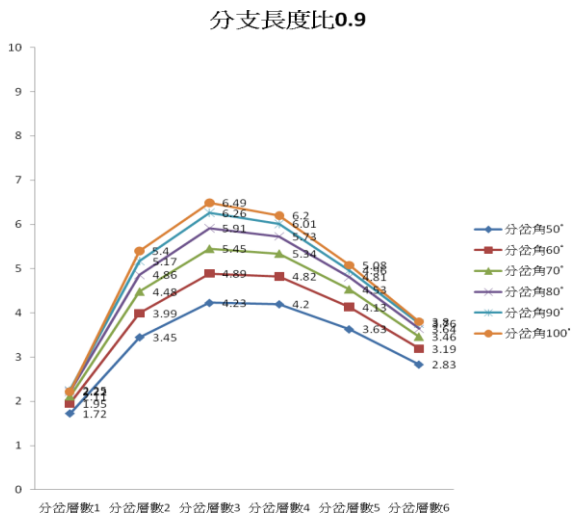
圖十二、長度比 0.6 之生長效率變化曲線圖



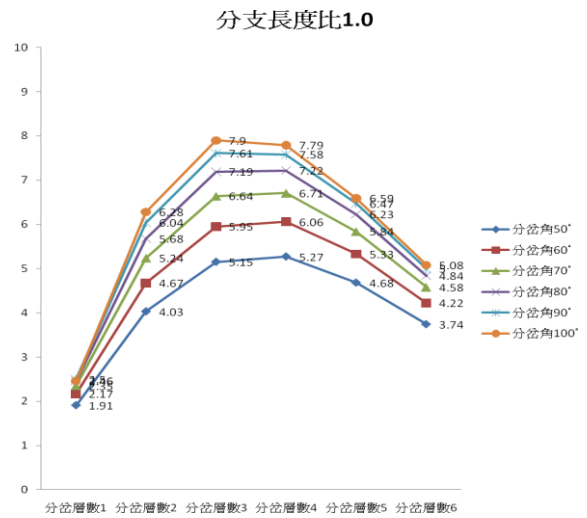
圖十三、長度比 0.7 之生長效率變化曲線圖



圖十四、長度比 0.8 之生長效率變化曲線圖



圖十五、長度比 0.9 之生長效率變化曲線圖



圖十六、長度比 1.0 之生長效率變化曲線圖

由野外數據、模擬數據及整理出的圖表，統合出以下分析：

### **I.階層數：**

野外的調查結果顯示，芒萁普遍分岔生長成 3 階層，而理想狀態模擬的結果也顯示，以分岔生長為 3 階層的生長效率最佳。在數據模擬結果的統計上，四階層的效果整體而言較 2 階層佳，但是野外的實際情形中，分支比例長度普遍介於 0.5 到 0.7 之間，少有長到 0.8 或 0.9 甚至是 1.0，所以單取 0.5~0.7 之間的數據另做統計，如此一來則顯示出 2 階層的效率勝過 4 階層，此結果也與野外植株數 2 階層大於 4 階層相符。

### **II.分枝長度比：**

經模擬結果顯示，分支長度比如果較大，可以得到較佳的效果，雖然分支長度比增加和效率的提升並不完全成正比，但是在結果中，分支長度比 1 仍然有最好的效果。不過在野外的植株卻並非如此生長，推論是因為我們在使用 GSP 模擬時，並未將分支處和末端所長的小葉計算在內，分支長度逐層遞減，正好可以減少分支末端的葉子互相重疊，如此大致可以解釋上述模擬情形與芒萁在野外的實際生長情況之不同。

### **III.分岔角度：**

野外的數據調查顯示，芒萁的分岔角度趨於 80 到 100 之間，而從 GSP 模擬結果的數據也顯示 80 到 100 之間的分岔角度是生長效率較佳的，結果相符。

綜合以上的比對結果我們認為芒萁的假二叉分支羽狀複葉生長模式是有助於其在生長時有更好的效率，並能使其成為優勢種。

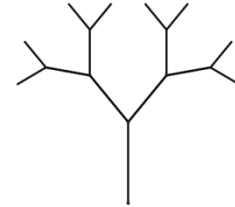
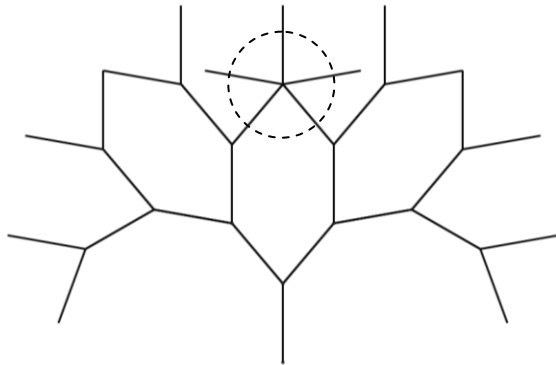
(三)生長形態 (pattern) 與生長模式 (model) 之比較

1. 野外生長形態與模擬生長模式之比較

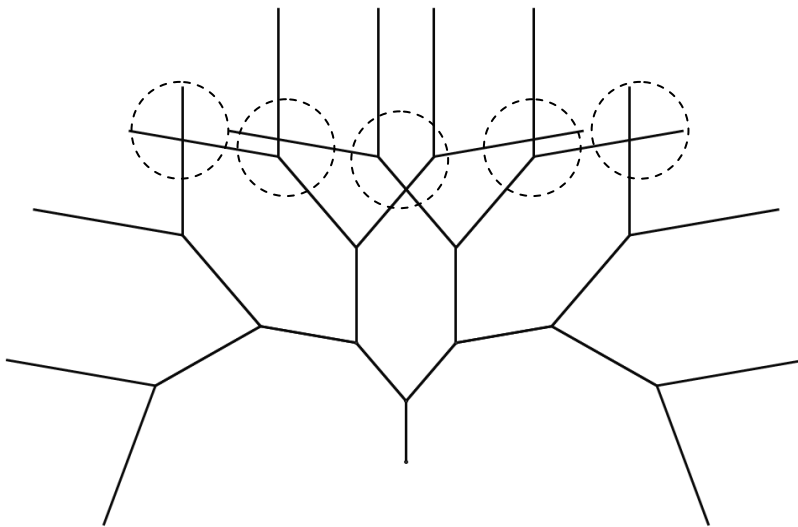
(1)

A. 長度固定不變

B. 長度逐漸縮短



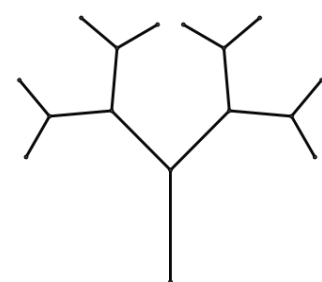
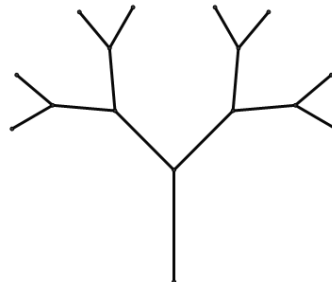
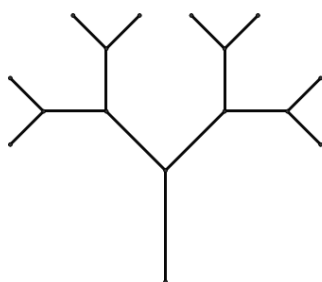
C. 長度逐漸增長



(2) A. 角度固定不變

B. 角度逐漸縮小

C. 角度逐漸增大



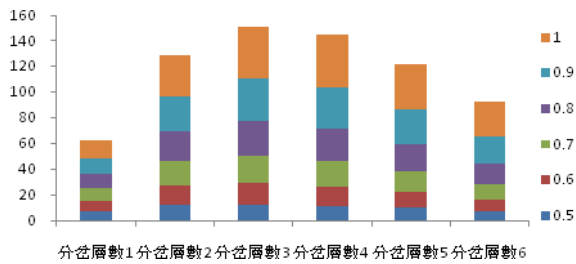
芒萁的羽狀複葉有如此的生長形態，我們認為可能的原因是為了減少分支重疊(虛線圈起部分)使小葉的重疊面積較小，如果生長模式是枝條越往外層越變長的話，會造成內層長度不足，而外層長度過長，使得最外層小葉重疊面積增加，光合作用有效葉面積減少，讓其能量獲取量下降，反而使得植株生長所投資的能量浪費了。而角度的部分亦是為了使本身獲取的能量增加，如果最內層角度小於外層角度則會使內層植株無法充分開展，而過度開展的外層枝條重疊的機率則會上升，使得 benefit / cost 變小，生長效率降低。

## 2. 野外二分岔層數與形態模擬生長效率之比較

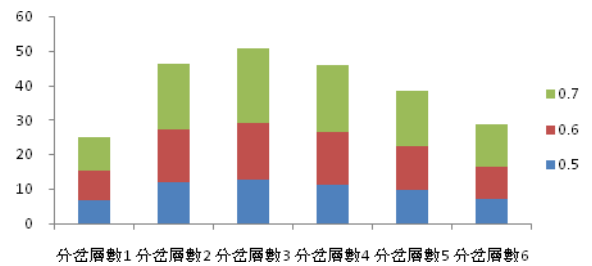
為了方便統計比較不同階層數的效率關係，我們採用下述方法：

在圖十一到圖十六共六張圖中，總共有 6 種分支長度比分別對應 6 種分岔角度，共計 36 種配對情形，在每一種情況下分別比較 1 階層到 6 階層中 6 種不同階層數的效率關係，將每種階層各 36 個效率加總，以比較不同階層數的效率關係。統合所有資料後製作成下列圖十七，如此一來便能從圖表中一目瞭然的看出不同階層數的效率關係（圖十七[A]）。另外因為野外的實際情形中，分支比例長度普遍介於 0.5 到 0.7 之間，少有長到 0.8 或 0.9 甚至是 1.0，所以單取 0.5~0.7（圖十七[B]）及 0.8~1.0（圖十七[C]）之間的數據分別另做統計。

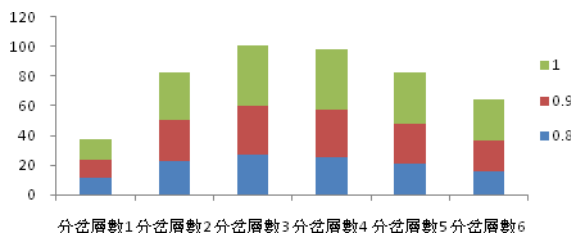
[A] 各分岔層數積分總表



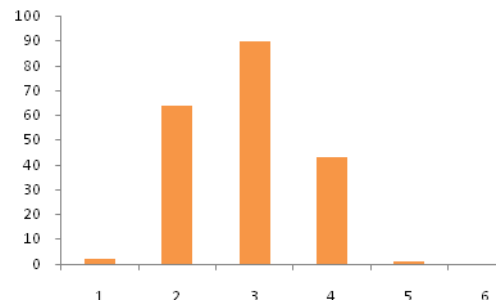
[B] 分支長度比 0.5~0.7 各分岔層數積分總表



[C] 分支長度比 0.8~1.0 各分岔層數積分總表



[D] 200株隨機抽樣各層植株數量



圖十七、野外二分岔層數與形態模擬生長效率之比較圖。

由（圖十七[A]）可發現當階層數達六層時，其生長效率（benefit/cost 值）極差，而 3 階層的效率明顯最高，與野外調查結果在 2 階層及 4 階層的部分出現不符。因此，我們再進一步分類比較；其中在分支長度比較接近野外實際觀測值（0.5~0.7）時（圖十七[B]），與我們野外調查的結果（圖十七[D]）吻合，但是在理想狀況模擬時效率較佳分支長度比（0.8~1.0）中（圖十七[C]），顯示出 4 階層的效率顯著的比 2 階層的效率高出許多，這應該是造成總比較時，與野外情形不符的主要原因。

關於野外幾乎沒有分支長度比 0.8~1.0 的植株，推測是因為分支長度比如果增大至一定程度，會造成大量分支及小葉重疊，讓其能量獲取量下降，使得植株投資於生長的能量浪費了。所以野外狀況才會很少有分支長度比 0.8~1.0 的植株。

綜合以上，我們認為 GSP 模擬的生長模式計算出的 benefit/cost 值的變化可以解釋野外族群的生長形態為何以 3 階層最多，沒有 6 階層以上的個體。而後可以發現模擬的理想型態與自然形態相符合並可互相驗證。

## 陸、結論

本實驗之結論總共可分為以下幾點：

- 一、芒萁羽狀複葉分枝長度及分岔角度有往外層 而縮短與遞減的趨勢。
- 二、GSP模擬幾種分枝長度及分岔角度形態變化，結果野外形態確實有較佳的生長效率。
- 三、羽狀複葉分岔疊代形態，野外調查的結果以3階層之植株數量最多，極少有5階層的個體，更未發現分岔達6階層之個體。
- 四、GSP模擬幾種分岔層數形態變化，生長效率變化結果也與野外調查結果相似。
- 五、綜合所有實驗並將野外實際數據及理論模擬數據進行比對後，發現芒萁的樹狀碎形生長模式能讓能量收支 (benefit/cost) 達最佳化，有較佳的生長效率，有助成為優勢種。

## 柒、參考文獻

吳鼎武，2006。淺論運算美與碎形幾何

周德原、黃啟穎、孫蘭芳、胡苓芝，2003，基礎生物。南一書局。

桂德君，2004。環境因素對菊花種龍鬚菜外表形態碎形維度的影響。國立中山大學海洋生物研究所碩士論文，未出版，高雄市。

郭城孟，2001，蕨類入門。遠流出版社。

郭立園，2006，台灣大百科—芒萁。行政院文建會。

廖思善，2006，動手玩碎型。天下遠見出版社。

史都華，2000，生物世界的數學遊戲，天下文化。

Mandelbrot, B.B. 1976. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractal dimension. Science 156:636-638.



彩圖一、芒萁形態外觀



彩圖二、芒萁覆蓋於坡地(側面)



彩圖三、芒萁覆蓋於坡地(正面)



彩圖四、芒萁假二分岔形態



彩圖五、休眠芽



彩圖六、小葉重疊面積(陰影部分)



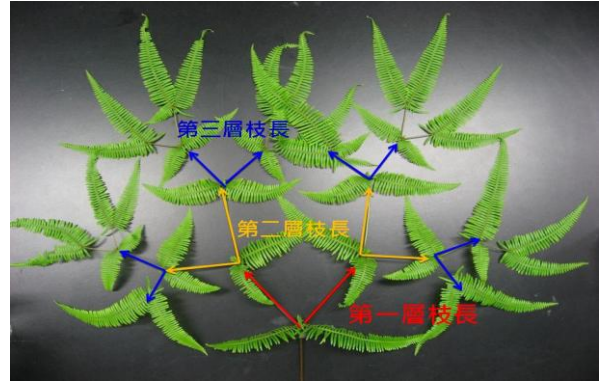
彩圖七、芒萁下無其他植物(遠照)



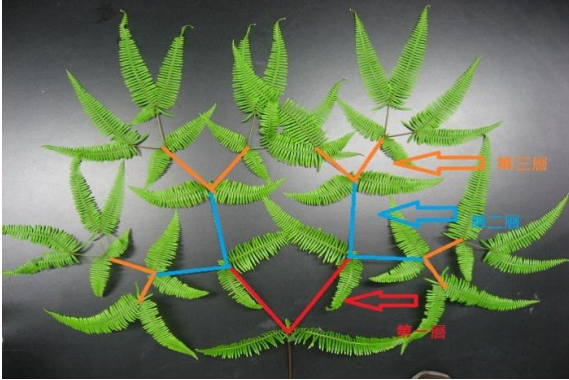
彩圖八、芒萁下無其他植物(近照)



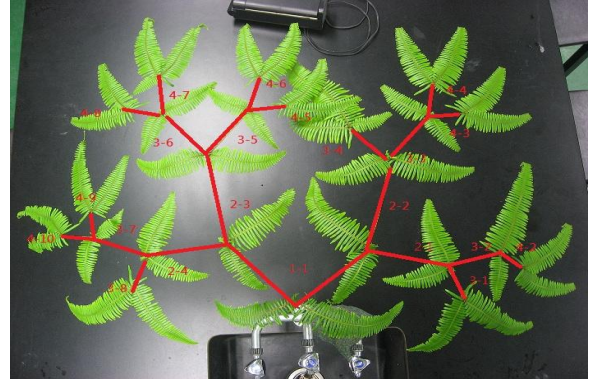
彩圖九、金面山樣區



彩圖十、同階層示意圖



彩圖十一、不同階層示意圖



彩圖十二、枝條編號示意圖



彩圖十三、一分岔形態



彩圖十四、二分岔形態



彩圖十五、三分岔形態



彩圖十六、四分岔形態



## 【評語】 040706

1. 書面及看板之資料內容清晰詳實。
2. 解釋表達能力清楚、詳細。
3. 利用數學理論應用在生物研究，具跨領域研究，值得鼓勵。
4. 建議以建立之模式，找尋其他作物加以驗證，加強實驗結果。
5. 以此理論做基礎，未來探討果樹之修剪，建築物之採光等之應用。