階差數列的代數結構及級數和

國小教師組數學科第三名

高雄市凱旋國民小學　　　　　　　　作　　者：張進安、陳弘行

一、研究動機

㈠在許多智力測驗的題目中，都有數列塡充，用來測驗我們的歸納能力，而"降階法"是發現一般項規律的方法，有時需要多降幾階才會發現規律性，這些高階數列有那些性質？能不能定義二元運算？數列的運算保留了那些性質？改變了那些性質？能建立起什麼層次的代數結構？階差級數有沒有求和公式？

㈡"追求數學結構之完美"也是支持我們深入研究的動機。

二、研究要領與目的

㈠探討階差數列的各種性質。

㈡探討階差數列與等差數列及等比數列的關係。

㈢如何定義階差數列的二元運算，建立可能的代數結構。

㈣階差級數公式的導出，證明及應用。

三、研究方法

㈠從自然數之各種數列舉實例觀察，分析變性及不變性。

㈡歸納變性的規律性，提出假設並加以驗證。

㈢用一般項代入，演繹證明各假設，提出定理及推論。

㈣將結果由自然數系擴展至有理數或實數系，並依其條件，建立可能的代數結構。

四、研究過程與結果

爲方便說明及使運算有意義，首先對本研究使用之符號加以定義

1. $P_r^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-r)!} & 若 n \geqslant r \quad n, r \in N \cup \{0\} \\ 0 & 若 n < r \quad n, r \in N \cup \{0\} \end{cases}$

2. $C_r^n = \dfrac{1}{r!} P_r^n$

3. $0! = 1$

(一)階差數列的性質

什麼是階差數列？簡單說明如下：

一數列$\{a_n\}$經過一次降階得另一數列$\{b_n\}$其中

$b_1 = a_2 - a_1$，$b_2 = a_3 - a_2$，……，

$b_n = a_{n+1} - a_n$

若$b_1 = b_2 = \cdots = b_n \fallingdotseq 0$，則我們稱$\{0_n\}$ 為一階數列，即通稱之等差數列，b_r 為其公差。

若$\{b_n\}$不為常數列，再經第二次降階得數列$\{c_n\}$，其中

$c_1 = b_2 - b_1$，$c_2 = b_3 - b_2$……，$c_n = b_{n+1} - b_n$

若$\{c_n\}$為常數列，則我們稱$\{a_n\}$為二階數列，c_1 稱為二階公差。依此類推，一數列經過 r 次降階後始得常數列$\{m_r\}$（因此$m_r \fallingdotseq 0$），則稱此數列為 r 階數列，且其第 r 階公差為m_r。

若一數列無論經多少次降階，仍不為常數列，則稱此數列不為階差數列。

<例>

等差數列：	2	6	10	14	18	22	26…………
		$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$
第一次降階：		4	4	4	4	4	4………

一階公差$m_1 = 4$

＜例＞

三 階 數 列：1　2　5　11　21　36………

∨　∨　∨　∨　∨

第一次降階：　1　3　6　10　15

∨　∨　∨　∨

第二次降階：　2　3　4　5

∨　∨　∨

第三次降階：　1　1　1　……三階公差$m_3 = 1$

上例子中可以看出，階差數列要比等差數列及等比數列需要更多的條件，等差數列只要有首項 a_1 及公差d，等比數列只要有首項a_1 及公比 r，這個數列就被確定了，但只給首項 a_1 及r階公差是否能確定一個階差數列呢？請看下列例子。

＜例＞

$\boxed{1}$　4　9　16　25　36……

∨　∨　∨　∨　∨

③　5　7　9　11

∨　∨　∨　∨

$\boxed{2}$　2　2　2

這個例子，首項 a_1 是 1，二階公差是 2 ，第一次降階後的首項是 3 ，我們發現一個 r 階差數列，除了決定於首項 a_1及r 階公差m_r外，其各次降階之首項絕對不可忽視。爲方便以下之說明及計算特將其代表符號定義如下：

設　$\{ a_n \}$爲一 r 階數列

a_1 ：r 階數列之首項

a_n ：r 階數列之一般項

m_i：r 階數列經 i 次降階之首項　$i = 1，2，\cdots，r$

m_r ：r 階數列之第 r 次降階之首項，亦即 r 階公差。

有了這些條件，我們可得到下列的性質及定理：

＜性質 1 ＞

若 $\{ a_n \}$ 爲一 r 階數列，則經 r 次降階可得唯一之 $a_1, m_1, m_2, \cdots\cdots m_r$。

＜性質 2 ＞

給任意之 $a_1, m_1, m_2, \cdots\cdots m_r$，恰可決定一 r 階數列。

我們將以下列二定理來證明以上兩個性質。

首先，我們用最基本的逐次降階來尋找 m_i 之性質：

設 $\{ a_n \}$ 爲階數列

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
\text{第一次降階：} & & a_2 - a_1 & & a_3 - a_2 & & a_4 - a_3 & & a_5 - a_4 \cdots\cdots & \\
 & & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
\text{第二次降階：} & & & a_3 - 2a_2 + a_1 & & a_4 - 2a_3 + a_2 & & a_5 - 2a_4 + a_3 & & \\
 & & & & \vee & & \vee & & & \\
\text{第三次降階：} & & & & a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1 & & a_5 - 3a_4 + 3a_3 - a_2 & & & \\
 & & & & & \vee & & & & \\
\text{第四次降階：} & & & & & a_5 - 4a_4 + 6a_3 - 4a_2 + a_1 & & & &
\end{array}$$

我們發現各次降階後，每項之係數完全相同，且這些係數恰爲正負相間之巴斯卡三角係數（二項係數），我們從

$$m_1 = a_2 - a_1$$

$$m_2 = a_3 - 2a_2 + a_1$$

$$m_3 = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1$$

$$m_4 = a_5 - 4a_4 + 6a_3 - 4a_2 + a_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_i = a_{i+1} - C^i_{i-1} a_i + C^i_{i-2} a_{i-1} - \cdots + (-1)^i a_1$$

於是大膽的寫下這個定理。

【定理一】：

設 $\{ a_n \}$ 爲一 r 階數列則對任意 $i \in N$

$$m_i = c_i^i a_{i+1} - c_{i-1}^i a_i + c_{i-2}^i a_{i-1} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^i c_0^i a_1$$
$$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \cdot c_{i-j}^i \cdot a_{i+1-j}$$

證明：考慮 r 階數列

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \cdots\cdots\cdots \\ & \vee & & \vee & & \vee & \end{array}$$

一次降階： $a_2 - a_1 \quad a_3 - a_2 \quad a_4 - a_3 \cdots\cdots\cdots$

$$\begin{array}{ccccc} a_{n-2} & & a_{n-1} & & a_n \\ & \vee & & \vee & \end{array}$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} \quad a_n - a_{n-1}$$

得 $m_1 = a_2 - a_1$

$= c_1^1 a_{1+1} - c_{1-1}^1 a_1$ 定理一成立

二次降階得

$$m_2 = (a_3 - a_2) - m_1$$
$$= (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1)$$
$$= a_3 - 2a_2 + a_1$$
$= c_2^2 a_3 - c_1^2 a_2 + c_0^2 a_1$ 定理一成立

設 $i = k$ 成立

即 $m_k = c_k^k a_{k+1} - c_{k-1}^k a_k + c_{k-2}^k a_{k-1} - \cdots + (-1)^k c_0^k a_1$

則 $m_{k+1} = c_k^k a_{k+2} - c_{k-1}^k a_{k+1} + c_{k-2}^k a_k - \cdots + (-1)^k c_0^k a_2 - m_k$

$$= c_{k+2}^k - (c_{k-1}^k + c_k^k) a_{k+1} + (c_{k-2}^k + c_{k-1}^k) a_k - \cdots$$
$$- (-1)^k c_0^k a_1$$

由巴斯卡公式

得 $m_{k+1} = c_{k+1}^{k+1} a_{k+2} - c_k^{k+1} a_{k+1} + c_{k-1}^{k+1} + a_k - \cdots$

$$+ (-1)^{k+1} c_0^{k+1} a_1$$

所以 $i = k + 1$ 亦成立

由數學歸納法，得對任意 $i \in N$，定理一成立。

【定理二】：

設 a_1 爲 r 階數列之首項，m_i 爲前 i 次降階之首項 $i = 1$，………，r，則

$$a_n = c_0^{n-1} a_1 + c_1^{n-1} m_1 + \cdots\cdots + c_{n-1}^{n-1} m_{n-1}$$

$$= a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{n-1} m_i$$

證明：$\because$ $a_1 = a_1 = c_0^{1-1} a_1$ $\therefore$定理成立

$$a_2 = a_1 + m_1 = c_0^{2-1} a_1 + c_1^{2-1} m_1$$

$\therefore$定理成立

設 $n = k$ 時 定理成立

即 $a_k = c_0^{k-1} a_1 + c_1^{k-1} m_1 + \cdots\cdots + c_{k-1}^{k-1} m_{k-1}$

當 $n = k + 1$ 時

$$a_{k+1} = a_k + c_0^{k-1} m_1 + c_1^{k-1} m_2 + \cdots + c_{k-1}^{k-1} m_k$$

$$= c_0^{k-1} a_1 + [c_1^{k-1} + c_0^{k-1}] m_1 + [c_2^{k-1} + c_1^{k-1}] m_2$$

$$+ \cdots + c_{k-1}^{k-1} m_k$$ （利用巴斯卡公式）

$$= c_0^k a_1 + c_1^k m_1 + c_2^k m_2 + \cdots + c_k^k m_k$$

$\therefore$ $a_{k+1} = c_0^k a_1 + c_1^k m_1 + \cdots\cdots + c_k^k m_k$

$\because$ $i = k + 1$ 時 定理亦成立

由數學歸納法得

$$a_n = c_0^{n-1} a_1 + c_1^{n-1} m_1 + \cdots + c_{n-1}^{n-1} m_{n-1}$$

$$= a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{n-1} m_i$$

<性質 3>

費磅那齊（ Fibonacci ）數列不爲階差數列

說明：1　1　2　3　5　8　13　21　34………

$\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$

0　1　1　2　3　5　8　13

$\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$

0　1　1　2　3　5

因爲費磅那齊數列之一般項

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n > 2)$$

所以其降階後

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-2}$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = a_{a-3}$$

……………………

仍爲一費磅拿齊數列，所以費磅拿齊數列無論降階幾次，除前有限項外，仍爲費磅拿齊數列。

＜性質 4＞

公比不是 1 的等比數列，不爲階差數列。

說明：

設首項爲 $a_1 \neq 0$，公比爲 r，$r \neq 1$，$r \neq 0$

則等比數列爲

$$a_1 \qquad a_1 r \qquad a_1 r^2 \qquad a_1 r^3 \cdots a_1 r^{n-1}$$

$$\vee \qquad \vee \qquad \vee$$

第一次降階　$a_1(r-1)$　$a_1 r(r-1)$　$a_1 r^2(r-1)$

得新數列仍爲等比數列，其首項爲 $a_1(r-1)$，公比仍爲 r

第二次降階，可得新數列

$$a_1(r-1)^2,\ a_1 r(r-1)^2,\ \cdots a_1 r^n (r-1)^2$$

仍爲等比數列，其首項爲 $a_1(r-1)^2$，公比仍爲 r 依此類推，可得如下之定理：

【定理三】

首項 a_1，公比 r 之等比數列經 i 次階差後得另一等比數列，

其首項爲$a_1(r-1)^i$，公比仍爲r。

<性質5>

除常數列外，一收歛數列不爲階差數列。

即"階差數列"必不收歛。

證明：設$\{a_n\}$收歛於a_0，且$\{a_n\}$爲r階數列，則r次降階爲一常數列。

但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+i} = a_0$

對任意$i\in N$均成立

令 $\{b_n\}$爲r次降階後之數列，則由定理一

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_{n+r+1} - c^r_{r-1}a_{nr} + c^r_{r-2}a_{n+r-1} - \cdots + (-1)^r a_n\}$$

$$= a_0\left[c^r_r - c^r_{r-1} + c^r_{r-2} - \cdots + (-1)^r c^r_0\right]$$

$$= 0$$

則$\{b_n\}$爲0列，由階差數列定義，$\{a_n\}$只爲$r-1$階，與假設矛盾，故證明收歛數列不爲階差數列。

<性質6>

r階差數列去掉前有限項仍爲r階差數列，且m_r不變。

說明：本性質用反證法可輕易得證，在此省略。

<性質7>

設$\{m_{sn}\}$爲r階數列之第S次降階之數列，$1\leq S\leq r$，$n=1, 2, 3\cdots\cdots$

則$\{m_{sn}\}$爲$r-S$階，且$r-s$階公差仍爲m_r(證略)。

(二)階差數列與等差數列的關係

在性質三、四、五之中，我們提到費磅那齊數列，等比數列及收歛數列均不爲階差數列，且在研究中，我們發現一等比數列

與一 r 階數列，或費磅那齊數列與一 r 階數列，對應項和所成的新數列降 $r+1$ 階後仍爲等比數列及費磅那齊數列（因等比數列及費磅那齊數列降 $r+1$ 階仍爲等比數列及費磅那齊數列，而 r 階數列降 $r+1$ 階成爲 0 數列）那麼那些型態的數列才是階差數列呢？這些具有特殊型態的階差數列又有那些性質，這是研究重點。

首先，我用最簡單的數列“自然數數列”來探討它的階差性質

＜例＞

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1^3 & & 2^3 & & 3^3 & & 4^3 & & 5^3 & & 6^3 \cdots\cdots\cdots\cdots n^3 \cdots \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & \\
 & & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
 & & & 6 & & 6 & & 6 & \cdots\cdots\cdots m_3 = 6 = 3\,! & &
\end{array}
$$

＜例＞

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1^4 & & 2^4 & & 3^4 & & 4^4 & & 5^4 & & 6^4 & & 7^4 \cdots\cdots \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & 15 & & 65 & & 175 & & 369 & & 671 & & 1105 & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & 50 & & 110 & & 194 & & 302 & & 434 & & \\
 & & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
 & & & 60 & & 84 & & 108 & & 132 & & & \\
 & & & & \vee & & \vee & & \vee & & & & \\
 & & & & 24 & & 24 & & 24 & \cdots\cdots\cdots m_4 = 24 = 4! & & &
\end{array}
$$

依此類推，我們歸納出下一定理。

【定理四】

自然數的 r 次方數列爲 r 階數列，且經 r 次降階後，其第 r 階公差 $m_r = r\,!$

略證：

在此，m_r 可由定理一

$$m_r = c_r^r a_{r+1} - c_{r-1}^r a_r + \cdots + (-1)^r c_0^r a_1$$

將 $a_i = i^r$ 代入並用數學歸納法證明對任意 $n \in N$

$$c_n^n (n+1)^n - c_{n-1}^n n^n + c_{n-2}^n (n-1)^n - \cdots\cdots + (-1)^n c_0^n \cdot 1^n = n!\quad 恒成立$$

則得 $m_r = r!$，同時用數學歸納法可證明

$$c_{n+1}^{n+1} (n+2)^n - c_n^{n+1} (n+1)^n + c_{n-1}^{n+1} (n)^n - \cdots + (-1)^n c_1^{n+1} \cdot 2^n + (-1)^{n+1} c_0^{n+1} 1^n = 0$$

即得 $m_{r+1} = 0$　　所以本定理成立

因爲自然數數列是公差爲 1 的等差數列，若公差爲 1 的等差數列，若公差爲任意 d 時，是否仍具有這個性質，請看下列例子。

<例>

公差爲 2 的等差數列各項平方

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1^2 & & 3^2 & & 5^2 & & 7^2 & & 9^2 \cdots \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & 8 & & 16 & & 24 & & 32 & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & 8 & & 8 & & 8 & & \cdots\cdots m_2 = 8 = 2^2 \cdot 2!
\end{array}
$$

這些 m_r 與公差 d 及 r 有規律性的關係，於是又有下列定理。

【定理五】

公差爲 d 之等差數列，各項的 r 次方爲 r 階數列，且

$$m_r = d^r \cdot r!$$

關於定理五的證明，仍然運用定理一

$$m_r = c_r^r a_{r+1} - c_{r-1}^r a_r + c_{r-2}^r a_{r-1} - \cdots + (-1)^r c_0^r a_1$$

將各 a_i 項以 $a_i = [a_1 + (i-1)d]^r$ 代入

得 $m_r = c_r^r (a_1 + rd)^r - c_{r-1}^r [a_1 + (r-1)d]^r + \cdots + (-1)^r c_0^r a_1$

並用歸納法證明

$$c_n^n(a_1+nd)^n - c_{n-1}^n[a_1+(n-1)d]^n + \cdots + (-1)^n c_0^n a_1^n$$
$$= d^n \cdot n!$$

對任意　$n \in N$ 成立

及對任意　$n \in N$

$$c_{n+1}^{n+1}[a_1+(n+1)d]^n - c_n^{n+1}[a_1+nd]^n + c_{n-1}^{n+1}$$
$$[a_1+(n-1)d]^n - \cdots + (-1)^{n+1} c_0^{n+1} \cdot (a_1)^n = 0$$

均成立，則得證　$m_r = d^r \cdot r!$

及 $m_{r+1} = 0$ 所以本定理成立，且因本定理成立，則定理四成為本定理在 $d=1$ 之一特例。

【定理六】

數列 $\{P_r^n\}$，$n=1$，2，$3\cdots$ 為一 r 階數列，

且　$m_r = r!$

即　$\{1\cdot 2\cdot 3\cdots r$，$2\cdot 3\cdots\cdots r\cdot(r+1)$，
$3\cdot 4\cdots\cdots r(r+1)(r+2)$，$\cdots\cdots\}$

為一 r 階數列，且 $m_r = r!$，因為這個定理亦為下述定理七之特例，在此不予證明，但因本定理成立

而得　$$m_r = c_r^r \cdot p_r^{2r} - c_{r-1}^r \cdot p_r^{2r-1} + c_{r-2}^r \cdot p_r^{2r-2} - \cdots + (-1)^r c_0 p_r^{2r-r} = r!$$

及　$$m_{r+1} = c_{r+1}^{r+1} \cdot p_r^{2+1} - c_r^{r+1} \circ p_r^{2r} + c_{r-1}^{r+1} \cdot p_r^{2r-1} - \cdots\cdots + (-1)^{r+1} c_0^{r+1} p_r^r = 0$$

均為排列組合中之一恒等式。

<例>

$1\cdot 2$　　$3\cdot 4$　　$5\cdot 6$　　$7\cdot 8$　　$9\cdot 10\cdots\cdots$

$\vee$　　$\vee$　　$\vee$　　$\vee$

10　　18　　26　　34

$\vee$　　$\vee$　　$\vee$

8　　8　　8 $\cdots\cdots m_2 = 8 = 2^2 \cdot 2!$

【定理七】

一公差爲d的等差數列，a_1，$d \in Z+$ 其各項連續r個正整數的乘積爲r階數列，其第r階公差 $m_r = d^r \cdot r!$ 本定理因全涉及排列組合及階乘之運算，且變數有項次i，公差d及階數r三元，苦於無法直接證明於是採迂迴方法，去研究階差數列對應項作加法或乘法後所成新數列的變性及不變性，果然略有所得，利用這些結果，正好可證明定理七。

㈢階差數列的二元運算代數結構

從理論上來說，階差數列是把等差數列擴充，因爲如果我們把階差數列的構成因素 a_1，m_1，$m_2 \cdots m_r$ 作成有序對，那麼常數列（0階）可以寫成（a_1），是一維空間的運算元，等差數列即一階數列可以寫成（a_1，d）＝（a_1，m_1）是二維空間的運算元，二階數列可以寫成（a_1，m_2，m_2）是三維空間的運算元，依此類推，一個r階數列＝（a_1，m_1 $\cdots\cdots m_r$）是（r＋1）維空間的運算元，我們在研究前深切的盼望階差數列既可以表成運算元的形態，那麼是否存在有某種代數二元運算而形成一個群（group）或體（field）則是我們最關心的，下面是我們研究的一部份結論。

1. 階差數列的加法運算

首先：我們想到二等差數列對應項和仍爲等差數列，這是十分明顯的，但是對於2階的階差數列情形又是如何呢？經過我們的觀察和歸納以下是我們發現的幾個結果。

【定理八】

二個階差數列 $\{a_n\} = (a_1, g_1, g_2, \cdots g_t)$ 及 $\{b_n\} = (b_1, d_1, d_2, \cdots d_s)$，設 $t > s$ 對應項之和，仍爲階差數列，且其等差階r爲二階差數列中之較高階，即 $r = \max\{t, s\} = t$ 其第r階公差仍爲原較高階數列之公差（即 $m_r = g_t$）。

若　$t = s$

則　$m_r = g_t + d_s$

證明：由定理二

$$a_n = C_0^{n-1} a_1 + C_1^{n-1} m_1 + C_2^{n-1} m_2 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} m_{n-1}$$

代入　$\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 各項

則　$\{a_n\}$ 爲：$\{a_1, a_1 + g_1, a_1 + 2g_1 + g_2, \cdots\cdots,$
$a_1 + C_1^{n-1} g_1 + C_2^{n-1} g_2 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} g_{n-1}\}$

$\{b_n\}$ 爲：$\{b_1, b_1 + d_1, b_1 + 2d_1 + d_2 \cdots\cdots$
$b_1 + C_1^{n-1} d_1 + C_2^{n-1} d_2 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} d_{n-1}\}$

對應項和得數列　$\{c_n\}$，$c_i = a_i + b_i$

則　$\{c_n\}$ 爲　$(a_1 + b_1)$，$(a_2 + b_1) + (g_1 + d_1)$，
$(a_1 + b_1) + 2(g_1 + d_1) + (g_2 + d_2) \cdots$

一般項 c_n 爲

$(a_1 + b_1) + C_1^{n-1}(g_1 + d_1) + C_2^{n-1}(g_2 + d_2) + \cdots\cdots$
$+ C_{n-1}^{n-1}(g_{n-1} + d_{n-1})$

令　$c_1 = a_1 + b_1$，$m_1 = g_1 + d_1$，$\cdots$ $m_i = g_i + d_i$

則　$c_n = c_1 + C_1^{n-1} m_1 + C_2^{n-1} m_2 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} m_{n-1}$

正滿足階差數列一般項之公式，值得注意的是

因爲　$m_i = g_i + d_i$

若　$i > t$　則　$g_i = 0$　及

若　$i > s$　則　$d_i = 0$

所以　①若 $i > \max\{t, s\}$，則　$m_i = 0$

故　$\{c_n\}$ 之階數 $r = \max\{t, s\}$

②若 $\max\{t, s\} = t$　則　$m_r = g_t$

③若 $s = t$　則　$m_r = g_t + d_s$

【定理七之一】

數列 $\{a_n \cdot (a_n + 1) \cdot (a_n + 2) \cdots (a_n + r - 1)\}$，
$n \in N$，$\{a_n\} = (a_1, d)$，a_1，$d \in R$
爲 r 階數列，且　$m_r = d^r \cdot r!$

仍然成立，因爲在證明過程中與 a_n 及 d 是否屬於 N 並無關係。且下列定理仍將成立。

【定理七之二】

對任意常數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{r+1} \in R, \alpha_1 \neq 0, r \in N$

數列 $\{\alpha_1 n^r + \alpha_2 n^{r-1} + \cdots + \alpha_r n + \alpha_{r+1}\}$ $n = 1, 2, \cdots$

亦爲 r 階數列，且 $m_r = \alpha_1 \cdot r!$

略證：設 $\{a_n\} = \{\alpha_1 n^r + \alpha_2 n^{r-1} + \cdots + \alpha_{r+1}\}$

則 $a_i = \alpha_1 i^r + \alpha_2 i^{r-1} + \cdots + \alpha_{r+1}$

對任意 $i \in N$

所以 $\{a_n\} = \{\alpha_1 n^r\} \oplus \{\alpha_2 n^{r-1}\} \oplus \cdots \oplus \{\alpha_{r+1}\}$

$= \alpha_1 \{n^r\} \oplus \alpha_2 \{n^{r-1}\} \oplus \cdots + \alpha_{r+1} \{1\}$

但 $\{n^r\}$ 爲最高階（r 階），所以 $\alpha_1 \{n^r\}$ 之 r 階公差爲 $\alpha_1 \cdot r^1$，根據推論一 $\{a_n\}$ 仍爲 r 階，且

$m_r = \alpha_1 \cdot r!$

【定理九】

設 G 爲所有階差數列的集合

則（G，$\oplus$）爲一交換群（commutaive group）。

【定理十】

二等差數列對應項的積爲2階數列且 $m_2 = g_1 \cdot d_1 \cdot 2!$

其中 g_1，d_1 爲二等差數列的公差。

證明：

設 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 爲二等差數列公差各爲 g_1，d_1

令 $c_i = a_i \cdot b_i \qquad i = 1, 2 \cdots\cdots$

則 $c_n = [a_1 + (n-1) g_1] \cdot [b_1 + (n-1) d_1]$

$= a_1 b_1 + (n-1)(a_1 d_1 + b_1 g_1) + (n-1)^2 g_1 d_1$

其一次降階各項爲 $c_n - c_{n-1}$，$n \geqslant 2$

則 $c_n - c_{n-1} = [a_1 b_1 + (n-1)(a_1 d_1 + b_1 g_1) + (n-1)^2 g_1 d_1] - [a_1 b_1 + (n-2)(a_1 d_1 + b_1 g_1) + (n-2)^2 g_1 d_1]$

$= a_1 d_1 + b_1 g_1 + (2n-3) g_1 d_1$

其二次降階各項爲 $(c_n - c_{n-1}) - (c_{n-1} - c_{n-2}), n \geqslant 3$

則對任意 $n \geqslant 3$，$(c_n - c_{i-1}) - (c_{n-1} - c_{n-2})$

$$= [a_1d_1 + b_1g_1 + (2n-3)g_1d_1]$$
$$- \{a_1d_1 + b_1g_1 + [2(n-1)-3]g_1d_1\}$$
$$= [(2n-3)-(2n-5)]g_1d_1$$
$$= 2g_1d_1 \quad 而 2g_1d_1 與 n 無關$$

所以 $\{c_n\}$ 爲二階數列且 $m_2 = 2g_1d_1$

根據定理十，若我們定義二數列的乘法爲其對拜項之積所成之數列，即

定義：$\{a_n\} \otimes \{b_n\} = \{c_n\}$

$$\Longleftrightarrow c_n = a_n \cdot b_n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

【定理十一】

任意 r 個等差數列，對應項的連乘積爲 r 階數列，且 $m_r = d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots d_r \cdot r!$，其中 d_i，$i = 1, 2 \cdots r$ 爲各等差數列的公差。

因爲對應項的連乘積適合結合律，而定理十告訴我們：二等差數列對應項的積爲 2 階數列且 $m_2 = d_1 \cdot d_2 \cdot 2!$，我們僅須證明預備定理“一 r 階數列 $(a_1, m_1, \cdots, m_r)$ 與一等差數列 (b_1, d) 對應項的積爲 $r+1$ 階數列，且 $m_r+1 = m_r \cdot d \cdot (r+1)$。”成立，則定理十一可用數學歸納法證明。

【定理十二】

二個階差數列 $(b_1, g_1, g_2, \cdots, g_t)$ 及 $(c_1, d_1, d_2, \cdots d_s)$

$g_t \neq 0$

對應項的積爲 $t+s$ 階數列，且其首項爲 $b_1 \cdot c_1$, $t+s$

$d_s \neq 0$

階公差爲 $g_t \cdot d_s \cdot C_t^{t+s}$

這個定理可以涵概定理十，十一及其預備定理，但在證明過程中，若一一去討論其一般項則十分複雜，於是我們考慮到

可利用基底的乘積去解釋其一般性，因爲數列之“$\oplus$”“$\otimes$”均定義在對應項在R中之“＋”，“・”所以分配律成立，我們僅須證明對任意 i，$j \in N$

$$(\underbrace{0,0\cdots0}_{i-1\text{個}},1)\otimes(\underbrace{0,0\cdots}_{j-1\text{個}},1)$$ 之階數恰爲$i+j$階且 $i+j$ 階公差 $m_{i+j}=1\cdot1\cdot c_i^{i+j}$，則

$$\{b_n\}\otimes\{c_n\}=[b_1(1)\oplus g_1(0,1)\oplus\cdots\oplus g_t(0,0,\cdots0,1_t)]\otimes[c_1(1)\oplus d_1(0,1)\oplus\cdots\oplus d_s(0,0,\cdots,0,1_s)]$$

$$=b_1c_1[(1)\otimes(1)]\oplus b_1d_1[(1)\otimes(0,1)]\oplus\cdots\oplus g_td_s(0,\cdots0,1_t)\otimes(0,0\cdots0,1_s)$$

在此最高階爲 $(0,0\cdots0,1_t)\otimes(0,0\cdots0,1_s)$ 之階

即爲 $t+s$ 階，且 $m_{t+s}=g_t\cdot d_s\cdot c_t^{t+s}$

現在證明：$(0,0\cdots,1_i)\otimes(0,0\cdots0,1_j)$

i，$j\in N$ 之階數恰爲 $i+j$ 階，且

$m_{i+j}=c_i^{i+j}$

令 $(0,0\cdots0,1_i)\otimes(0,0,\cdots0,1_i)$

$=\{a_n\}$

由定理二得 $a_n=c_i^{n-1}\cdot c_i^{n-1}$

再由定理六

$\{P_r^n\}$ 爲 r 階數列，且 $m_r=r!$

但 $\dfrac{P_r^n}{r!}=c_r^n$

所以 $\dfrac{1}{r!}\{P_r^n\}=\{c_r^n\}$ 亦爲 r 階數列

且 $m_r=\dfrac{r!}{r!}=1$

所以 $a_n = c_r^{n-1}$. c_j^{n-1}

$$= c_i^{n-1} \cdot \frac{1}{j!} [(n-1)(n-2)\cdots(n-j)]$$

則 $\{a_n\} = \frac{1}{j!}\{c_i^{n-1}\} \otimes \{(n-1)\} \otimes \{n-2\} \otimes \cdots \otimes \{n-j\}$

因為 $\{c_i^{n-1}\}$ 為 i 階，i 階公差為 1

而 $\{n-1\}, \{n-2\}, \cdots, \{n-j\}$ 均為 1 階，公差為 1

由定理十一之預備定理，每次取上式左邊二項之乘積逐次計算得

$$m_r = \frac{1}{j!} \cdot 1 \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdots\cdots (i+j)$$

$$= c_i^{i+j} = c_j^{i+j}$$

且 $r = i + j$

至此本定理已完成證明。遺憾的是我們無法歸納出階差數列的乘法"$\otimes$"公式，因為遇到高階相乘積，各次降階之首項與原來二個階差數列之各次降階首項關係極為複雜，下面舉例說明。

<例>

$(b_1, g_1, g_2) \otimes (c_1, d_1, d_2)$，即 $t = 2$，$s = 2$

$= (b_1c_1,\ c_1g_1 + d_1b_1 + d_1g_1,$

$c_1g_2 + 2d_1g_1 + 2d_1g_2 + d_2b_1 + 2d_2g_1 + d_2g_2,$

$3d_1g_2 + 3d_2g_1 + 6d_2g_2,\ 6d_2g_2)$

得 $m_r = 6g_2d_2 = c_2^{2+2} \cdot g_2 \cdot d_2$

且 $r = 2 + 2 = 4$

(四)階差級數公式

等差級數及等比級數均有公式可求和，我們也希望階差級數也有一個公式能直接由其構成條件 a_1，$m_1 \cdots m_r$ 及項次 n 來求

出前 n 項之和，這個問題看似困難，其實容易，我們利用定理二及巴斯卡公式就可證得下列階差級數定理。

【定理十三】

設 $\{a_n\} = (a_1, m_1, m_2, \cdots m_r)$

若 $s_n = \sum_{i=1}^{n} = a_i$

則 $s_n = c_1^n a_1 + c_2^n m_1 + c_3^n m_2 + \cdots + c_{r+1}^n m_r$

$$= c_1^n a_1 + \sum_{i=1}^{r} c_{i+1}^n m_i$$

證明：由定理二

$$a_i = c_0^{i-1} a_1 + c_1^{i-1} m_1 + \cdots + c_{i-1}^{i-1} m_{i-1}$$

$$= a_1 + \sum_{j=1}^{i-1} c_j^{i-1} m_j$$

則 $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_1 + \sum_{j=1}^{i-1} c_j^{i-1} m_j \right)$$

$$= n a_1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} c_j^{i-1} m_j$$

$$= n a_1 + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_j^{i-1} \right) m_j \right]$$

由巴斯卡恒等式 $c_j^{i-1} = c_{j+1}^{i} - c_{j+1}^{i-1}$

得 $\sum_{i=1}^{n} c_j^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} [c_{j+1}^{i} - c_{j+1}^{i-1}] = c_{j+1}^{n}$

代入上式得 $s_n = na_1 + \sum_{j=1}^{i-1} c_{j+1}^{n} m_j$

所以 $s_n = na_1 + c_2^n m_1 + c_3^n m_2 + \cdots + c_i^n m_{i-1}$

但若 $t > r$ 則 $m_t = 0$

故得證 $s_n = c_1^n a_1 + c_2^n m_1 + c_3^n m_2 + \cdots + c_{r+1}^n m_r$

$$= c_1^n a_1 + \sum_{i=1}^{r} c_{i+1}^n m_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

且若只知各 a_n 項，而不知 m_i，則將定理一

$m_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j - c_{i-j}^{i}\ a_{i+1-j}$ 代入上式可得

$$s_n = c_1^n a_1 + \sum_{i=1}^{r} c_{i+1}^n [\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \cdot c_{i-j}^{i} \cdot a_{i+1-j}] \cdots ②$$

則①與②均可稱爲階差級數公式

有了階級數公式，則等差級數公式就不足爲奇了，因爲它只是 $r = 1$ 時之特例，$s_n = c_1^n a_1 + c_2^n d$ 而已，下面我們利用階差級數公式來解若干問題作爲例子。

問題一： $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = ?$

解：因爲 $\{(2i-1)^3\}$ 爲一3階數列， 我們僅需列舉其前四項。逐次降階即可得 a_1，m_1，m_2，m_3

級數：$1^3 \quad + \quad 3^3 \quad + \quad 5^3 \quad + \quad 7^3 \quad + \quad 9^3 \quad + \quad \cdots\cdots$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & 26 & & 98 & & 218 & & 386 & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & 72 & & 120 & & 168 & & \\
 & & & \vee & & \vee & & & \\
 & & & 48 & & 48 & & &
\end{array}
$$

得：　$a_1 = 1$ ，$m_1 = 26$ ，$m_2 = 72$ ，$m_3 = 48$

所以　$s_n = c_1^n \cdot 1 + c_2^n \cdot 26 + c_3^n \cdot 72 + c_4^n \cdot 48$

$= n^2 (2n^2 - 1)$

數學歸納法將證明這結果對任意 $n \in \mathrm{N}$ 均正確。

問題二：$\sum\limits_{i=1}^{n} i^5 = ?$

解：因為 $a_1 = 1$ ，$a_2 = 2^5$ ，$a_3 = 3^5$ ，

$a_4 = 4^5$ ，$a_5 = 5^5$ ，$a_6 = 6^5$

代入公式②

$$s_n = c_1^n a_1 + \sum_{i=1}^{r} c_{i+1}^n \left[\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \cdot c_{i-j}^i \cdot a_{i+1-j} \right]$$

$$= c_1^n + c_2^n (2^5 - 1) + c_3^n (3^5 - 2 \cdot 2^5 + 1) +$$

$$c_4^n (4^5 - 3 \cdot 3^5 + 3 \cdot 2^5 - 1) +$$

$$c_5^n (5^5 - 4 \cdot 4^5 + 6 \cdot 3^5 - 4 \cdot 2^5 + 1) +$$

$$c_6^n (6^5 - 5 \cdot 5^5 + 10 \cdot 4^5 - 10 \cdot 3^5 + 5 \cdot 2^5 - 1)$$

$$= c_1^n + c_2^n \cdot 31 + c_3^n \cdot 180 + c_4^n \cdot 390 + c_5^n \cdot 360 + c_6^n \cdot 120$$

其實這樣的代入法，並不比逐次降階來得暢快。

級數 $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + \cdots\cdots$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & 31 & & 211 & & 781 & & 2101 & & 4651 & & 9031 & \cdots \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & 180 & & 570 & & 1320 & & 2550 & & 4380 & & \\
 & & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
 & & & 390 & & 750 & & 1230 & & 1830 \cdots\cdots & & & \\
 & & & & \vee & & \vee & & \vee & & & & \\
 & & & & 360 & & 480 & & 600 & & & & \\
 & & & & & \vee & & \vee & & & & & \\
 & & & & & 120 & & 120 & & \cdots\cdots\cdots m_5 = 5\,! & & &
\end{array}
$$

則 $$\sum_{i=1}^{n} i^5 = c_1^n \cdot 1^5 + c_2^n \cdot 31 + c_3^n \cdot 180 + c_4^n \cdot 390 + c_5^n \cdot 360 + c_6^n \cdot 120$$

用此方法，則自然數之任意 r 次方級數均有公式解，且其型態必爲

$$s_n = a_{r+1}\, n^{r+1} + a_r n^r + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n$$

其中 a_1 ，$a_2 \cdots a_{r+1}$ 爲有理數係數，又因其含 n 之最高次項爲 $c_{r+1}^n \cdot m_r$ ，而 $m_r = r\,!$

所以 $$c_{r+1}^n \cdot m_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r)\cdot r\,!}{(r+1)\,!}$$

$$= \frac{1}{r+1}\, n\,(n-1)(n-2)\cdots(n-r)$$

故 $$a_{r+1} = \frac{1}{r+1}$$

問題三：求三階級數

$$1+1+1+3+9+21+41+\cdots \text{至第 10 項}$$

解：乍看之下，這是毫無頭緒的問題，因爲沒有一般項，又像不規則數列，事實上，只要降階幾次，找到 r 階公差問題就解決了。

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 3 & & 9 & & 21 & & 41 & / & 71 & & 113 & & 169 \\
& \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & / & \vee & & \vee & & \vee & \\
& 0 & & 0 & & 2 & & 6 & & 12 & & 20 & / & 30 & & 42 & & 56 & \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & / & \vee & & \vee & & \vee & & \\
& & 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & / & 10 & & 12 & & 14 & & \\
& & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & / & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
& & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & / & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & m_3=2
\end{array}$$

$$s_{10} = C^{10}_1 \cdot 1 + C^{10}_2 \cdot 0 + C^{10}_3 \cdot 0 + C^{10}_4 \cdot 2$$

$$= 10 + 2 \cdot C^{10}_4$$

$$= 430 = 1+1+1+3+9+21+41+71+113+169$$

斜線隔間部份是我們利用升階法去找未知項以便驗證。

五、結　論

(一)巴斯卡公式及巴斯卡三角（二項係數）在階差數列中扮演最主要的角色，不論是一般項或各次降階之首項及級數求知公式均靠二者來建立。

(二)階差數列以 a_1 及 m_i 用有序對（ a_1 ，m_1 ，$\cdots m_r$ ）方式來表示，不僅簡化了表達方式及計算過程，更能定義出數列加法（ G ，$\oplus$ ）及數列乘法（ G ，$\otimes$ ）成爲交換群及交換亞群，但因（ G ，$\otimes$ ）無反元素，所以（ G ，$\oplus$，$\otimes$ ）無法成爲代數體。僅得爲整域（ integral domain ）。

(三)在舉例觀察的過程中，我們雖限於正整數，但在證明中，除了項次及階數顯然爲自然數（或 0 ）外，其餘各項，及各次降階

之首項並未加以限制。因此，階差數列集G同構於R^{∞}，任意G_r同構於R^{r+1}，均成爲佈於R的向量空間，且具有標準基底

$$\{(1),(0,1),(0,0,1),\cdots,(0,\cdots,0,1)\}$$

(四)階差級數公式的證明可導出所有型如

$\sum_{i=1}^{n}[a_1+(i-1)d]^r$ 的公式，所以 $\sum_{i=1}^{n} i^r$ 就不足爲慮了。

評語：本研究從煩雜的數列中整理出規則性，實是難能可貴。