漸近多邊形

國小教師組數學科第一名

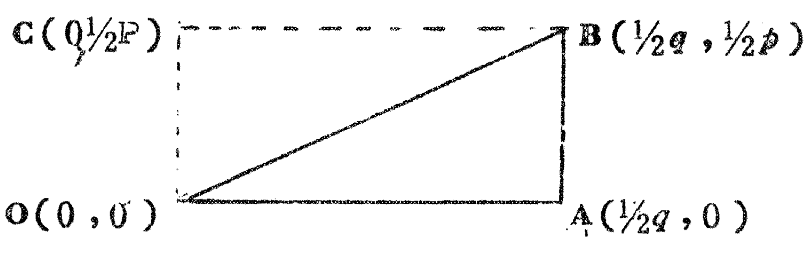
宜蘭縣順安國小　　　　　　　　　　　　　　　　作　　者：李鐘榮

一、研究動機

在過去研究Gauss二次剩餘互逆定律$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\times\frac{q-1}{2}}$的證明過程中，發現下列這個問題：

設$(q,p)=1$，$\triangle OAB$的內部包含有多少格點？

或$\displaystyle\sum_{i=1}^{(q-1)/2}[ip/q]=?$



（圖1）

這個問題乍看之下，並沒有什麼特別之處，可是當仔細推敲：A，B並非在格點之上，也就是$\overline{OB}$並沒有將矩形OABC內部的格點平分，就會發現這個問題之難也會令人吃驚，而當時Gauss並沒有

回答它，只是在討論「互逆」時，極巧妙的閃避這個問題，但這個疑問依然懸而未決。

二、研究目的

爲此長久以來的困惑未釋，也基於作者對數學那股狂熱的執著，故願竭其所能全力以赴，未達目的決無反顧，終至引進漸近分數的理論，進而發現「漸近多邊形，以爲有效的解決工具；再經引申與推廣，益覺漸近多邊形爲一令人欣慰的結果。

三、研究內容與結果

(一)定理 10.：設 O^1 爲自然座標系 $s\equiv(O;e_1,e_2)$ 上的格點，$s^1\equiv(O;e_1,e_2)$ 爲 s 經過 $\overrightarrow{OO^1}$ 而得的新座標系（或稱 s^1 爲 s 將原點 O 平移至 O^1 所得的座標系）；則

$$P\text{爲 } s \text{ 上之格點} \Leftrightarrow P \text{ 爲 } s^1 \text{ 上之格點}$$

(二)定理 20.：設 $\overline{OP}=\overline{AB}$，且 A 爲格點，則 $\overline{OP}$，$\overline{AB}$ 上有相等之格點。

(三)定理 30.：設 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，$A$，$C$ 均爲格點則 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 上有相等之格點。

(四)定理 40.：設 $gcd(q、p)=1$，$A=(q,p)$ 爲格點，則 $\overline{OA}$ 上除兩端點 O，A 之外無格點。

(五)定理 50.：設 a，b 爲任意數（q，$a\neq 0$），且 $\frac{b}{a}=\frac{p}{q}$ 使

$gcd(p,q)=1$，$[\frac{a}{q}]=n$，$A=(a,b)$ 則 $\overline{OA}$ 上有 $n+1$ 個格點，其爲 $P_0=O$，$P_1=(q,p)$，$(P_2=(2q,2p)$ ………………

$P_n=(nq,np)$

(六)定理 60.：設 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 各頂點都在格點上，其面積

爲 a 各邊上之格點數爲 ℓ ，其中部之格點數爲 n ，則

$$n = a + 1 - \frac{\ell}{2}$$

(七)定理 70。：設 m ， n ， π_i ， q 均爲整數，且 $q \neq 0$

1. $\alpha \in \{ \pi_i \mid m < \pi_1 < n \}$ 則稱 α 或 π_i 歷經 $m+1$ ，$m+2$ ，………… $n-1$

2. $\alpha \in \{ \frac{\pi_i}{q} \mid m < i , j , \pi_i , \pi_j < n , i = j, \Leftrightarrow \pi_i = \pi_j \}$ 則稱 α 或 $\frac{\pi_i}{q}$ 歷經 $\frac{m+1}{q}$, $\frac{m+2}{q}$, …… $\frac{n-1}{q}$ 而無相同者。

(八)定理 100 ：

設 1. $g\ c\ d\ (q, p) = 1$

2. $0 < i , j < q$

3. $d_i = \frac{ip}{q} - \left[\frac{ip}{q}\right]$ ， $\beta_i = 1 - \alpha_i$

4. $\pi_i = ip - q \left[\frac{ip}{q}\right]$ ， $\pi_i = q - \pi_i$

則 5. $d_i = \frac{\pi_i}{q}$ ， $\beta_i = \frac{\pi_i}{q}$

6. $0 < \pi_i , \pi_i < q$

7. $i\ p \equiv \pi_i \equiv - \pi_i\ q\ \ mad\ \ q$

8. $i = j \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha_j$ ， $\beta_i = \beta_j$

9. α_i ， β_i 各歷經 $\frac{1}{q}$, $\frac{2}{q}$, ……… $\frac{n-1}{q}$ 而無相同著。

(九)定義 105：$\overline{AD} \neq y$ 軸，直線 $x = i$ 交 $\overline{OA}$ 於 $P(i, a)$，當 $P(i, a)$ 存在時，若 $c > a > b$ 則稱 $C(i, c)$ 在 $\overline{OA}$ 之上方，$B(i, b)$ 在 $\overline{OA}$ 之下方。

(十)定理 110：

設 1. $gcd(q, p) = 1$，$A = (q, p)$

2. $0 < i < q$

3. $x = i$ 交 $\overline{OA}$ 於 A_i

4. c_i，B_i 各爲 $x = i$ 上，下上方距離 A_i 最近的格點（亦即（$\overline{A_i C_i}$，$\overline{A_i B_i}$ 上除 B_i，C_i 之外無格點）

則 $d(A_i, B_i) = \dfrac{ip}{q} - [\dfrac{ip}{q}]$，$d(A_i, C_i)$

$$= [\frac{ip}{q}] + 1 - \frac{ip}{q}$$

證明：$0 < i < q$，故 $x = i$ 與 $\overline{OA}$ 存在交點 A_i

則 $A_i = (i, \dfrac{ip}{q})$，取 $B_i = (i, [\dfrac{ip}{q}])$，

$C_i = (i, [\dfrac{ip}{q}] + 1)$

由於 i，$[\dfrac{ip}{q}]$，$[\dfrac{ip}{q}] + 1$ 均爲整數，顯然 B_i，C_i 各爲 $x = i$ 上之兩格點。

又 $q \mid ip$ 知 A_i 非格點

由 Gauss 符號定義，以及 $[\dfrac{ip}{q}] \neq \dfrac{ip}{q}$

知：$0 < a(A_i, B_i) = \dfrac{ip}{q} - [\dfrac{ip}{q}] < 1$

$$0 < d(A_i, C_i) = 1 + [\frac{ip}{q}] - \frac{ip}{q} < 1$$

得：B_i ，C_i 各為$\overline{OA}$下，上方之格點，且 $\overline{A_i\ B_i}$ ，$\overline{A_i\ B_i}$ 上除 B_i ，C_i 不可能有格點，（因兩格點距離恒不小於 1 ）

此乃說明 B_i ，C_i 各為 $x=i$ 上而且在$\overline{OA}$，上方最近之點，且其距離各為

$$d\ (\ A_i\ ,\ B_i\ ) = \frac{ip}{q} - \left[\frac{ip}{q}\right]$$

$$d\ (\ A_i\ ,\ C_i\ ) = \left[\frac{ip}{q}\right] + 1 - \frac{ip}{q}$$

(十一)定理 120 ：假設如定理 100 ，定理 110 ，則 $x=i$ 上，且在$\overline{OA}$上方以及下方最近 A_i 之格點距離 α_i ，β_i ，各歷經$\frac{1}{q}$，$\frac{2}{q}$，………$\frac{q-1}{q}$而無相同者。

證明：於定理 110 中令 $\alpha\ (\ A_i\ ,\ B_i) = \alpha_i$ ，$d\ (A_i, C_i) = \beta_i$ ，再由定理 100 立得。

(十二)定理 130 ：

設 1. $g\ c\ d\ (\ q\ ,\ p\ ) = 1$

2. $\frac{p}{q}$之漸近分數分$\frac{p_0}{q_0}$，$\frac{p_1}{q_1}$，……$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$，$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$

3. $A = (\ q\ ,\ p\ )$ ，$B = (\ q\ ,\ \frac{q\ p_{n-1}}{q_{n-1}})$ ，$n > 1$

4. $x = q_{n-1}$ 交$\overline{OA}$，$\overline{OB}$於 A_1 ，B_1

則 $d\ (\ A_1\ ,\ B_1\ ) = \frac{1}{q}$

證明：由漸近分數性質： $0 < q_{n-1} < q_n = q$

知 ：$x = q_{n-1}$ 與$\overline{OA}$，$\overline{OB}$均有交點，即 A_1，B_1存在，且

$$A_1=(q_{n-1},\frac{q_{n-1}p_n}{q}),B_1=(q_{n-1},p_{n-1})\text{立得}(A_1,B_1)$$

$$=\sqrt{(q_{n-1}-q_{n-1})^2+(\frac{q_{n-1}p_n}{q_n}-p_{n-1})^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{q_{n-1}p_n-p_{n-1}p_n}{q_n})^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{1}{q_n})^2}=\frac{1}{q_n}=\frac{1}{q}$$

㈢定理 140：假設如 130，則$\triangle ABO$內部無格點。

證明：由漸近分數之性質知

$gcd(q_{n-1},p_{n-1})=1$，故$\overline{OB_1}$上除兩端B_1,O外無格點

又$B=(q,\frac{qp_{n-1}}{q_{n-1}})$, $\frac{qp_{n-1}/q_{n-1}}{q}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$

設$[\frac{p_n}{q_{n-1}}]=K$，則由定理50.知$\overline{OB}$上除O外恰有K個格點

，且爲$B_1(q_{n-1},p_{n-1})$，$B_2(2q_{n-1},2p_{n-1})$
……………$B_k(Kq_{n-1},Kp_{n-1})$設

$1\leq j\leq K$，直線$x=jq_{n-1}$交$\overline{OA}$於A_1，A_2………A_k,
今由$\triangle QA_1B_1\sim\triangle OA_2B_2\sim$………$\triangle OA_kB_k$，
立得各對應邊成比例，由$d(A_1,B_1)=\frac{1}{q}$(定理 130)
得$d(A_2,B_2)=\frac{2}{q}$………$d(A_k,B_k)=\frac{K}{q}$

若 B_1 在 $\overline{OA}$ 之下方，則 B_2，……… B_k 亦在 $\overline{OA}$ 之下方，由

(十四)定理 120 知在 $\overline{OA}$ 下方最近之格點與 A_i 距離歷經 $\frac{1}{q}$，$\frac{2}{q}$……

$\frac{K}{q}$ 而無相同者，今距離 $d(A_i, B_i) \leq \frac{K}{q}$ 之格點 B_1，B_2

……… B_k 全在 $\overline{OB}$ 之上，顯然在 $\overline{OA}$ 下方之其餘格點亦落在 $\overline{OB}$

(十五)定理 150：

設 i 爲整數，直線 $x=i$ 與 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 均有交點，設其爲 M，N 且 Q 爲 $\overline{MN}$ 上除了 M，N 以外之格點，則稱 Q 爲介於 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 之間的格點，並記爲

$$Q \in P(\overline{AB}, \overline{CD})$$

$\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 之間的格點數爲 $P(\overline{AB}, \overline{CD})$

(十六)定理 151：設 $P(\overline{AB}, \overline{CD}) = P(\overline{CD}, \overline{EF}) = 0$，且對 $x=i$，若與 $\overline{AB}$，$\overline{EF}$ 均有交點 $\Rightarrow$ $x=i$ 與 $\overline{CD}$ 必有交點；那麼 $Q \in P(\overline{AB}, \overline{EF}) \Rightarrow Q \in \overline{CD}$ 亦卽 $\overline{AB}$，$\overline{EF}$ 之間，除 $\overline{CD}$ 上之外沒有其他格點。

(十七)定理 152：設 $\overline{AB}$，$\overline{EF}$ 在 x 軸之投影 $\subset$ $\overline{CD}$ 在 x 軸之投影，且 $\overline{CD}$ 上沒有格點，$P(\overline{AB}, \overline{CD}) = P(\overline{CD}, \overline{EF}) = 0$ 則 $P(\overline{AB}, \overline{EF}) = 0$。

(十八)定理 153：設 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ 且 A，A_1 爲格點則 $P(\overline{AB}, \overline{AC}) = P(\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1})$。

(十九)定理 154：設 $A^1 \in \overline{OB}$ 上之一格點，且 $\overrightarrow{A^1P} = \overrightarrow{OA}$，則 $P(\overline{OB}, \overline{OA}) \geq P(\overline{A^1P}, \overline{A^1B})$

(二十)定理 155：設 $P(\overline{OB}, \overline{OA}) = 0$，$A^1$ 爲 $\overline{OB}$ 上的格點，作 $\overrightarrow{A^1P} = \overrightarrow{OA}$，則 $P(\overline{A^1P}, \overline{OB}) = 0$

(廿一)定理 156：設 C，B 各在 $\overleftrightarrow{OA}$ 之異側若 $\triangle \overline{OCB}$ 內無格點，且 $\overline{OC}$，$\overline{OB}$ 在 x 軸之投影恒落在 $\overline{OA}$ 在 x 軸之投影上則 $P(\overline{OC}, \overline{OA}) = P(\overline{OB}, \overline{OA}) = 0$

(廿二)定理 160：設 $gcd(q, p) = 1$，$A = (q, p)$

$q>1$ 而 $\frac{p_0}{q_0}$，$\frac{p_1}{q_1}$……$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$，$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p}{q}$ 爲 $\frac{p}{q}$ 之漸近分數，

且 $A=A_0=(q_n, p_n)$，$A_1=(q_{n-1}, p_{n-1})$………

……$A_i=(q_{n-i}, p_{n-i})$

$B=B_0=(q_n, \frac{q_n p_{n-1}}{q_{n-1}})$，$B_1=(q_{n-1}, \frac{q_{n-1} p_{n-2}}{q_{n-2}})$

………………$B_j=(q_{n-1}, \frac{q_{n-j} p_{n-j-1}}{q_{n-j-1}})$

$0\leq i, j\leq n$

則 1. $\triangle OAB$，$\triangle OA_1B_1$………$\triangle OA_nB_n$ 之內部無格點。

2. OB，OB_1………OB_n 與 $\overline{OA}$ 之間無格點。

證明：

1. 定理 140 知 $\triangle OAB$ 內部無格點，再由 $\frac{p_0}{q_0}$，$\frac{p_1}{q_1}$………

……$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 亦爲 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 之漸近分數，立得 $\triangle OA_1B_1$ 內部無格點，同理 $\triangle OA_2B_2$……$\triangle OA_nB_n$ 內部均無格點。

2. 由漸近分數之性質知 $\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\cdots\cdots<\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$，以及 $\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_3}{q_3}>\cdots\cdots>\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$，而得 A_i，A_{i+1} 在 OA 之異側 $(0\leq i<n)$，又 A_{i+1} 在 $\overline{OB_i}$ 上故 A_i，B_i 在 $\overline{OA}$ 之異側，因 $\overline{OA_i}$，$\overline{OB_i}$ 在 x 軸之投影＝區間 $[0, q_{n-1}]\subset[0, q_n]=\overline{OA}$ 在 x 軸之投影，再由定理 156 可得定理

定理 170（漸近格點與漸近綫段）

設 $gcd(q,p)=1$；$\frac{p_0}{q_0}$，$\frac{p_1}{q_1}$，………… $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$，

$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p}{q}$爲$\frac{p}{q}$之漸近分數，$0\leq a\leq q$，$A=(q,p)$

$P=(a,\frac{ap}{q})\quad a=b_{n-1}q_{n-1}+b_{n-2}q_{n-2}+\cdots\cdots b_0q_0$

其中 $a=[\frac{a}{q_{n-1}}]q_{n-1}+r_1$，$b_{n-1}=[\frac{a}{q_{n-1}}]$

$$r_1=[\frac{r_1}{q_{n-1}}]q_{n-2}+r_2\text{，}b_{n-2}=[\frac{r_1}{q_{n-2}}]$$

$$r_n=[\frac{r_n}{q_0}]q_0\text{，}b_0=[\frac{r_n}{q_0}]$$

再設 $\overrightarrow{OP_1}=(b_{n-1}q_{n-1},b_{n-1}p_{n-1})=b_{n-1}\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OP_2}=(b_{n-2}q_{n-2},b_{n-2}p_{n-2})+\overrightarrow{OP_1}=b_{n-2}\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OP_1}$$
$$\overrightarrow{OP_n}=(b_0q_0,b_0p_0)+\overrightarrow{OP_{n-1}}=b_0\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OP_{n-1}}$$

則P_1，P_2……P_n稱爲$\overline{OA}$在P之漸近格點，或$\overline{OP}$之漸近格點而$\overline{OP_1}$，$\overline{P_1P_2}$，$\overline{P_2P_2}$………$\overline{P_{n-1}P_n}$爲$\overline{OA}$在P之漸近線段或$\overline{OP}$之漸近綫段。

㈢定理 180，漸近線段定理：設$\overline{OA}$在P之漸近線段爲$\overline{OP_1}$，$\overline{O_1P_2}$，………$\overline{P_{n-1}P_n}$，則各漸近綫段與$\overline{OA}$之間無格點。

證明：由定理 160中

1. P_1爲$\overline{OB}$上之一格點，立得$\overline{OP_1}$與$\overline{OA}$之間無格點，即$P(\overline{OP_1},\overline{OA})=0$

2. 設$\overline{OB}$上之格點爲A_{10}，A_{11}，A_{12}………A_1b_{n-1}，其中$A_{10}=0$，$A_{11}=A_1$，$\overrightarrow{OA_{1i}}=i\overrightarrow{OA_1}$，$0\leq b_{n-1}$,另設$B_1=A_1(b_{n-1+1})$由定理 40 知在$\overline{A_{10}A_{11}}$，$\overline{A_{11}A_{12}}$…$\overline{A_1b_{n-1}A_1(b_{n-1+1})}$上除兩端點外均無格點，又因$\overline{OB}$

，$\overline{OA}$之間無格點，故各線段與$\overline{OA}$之間亦無格點。

若$P_1 = A_{1i}$，$0 \leq b_{n-1}$，作$\overrightarrow{P_1B_1} = \overrightarrow{OB_1}$，由定理155知$P$（$\overline{P_1B_1}$，$\overline{A_{1i},A_{1i+1}}$）$= 0$又$P_2$爲$\overline{P_1B_1}$上之格點，立得$P$（$\overline{P_1P_2}$，$\overline{A_iA_{i+1}}$）$= 0$又$\overline{P_1P_2}$在$x$軸之投影爲區間〔$iq_{n-1}$，$iq_{n-1} + b_{n-2}q_{n-2}$〕⊂區間〔$iq_{n-1}$，（$i-1$）$q_{n-1}$〕$= \overline{A_{1i}\ A_1}$（$i+1$）在$x$軸上之投影，由定理154知$P$（$\overline{P_1P_2}$　$\overline{OA}$）$= 0$

若$P_1 = A_1b_{n-1}$　則由〔$\dfrac{q_n}{q_{n-1}}$〕$= a_n$以及$q_n = q$

$= a_nq_{n-1} + q_{n-2}$知若$a_n = b_{n-1}$則$r_1 \leq q_{n-2}$，因此$b_{n-1} = 1$或0，故$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OA_2}$或$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{0}$，而$\overline{P_1P_2}$在$x$軸上之投影＝區間〔$b_{n-1}q_{n-1}$，$q_n$〕$= \overline{A_1b_{n-1}B}$在$x$軸上之投影，再由定理152知得$P$（$\overline{P_1P_2}$，$\overline{OA}$）$= 0$

3. 今由$g\ c\ d$（P_{n-1}，q_{n-1}）$= 1$以及$\dfrac{p_0}{q_0}$ …… $\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$，

$\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$亦爲$\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之漸近分數，將原點O移至P_1，再如(2)之結果，可得P（$\overline{P_2P_3}$，$\overline{A_{1i}\ A_{1(i+1)}}$）$= 0$
再得P（$\overline{P_2P_3}$，$\overline{OA}$）$= 0$

4. 同理而得其他。

㈤定理190：假設如定理160，且$1 \leq i \leq n$，則P（$\overline{OB_i}$，$\overline{OB_j}$）$= 0$，P（$\overline{OA_i}$，$\overline{OB_j}$）$= 0$

㈥定理191：假設如定理160，且A^1爲$\overline{OB_i}$上之格點，

1. 作$\overrightarrow{A^1P} = \overrightarrow{OA_j}$，$1 \leq i \leq j \leq n$，則$P$與$A_j$在$\overleftrightarrow{OA}$之同側。

2. 若$\overrightarrow{A^1B_j} = \overrightarrow{OB_j}$，$Q$爲$\overline{A^1B^1_j}$上之格點，則$Q$與$A_j$亦同側。

㈦定理200：漸近多邊形

設$\overline{OA}$在P之漸近格點爲P_1，P_2…………P_n，且P在x軸

之垂足為Q，則多邊形$O P_1 P_2 \cdots\cdots P_n Q$稱為$\triangle O P Q$之漸近格點多邊形，簡稱漸近多邊形，記為Ⅱ（$O$，$P_1$，$P_2 \cdots\cdots P_n$，$Q$）或簡記為：Ⅱ

㈢定理 210（漸近多邊形定理）：設Ⅱ（O，$P_1 \cdots\cdots P_n$，Q）為$\triangle OPQ$之漸近多邊形，且P_n不在$\overline{OA}$上，b_0，$b_1 \cdots\cdots b_{n-1}$如漸近格點定義中之b_0，$b_1 \cdots\cdots b_{n-1}$令$\triangle OPQ$內部的格點數$=f$（$\triangle$），Ⅱ（O，$P_1 \cdots\cdots P_n$ Q）內部的格點數為f（Ⅱ），$\phi = b_0 + b_2 \cdots\cdots b_{2k-e}$，其中$K = \left[\frac{n}{2}\right]$

$$e = \begin{cases} 0\text{，若}P_n\text{在}\overline{OA}\text{之上方} \\ 1\text{，若}P_n\text{在}\overline{OA}\text{之下方} \end{cases} \qquad \text{則}\quad f(\triangle) = f(\text{Ⅱ}) + \phi$$

證明：P_1P_2，$P_2P_3 \cdots\cdots P_{n-1} p_n$為$\overline{OP}$之漸近線段，由定理 180 知各線段與$\overline{OP}$之間無格點，故知$\triangle OPQ$內部之格點＝Ⅱ（$O$，$\overline{P_1, P_2}$，$\cdots\cdots P_n$，$Q$）內部之格點＋各$\overline{P_1 P_2} \cdots\cdots \overline{P_{n-1} P_n}$上且在$\triangle OPQ$內部之格點。

由漸近分數之性質知所有的（q_{2j}，p_{2j}）$0 \leq 2j \leq n$，均在$\overleftrightarrow{OP}$之下方，（q_{2j+1}，p_{2j+1}）在$\overleftrightarrow{OP}$之上方（$0 \leq 2j+1 \leq n$），今$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = b_{n-i}\ \overrightarrow{OA_i}$，由定理 193 知$\overleftrightarrow{P_{i-1}P_i}$，$1 \leq i < n$上除$P_{n-1}$外，其餘格點均與$A_i$在$\overleftrightarrow{OP}$之同側，顯然在$\overline{P_{i-1}P_i}$上有$b_{n-i}$個格點與$A_i$同側，今$A_i =$（$q_{n-i}$，$p_{n-i}$），又$A_i$在$\overline{OP}$之下方的充要條件為$n - i = 2j$，亦即$n - i$為偶數，故在漸近線段上，且在$\overline{OP}$下方之格點數，為所有的$b_{n-i}$，且$0 \leq n - i = 2j \leq n$之總和，亦即$b_0 + b_2 + \cdots\cdots b_{2k}$

而漸近格點除P_n在$\overleftrightarrow{OP}$下方時，落在$\triangle OAB$之邊上外，其餘各點均落在$\triangle OAB$之內部，故

$$f(\triangle) = f(\text{Ⅱ}) + b_0 + b_2 + \cdots\cdots b_{2k-e}$$

$$= f(\text{Ⅱ}) + \phi$$

例 231：求 $\sum_{i=1}^{149} [i\pi] = ?$

解：π 的漸近分數爲 $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}$

…………由定理 230 知在分母不大於 33102 中，以 $\frac{103993}{33102}$

與 π 最接近，故在 $y = \pi x$, $y \frac{103993}{33102} x$, $x = 33102$

所圍的三角形內無格點，而 $\sum_{i=1}^{149} [i\pi]$ $y = \pi x, x=150$

$y = 0$ 三線所圍三角形內部之格點，亦爲 $y = \frac{103993}{33102} x$,

$x = 150$

$y = 0$ 三線所圍之格點。

而 $64 = 1 \times 40 + 3 \times 7 + 0 \times 5 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1$

求得漸近格點爲 (40,23),(61,35),(63,36),(64,37)

漸近多邊形 Ⅱ 之面積 $a = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 40 & 0 \\ 40 & 23 \\ 61 & 35 \\ 63 & 36 \\ 64 & 37 \end{vmatrix} = 1176.5$

故 $f(\text{Ⅱ}) = 1176.5 + 1 - (64+37+0+1+1+0+3+1)/2$

$= 1124$

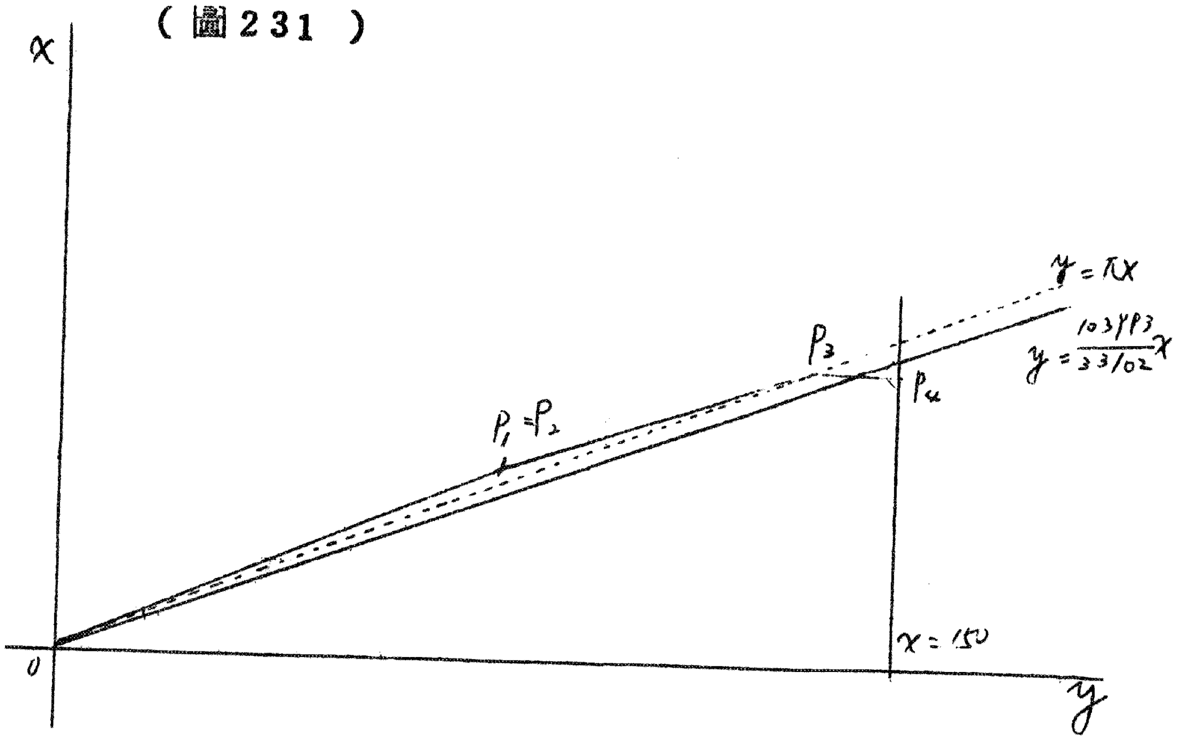
又$\frac{37}{64} > \frac{73}{127}$故 $e = 0$ ，$\phi = 0 + 1 + 3 - e = 4$

得f（△）$= 1124 + 4 = 1128$

立得$\left(\frac{73}{127}\right) = (-1)^{1128} = 1$ ，亦即 73 爲 127 之二次剩餘。

㈤定理 230 ：設$\alpha > 0$ ，且不爲有理數，而其第n個漸近分數$\frac{p_n}{q_n}$ ，則分母不大於q_n的諸分數中，以$\frac{p_n}{q_n}$與α最接近。

（圖231 ）



評語：本研究思考過程細密，表達方式清晰，頗有追求眞理之科學精神。