

# 怎樣剪去四角可摺成最大容積

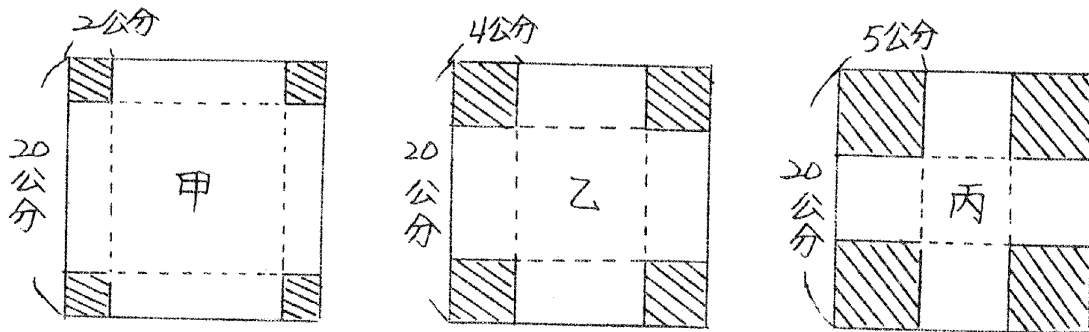
高小組數學科第三名

台中縣豐村國民小學

作者：藍麗雲、林煥順、江裕盛、劉育銘等 15 名  
指導教師：宋明欽、黃達進

## 一、研究動機

在數學課本第十冊綜合與應用二，76頁有一題：  
在三張每邊長20公分的正方形厚紙，照下面甲、乙、丙三圖，在四角各剪去相等的四個小正方形，摺成無蓋紙盒三個，那個容積最大？最大和最小相差是多少立方公分？



我們想知道除了課本問題外，還有沒有比這三個更大的容積，於是我們做了各種的計算分析、歸納、預測等研究工作。

## 二、研究目的

- (一) 研究由厚紙板剪去四角所摺成的無蓋長方體容積是多少？
- (二) 找出厚紙板大小一樣，剪去相等的四角邊長不一樣所摺成無蓋長方體容器那一種最大？
- (三) 由最大的容積的計算中，能找出計算公式。

## 三、研究過程

- (一) 再計算課本問題：

- 1  $2 \times 16 \times 16 = 512$
- 2  $4 \times 12 \times 12 = 576$
- 3  $5 \times 10 \times 10 = 500$

三者之中以乙最大，丙最小，相差 76 立方公分。

(二) 是否有比 2 更大的？我們做了下面的計算，以剪角長為高：

高  $\times$  長  $\times$  寬 = 容積

體積

$$1 \times 18 \times 18 = 324$$

(立方公分)

$$2 \times 16 \times 16 = 512$$

$$3 \times 14 \times 14 = 588$$

$$4 \times 12 \times 12 = 576$$

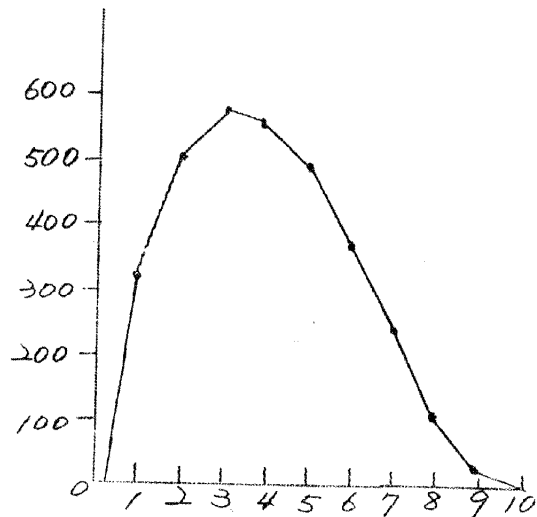
$$5 \times 10 \times 10 = 500$$

$$6 \times 8 \times 8 = 384$$

$$7 \times 6 \times 6 = 252$$

$$8 \times 4 \times 4 = 128$$

$$9 \times 2 \times 2 = 36$$



高 (公分)

由上面計算及統計圖我們發現剪角 3 公分，長寬各 14 公分的容積為 588 立方公分比 576 立方公分大。

(三) 是不是剪角 3 公分所摺成的長方體容積最大？

我們從上表發現以剪角 3 公分、4 公分兩組最大。因此我們再以小數一位做了下面的計算：

高  $\times$  長  $\times$  寬 = 容積

$$3.1 \times 13.8 \times 13.8 = 590.364$$

$$3.2 \times 13.6 \times 13.6 = 591.872$$

$$3.3 \times 13.4 \times 13.4 = 592.548$$

$$3.4 \times 13.2 \times 13.2 = 592.416$$

$$3.5 \times 13.0 \times 13.0 = 591.5$$

$$3.6 \times 12.8 \times 12.8 = 589.824$$

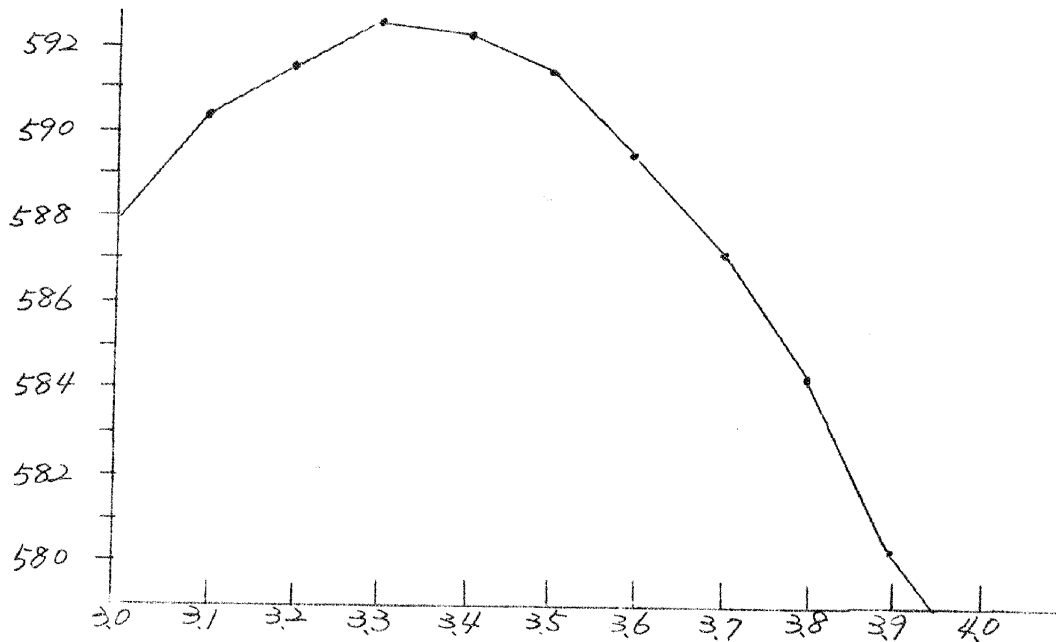
$$3.7 \times 12.6 \times 12.6 = 587.412$$

$$3.8 \times 12.4 \times 12.4 = 584.288$$

$$3.9 \times 12.2 \times 12.2 = 580.476$$

容 積

(立方公分)



高 (公分)

我們發現了剪角 3.1 公分 ~ 3.6 公分為高所摺成的長方形體都比角 3 公分為高的容積為大，其中以剪角 3.3 公分為高，長寬各為 13.4 公分的長方體容積 592.548 立方公分為最大。  
 (四)是不是 592.548 立方公分的容積就是最大，我們從上面計算發現以剪角 3.3 公分及 3.4 公分為高的容積最大，因此我們又做了下面的計算：

$$\text{高} \times \text{長} \times \text{寬} = \text{容 積}$$

$$3.31 \times 13.38 \times 13.38 = 592.570764$$

$$3.32 \times 13.36 \times 13.36 = 592.585472$$

$$3.33 \times 13.34 \times 13.34 = 592.592148$$

$$3.34 \times 13.32 \times 13.32 = 592.590816$$

$$3.35 \times 13.30 \times 13.30 = 592.5815$$

$$3.36 \times 13.28 \times 13.28 = 592.564224$$

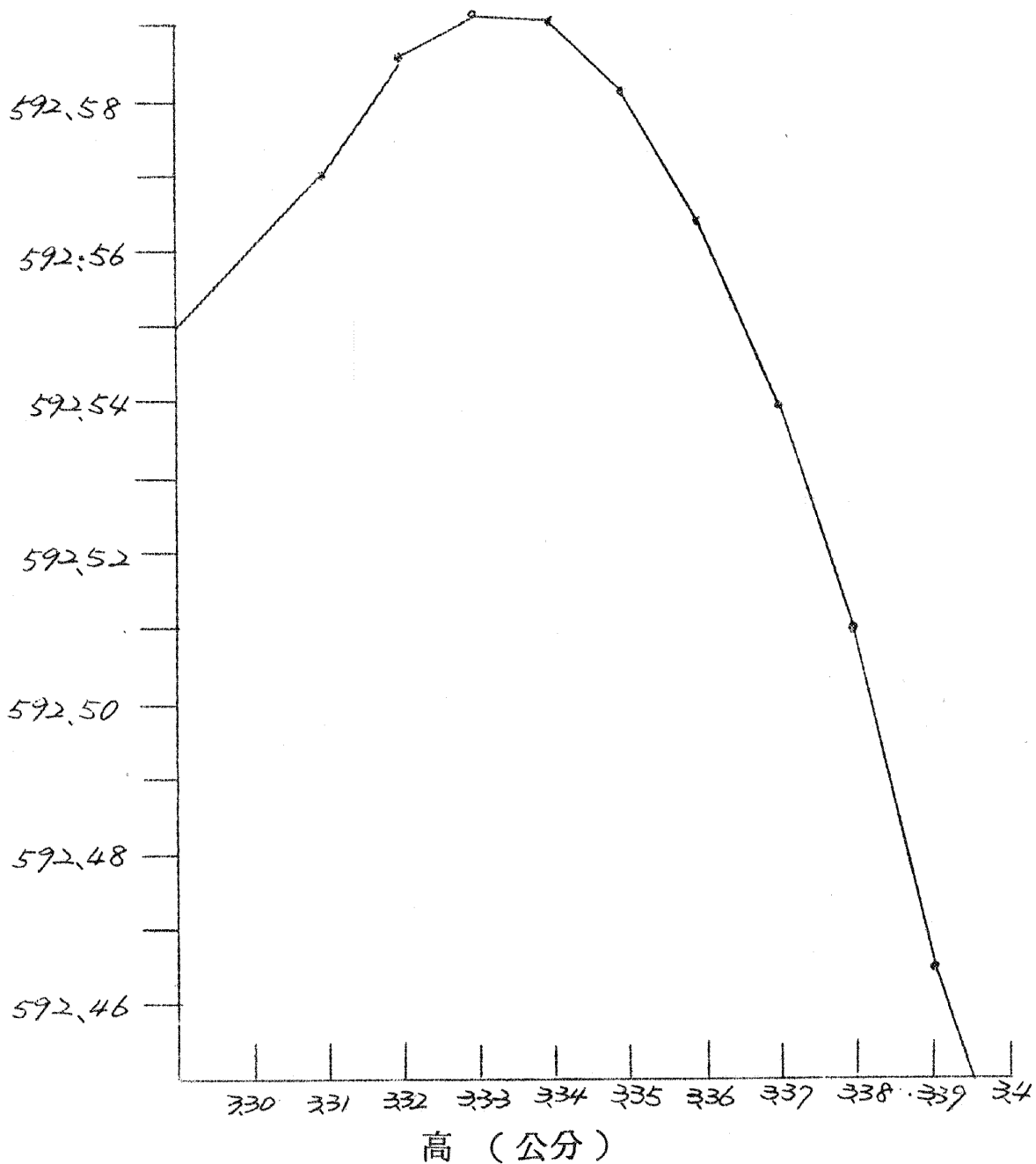
$$3.37 \times 13.26 \times 13.26 = 592.539012$$

$$3.38 \times 13.24 \times 13.24 = 592.505888$$

$$3.39 \times 13.22 \times 13.22 = 592.464876$$

容 積

(立方公分)



我們從上面計算又發現以剪角 3.31 ~ 3.36 公分為高所摺成的長方體容積都比剪角 3.3 公分為高的長方體容積為大，其中以剪角 3.33 公分為高的容積最大

(五)幾次計算的結果，我們發現以 3 公分、3.3 公分、3.33 公分爲高的容積都是最大的，因此我們預測以剪角 3.333 公分爲高將比 3.33 公分爲大，依此類推……

$$1 \quad 3.333 \times 13.334 \times 13.334 = 592.5925884 \quad \text{比} \quad 592.59148 \quad \text{大}$$

$$2 \quad 3.3333 \times 13.3334 \times 13.3334 = 592.592592548148 \\ \text{比} \quad 592.59258814 \quad \text{大}$$

(六)由以上計算結果，我們又預測怎樣，才是最大容積，由於 3 公分、3.3 公分、3.33 公分、3.333 公分、3.3333 公分等的計算可以推知剪角爲 3.3333 ……公分 =  $3.\overline{3}$  公分 =  $3\frac{1}{3}$  公分爲高的容積最大

$$\text{即} \quad 3\frac{1}{3} \times 13\frac{1}{3} \times 13\frac{1}{3} = 592\frac{16}{27} = 592.\overline{592} \quad (\text{立方公分})$$

#### 四、研究結果

(一)由於以上預測我們可知課本的這題有最大值其剪角是  $3\frac{1}{3}$  公分，其值是  $592.\overline{592}$  立方公分。

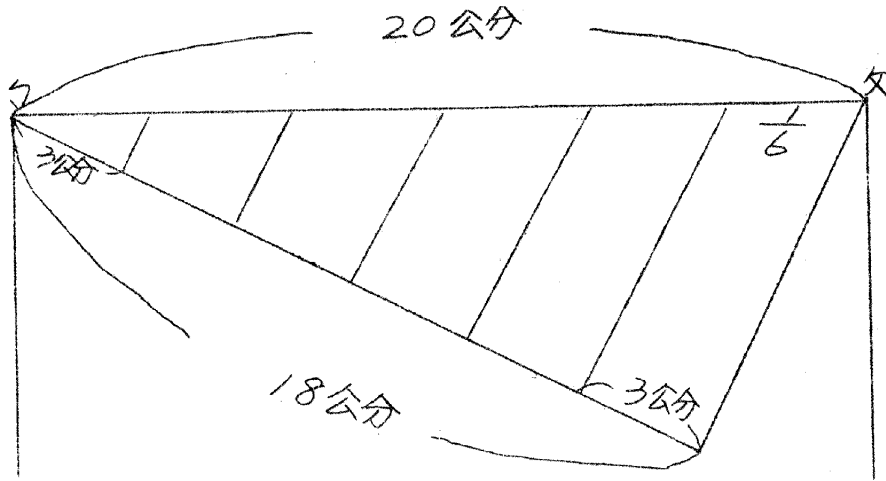
(二)但如何在每邊長 20 公分，剪角  $3\frac{1}{3}$  公分爲高摺成長方體呢？我請教老師，老師要我們用倍數或分數的應用試試看。於是我們做了下面計算：

$$3\frac{1}{3} \div 20 = \frac{1}{6} \qquad 13\frac{1}{3} \div 20 = \frac{2}{3}$$

即剪角長爲邊長的  $\frac{1}{6}$ ，摺成的寬長爲邊長的  $\frac{2}{3}$ 。

(三)那又如何能在 20 公分的邊長剪  $\frac{1}{6}$  呢？老師指導我們利用平行的方式畫出邊長的  $\frac{1}{6}$ ：

在厚紙的一角畫出任意線段  $\overline{AA'}$  長 18 公分，分成 6 等分，每等分長 3 公分，連結在  $\overline{AA'}$  自  $\overline{AA'}$  每隔 3 公分劃平行線：



(四)我們不但計算出最大值，也剪出最大的容積。

(五)我們又想邊長不是20公分的正方形剪角該多少才是最大容積。

我們分別以10公分、12公分、30公分、60公分為例再計算，結果如下：

	邊長 (公分)	高 (公分)	長 (公分)	寬 (公分)	容積 (立方公分)
1.	10	$1\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$= 74.074$
2.	12	2	8	8	$= 128$
3.	30	5	20	20	$= 2000$
4.	60	10	40	40	$= 16000$

各以剪角除以邊長

$$1\frac{2}{3} \div 10 = \frac{1}{6} \qquad 2 \div 12 = \frac{1}{6} \qquad 5 \div 30 = \frac{1}{6}$$

$$10 \div 60 = \frac{1}{6}$$

因此我們確定類似題目雖不一樣的正方形紙板均以其邊長 $\frac{1}{6}$ 的剪角為高長、寬各為邊長的 $(1 - \frac{1}{6} \times 2) = \frac{2}{3}$ 所摺成的容積最大。其容積計算如下：

設邊長為 $\text{ㄅ}$ ，則公式為： $(\frac{1}{6} \times \text{ㄅ}) \times (\frac{2}{3} \times \text{ㄅ}) \times (\frac{2}{3} \times \text{ㄅ}) = \frac{2}{27} \times \text{ㄅ}^3$  亦即最大容積為 $\frac{2}{27} \times \text{ㄅ}^3$  由以上各例代入公式加以驗算：

$$(1) \frac{2}{27} \times 20^3 = \frac{2}{27} \times 8000 = \frac{16000}{27} = 592.592$$

$$(2) \frac{2}{27} \times 10^3 = \frac{2}{27} \times 1000 = \frac{200}{27} = 74.\overline{074}$$

$$(3) \frac{2}{27} \times 12^3 = \frac{2}{27} \times 1728 = 128$$

$$(4) \frac{2}{27} \times 30^3 = \frac{2}{27} \times 27000 = 2000$$

$$(5) \frac{2}{27} \times 60^3 = \frac{2}{27} \times 216000 = 16000$$

上面公式計算各值均與前面計算符合

## 五、結 論

(一)我們由一連串的計算中找出課本題目裏最大容積爲  $592.\overline{592}$  立方公分。

(二)我們很高興居然能創出公式

邊長爲  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ，剪角邊長爲  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$  長寬各爲  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}$

最大容積 =  $(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}) \times (\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}) \times (\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}) = \frac{2}{27} \times \frac{1}{6}^3$

## 六、參考資料

(一)國民小學數學課本第十冊 65 ~ 76 頁。

(二)國民小學數學教學指引第十冊 234 ~ 245 頁。

評語：以實驗方式解決問題，並以歸納方式得到結論。但表達上稍有欠缺。