

# 魔數、魔術

## 高小組數學科第二名

台南市龍崗國民小學

作者：陳建志、陳秋月

陳雅青、邱淑貞

指導教師：鍾家蘭、楊淑絨

### 一、研究動機

開學後，第一次上數學課的時候，老師做了九九乘法的測驗，竟然還有很多同學並不熟練，其中錯誤最多的是 6、7、8 的乘法，反而 9 的乘法錯誤的人較少，必定有它的原因。於是我們就去請教老師，老師也發現這是數學上相當有趣的問題，因此在老師的指導下，我們利用寒假繼續研究這個問題，終於發現下列幾點特性：

(一)	(二)	(三)
$1 \times 9 = 9 = 10 - 1$	$0 + 9 = 9$	
$2 \times 9 = 18 = 20 - 2$	$1 + 8 = 9$	18    81
$3 \times 9 = 27 = 30 - 3$	$2 + 7 = 9$	27    72
$4 \times 9 = 36 = 40 - 4$	$3 + 6 = 9$	36    63
$5 \times 9 = 45 = 50 - 5$	$4 + 5 = 9$	45    54
$6 \times 9 = 54 = 60 - 6$	$5 + 4 = 9$	54    45 $54 - 45 = 9 = 1 \times 9$
$7 \times 9 = 63 = 70 - 7$	$6 + 3 = 9$	63    36 $63 - 36 = 27 = 3 \times 9$
$8 \times 9 = 72 = 80 - 8$	$7 + 2 = 9$	72    27 $72 - 27 = 45 = 5 \times 9$
$9 \times 9 = 81 = 90 - 9$	$8 + 1 = 9$	81    18 $81 - 18 = 63 = 7 \times 9$

四

$1 \times 3 = 3$	$0 + 3 = 3$	$1 \times 6 = 6$	$0 + 6 = 6$
$2 \times 3 = 6$	$0 + 6 = 6$	$2 \times 6 = 12$	$1 + 2 = 3$
$3 \times 3 = 9$	$0 + 9 = 9$	$3 \times 6 = 18$	$1 + 8 = 9$
$4 \times 3 = 12$	$1 + 2 = 3$	$4 \times 6 = 24$	$2 + 4 = 6$
$5 \times 3 = 15$	$1 + 5 = 6$	$5 \times 6 = 30$	$3 + 0 = 3$
$6 \times 3 = 18$	$1 + 8 = 9$	$6 \times 6 = 36$	$3 + 6 = 9$
$7 \times 3 = 21$	$2 + 1 = 3$	$7 \times 6 = 42$	$4 + 2 = 6$
$8 \times 3 = 24$	$2 + 4 = 6$	$8 \times 6 = 48$	$4 + 8 = 12$
$9 \times 3 = 27$	$2 + 7 = 9$	$9 \times 6 = 54$	$5 + 4 = 9$

五

$1 \times 2 = 2$	$0 + 2 = 2$	$1 \times 7 = 7$	$0 + 7 = 7$
$2 \times 2 = 4$	$0 + 4 = 4$	$2 \times 7 = 14$	$1 + 4 = 5$
$3 \times 2 = 6$	$0 + 6 = 6$	$3 \times 7 = 21$	$2 + 1 = 3$
$4 \times 2 = 8$	$0 + 8 = 8$	$4 \times 7 = 28$	$2 + 8 = 10$
$5 \times 2 = 10$	$1 + 0 = 1$	$5 \times 7 = 35$	$3 + 5 = 8$
$6 \times 2 = 12$	$1 + 2 = 3$	$6 \times 7 = 42$	$4 + 2 = 6$
$7 \times 2 = 14$	$1 + 4 = 5$	$7 \times 7 = 49$	$4 + 9 = 13$
$8 \times 2 = 16$	$1 + 6 = 7$	$8 \times 7 = 56$	$5 + 6 = 11$
$9 \times 2 = 18$	$1 + 8 = 9$	$9 \times 7 = 63$	$6 + 3 = 9$

1. 1 到 9 各數分別乘以 9，所得的積等於該數乘以 10，再減去該數，所得的差（如(一)所示）。例： $2 \times 9 = 18 =$

$$2 \times 10 - 2$$

2. 1 到 9 各數分別乘以 9，把所得的積的十位數字加個位數字，所得的和都會等於 9（如(二)所示）例： $2 \times 9 = 18$

$$1 + 8 = 9$$

3. 2 到 9 各數分別乘以 9 所得的積，有互為倒數的關係，兩個數相減所得的差也是 9 的倍數（如(三)所示）。例：

$$(9 \times 9) - (2 \times 9) = 81 - 18 = 63 = 7 \times 9$$

4. 3和6的乘法，所得的積的十位數字加個位數字的和，都是3、6、9三個數（如(四)所示）。
5. 1、2、4、5、7、8的乘法，所得的積的十位數字加個位數字的和，包含1到9的每一個數字（如(五)所示）。

## 二、研究過程

- (一)任何一個9的倍數，它的數字和都等於9嗎？
- (二)任何一個3的倍數或6的倍數，它的數字和都等於3、6、9嗎？
- (三)任何一個整數，變換個位數字的位次，所得的新數和原數相減所得差，是9的倍數嗎？

## 三、研究方法

發現問題→尋求解決→基本假設→歸納→演繹

## 四、研究過程

問題(一)：任何一個9的倍數，它的數字和都等於9嗎？

假設(1)：以二位數或三位數乘以9，所得的積的數字和，也是等於9。

驗證：從10到999各數分別乘以9，然後，把所得的積的各位數字相加，結果如下：

例ㄅ：以二位數乘以9

$$10 \times 9 = 90 \qquad 9 + 0 = 9$$

$$12 \times 9 = 108 \qquad 1 + 0 + 8 = 9$$

$$15 \times 9 = 135 \qquad 1 + 3 + 5 = 9$$

$$87 \times 9 = 783 \qquad 7 + 8 + 3 = 18 \qquad 1 + 8 = 9$$

例ㄆ：以三位數乘以9

$$123 \times 9 = 1107 \qquad 1 + 1 + 0 + 7 = 9$$

$$135 \times 9 = 1215 \qquad 1 + 2 + 1 + 5 = 9$$

$$657 \times 9 = 5913 \qquad 5 + 9 + 1 + 3 = 18 \qquad 1 + 8 = 9$$

$$999 \times 9 = 8991 \quad 8+9+9+1=27 \quad 2+7=9$$

※發現：任何一個二位數或三位數乘以9，所得的積的數字和，都等於9。

假設(2)：任何9的倍數，把各位數字相加，所得的和都會等於9。

驗證：把三位數以上任何一數乘以9，所得的積的各位數字相加，結果如下：

例：①以三位數乘以9

$$137 \times 9 = 1233 \quad 1+2+3+3=9$$

②以四位數乘以9

$$5826 \times 9 = 52434 \quad 5+2+4+3+4=18 \quad 1+8=9$$

③以五位數乘以9

$$26063 \times 9 = 234567 \quad 2+3+4+5+6+7=27 \quad 2+7=9$$

④以六位數乘以9

$$761929 \times 9 = 6857361 \quad 6+8+5+7+3+6+1=36 \\ 3+6=9$$

⑤以九位數乘以9

$$109739369 \times 9 = 987654321 \\ 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 \quad 4+5=9$$

※發現：任何一個9的倍數，把各位的數字相加，所得的和都會等於9。

假設(3)：任何整數，把各位數字相加，如果所得的和等於9，這個整數就可以被9整除。

驗證：將任一個整數的各位數字相加，如果所得的和等於9，再將這個整數除以9，結果如下：

例：①  $1+2+3+2+1=9$

$$(12321 \div 9 = 1369)$$

②  $5+3+4+2+3+1=18$   $1+8=9$

$$(534231 \div 9 = 59359)$$

③  $8+3+2+5+4+3+2=27$   $2+7=9$

$$(8325432 \div 9 = 925048)$$

④  $1+2+3+4+5+6+7+8=36$   $3+6=9$

$$(12345678 \div 9 = 1371742)$$

$$\textcircled{5} 5+4+9+7+1+2+2+8+7=45 \quad 4+5=9$$

$$(549712287 \div 9 = 61079143)$$

※發現：任何一個整數，把各位數字相加，所得的和等於9，這個整數就可以被9整除。

問題(二)：任何一個3的倍數或6的倍數，它的數字和都等於3、6、9嗎？

假設(1)：以二位數或三位數乘以3，所得的積的數字和，都會等於3、6、9。

驗證：從10到999各數分別乘以3，然後把所得的積的各位數字相加，結果如下：

例 ㄅ：以二位數乘以3

$$10 \times 3 = 30 \quad 3+0=3$$

$$11 \times 3 = 33 \quad 3+3=6$$

$$85 \times 3 = 255 \quad 2+5+5=12 \quad 1+2=3$$

$$99 \times 3 = 297 \quad 2+9+7=18 \quad 1+8=9$$

例 ㄆ：以三位數乘以3

$$367 \times 3 = 1101 \quad 1+1+0+1=3$$

$$147 \times 3 = 441 \quad 4+4+1=9$$

$$484 \times 3 = 1452 \quad 1+4+5+2=12 \quad 1+2=3$$

$$875 \times 3 = 2625 \quad 2+6+2+5=15 \quad 1+5=6$$

$$456 \times 3 = 1368 \quad 1+3+6+8=18 \quad 1+8=9$$

※發現：以二位數或三位數乘以3，所得的積的各位數字相加，所得的和都是3、6、9。

假設(2)：任何一個3的倍數，把各位數字相加，所得的和等於3、6、9。

驗證：把三位數以上任何一數乘以3，所得的積的各位數字相加，結果如下：

$$\text{例：}\textcircled{1} 337 \times 3 = 1011 \quad 1+0+1+1=3$$

$$\textcircled{2} 40704 \times 3 = 122112 \quad 1+2+2+1+1+2=9$$

$$\textcircled{3} 35475 \times 3 = 106425 \quad 1+0+6+4+2+5=18 \rightarrow$$

$$\textcircled{4} 77077 \times 3 = 231231 \quad 2+3+1+2+3+1=12 \rightarrow$$

$$\textcircled{5} 615413 \times 3 = 20746239$$

$$2+0+7+4+6+2+3+9=33 \rightarrow$$

$$\textcircled{6} 31460688 \times 3 = 94382064$$

$$9+4+3+8+2+0+6+4=36 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1+8=9; 3+0=3; 3+3=6; 3+6=9$$

※發現：任何一個3的倍數，把各位數字相加，所得的和都是3、6、9。

假設(3)：以二位數或三位數以上的數乘以6，所得的積的數字和也等於3、6、9。

驗證：把任何一個二位數以上的數乘以6，再將所得的積的各位數字相加，結果如下：

例ㄅ：以二位數乘以6

$$11 \times 6 = 66 \quad 6+6=12 \quad 1+2=3$$

$$12 \times 6 = 72 \quad 7+2=9$$

$$13 \times 6 = 78 \quad 7+8=15 \quad 1+5=6$$

$$48 \times 6 = 288 \quad 2+8+8=18 \quad 1+8=9$$

例ㄆ：以三位數乘以6

$$167 \times 6 = 1002 \quad 1+0+0+2=3$$

$$202 \times 6 = 1212 \quad 1+2+1+2=6$$

$$222 \times 6 = 1332 \quad 1+3+3+2=9$$

$$542 \times 6 = 3252 \quad 3+2+5+2=12 \quad 1+2=3$$

$$591 \times 6 = 3546 \quad 3+5+4+6=18 \quad 1+8=9$$

$$604 \times 6 = 3624 \quad 3+6+2+4=15 \quad 1+5=6$$

例ㄇ：以五位數乘以6

$$14789 \times 6 = 88734 \quad 8+8+7+3+4=30 \rightarrow$$

$$61321 \times 6 = 367926 \quad 3+6+7+9+2+6=33 \rightarrow$$

$$393823 \times 6 = 2356998 \quad 2+3+5+6+9+9+8=42$$

$$\rightarrow 3+0=3; 3+3=6; 4+2=6;$$

例 ㄘ：以六位數乘以 6

$$761316 \times 6 = 4567896 \quad 4+5+6+7+8+9+6=45 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4+5=9;$$

例 ㄙ：以七位數乘以 6 及八位數乘以 6

$$1666665 \times 6 = 9999990 \quad \rightarrow$$

$$9+9+9+9+9+9+0=54 \quad 5+4=9$$

$$16461646 \times 6 = 98769876 \quad \rightarrow$$

$$9+8+7+6+9+8+7+6=60 \quad 6+0=6$$

※發現：任何一個 6 的倍數，把各位數字相加，所得的和為 3 或 6 或 9。

假設(4)：一個整數，把各位數字相加，所得的和是 3、6、9，  
這個整數就可以被 3 和 6 整除。

驗 證：

例：

整 數	數字和	被 3 整除	被 6 整除	整 數	整數和	被 3 整除	被 6 整除
12	3	✓	✓	693	9	✓	
15	6	✓		708	6	✓	✓
24	6	✓	✓	927	9	✓	
27	9	✓		3228	6	✓	✓
72	9	✓	✓	24681	3	✓	
102	3	✓	✓	92529	9	✓	
462	3	✓	✓	12342033	9	✓	
582	6	✓	✓				

※發現：(1)任何一個整數的數字和是 3 或 6 或 9，這個整數就能被 3 整除。

(2)任何一個整數的數字和是 3 或 6 或 9，且這個整數是偶數，才能被 6 整除，否則只能被 3 整除。

問題(三)：任何一個整數，變換各位數字的位次，所得的新數和原數相減所得的差，是 9 的倍數嗎？

假設(1)：任何9的倍數，改變數字的位次以後，所得的新數也能被9整除。

驗證：把任何一個9的倍數，改變數字的位次，將所得新數除以9，且將該新數的各位數字相加，結果如下：

$$\text{例 } \triangleleft : 3 \times 9 = 27 \quad 72 \div 9 = 8 \quad 7 + 2 = 9$$

27是9的倍數，把2和7兩個數字改變位次，得到的新數72，能被9整除。

$$\text{例 } \triangleleft : 14 \times 9 = 126$$

126是9的倍數，把1和2和6重新組合成的新數，有162，216，261，621，612。

$$162 \div 9 = 18 \quad 1 + 6 + 2 = 9$$

$$216 \div 9 = 24 \quad 2 + 1 + 6 = 9$$

$$261 \div 9 = 29 \quad 2 + 6 + 1 = 9$$

$$612 \div 9 = 68 \quad 6 + 1 + 2 = 9$$

$$621 \div 9 = 69 \quad 6 + 2 + 1 = 9$$

$$\text{例 } \square : 123 \times 9 = 1107$$

1107是9的倍數，把1，1，0，7重新組合的新數有1170，1701，1710，7011，7101，7110，117，171。

$$1170 \div 9 = 130 \quad 1 + 1 + 7 + 0 = 9$$

$$1701 \div 9 = 189 \quad 1 + 7 + 0 + 1 = 9$$

$$1710 \div 9 = 190 \quad 1 + 7 + 1 + 0 = 9$$

$$7011 \div 9 = 779 \quad 7 + 0 + 1 + 1 = 9$$

$$7101 \div 9 = 789 \quad 7 + 1 + 0 + 1 = 9$$

$$7110 \div 9 = 790 \quad 7 + 1 + 1 + 0 = 9$$

$$117 \div 9 = 13 \quad 1 + 1 + 7 = 9$$

$$171 \div 9 = 19 \quad 1 + 7 + 1 = 9$$

◎這些新數因為數字和等於9，所以都能被9整除。

※發現：任何一個9的倍數，變換數字的位次以後，所得到的任何新數，它的數字和仍然等於9，所以都能被9整除。

假設(2)：任何整數，變換數字的位次以後，所得到的新數和原數



的差，也能被9整除。

推 理：從9的乘法的特性(一)得知以下各式的差，都是9的倍數。

△該數乘以10減去該數。

△該數乘以100減去該數。

□該數乘以10減去該數。

△ $10-1$	△ $100-1$	□ $100-10$
$20-2$	$200-2$	$200-20$
$30-3$	$300-3$	$300-30$
$70-7$	$700-7$	$700-70$
$80-8$	$800-8$	$800-80$
$90-9$	$900-9$	$900-90$

□該數乘以1000減去該數。

△該數乘以100減去該數。

△該數乘以10減去該數。

(□) $1000-1$	(△) $1000-10$	(△) $1000-100$
$2000-2$	$2000-20$	$2000-200$
$3000-3$	$3000-30$	$3000-300$
$7000-7$	$7000-70$	$7000-700$
$8000-8$	$8000-80$	$8000-800$
$9000-9$	$9000-90$	$9000-900$

驗 證：把任何整數，改變位次排列，利用上述推理的方法，將所得到的新數和原數相減，結果如下：

例 ①：  $82-28=54$        $82=80+2$        $28=20+8$

$$82-28=(80+2)-(20+8)$$

$$=80+2-20-8$$

$$=(80-8)-(20-2)$$

$$=72-18$$

$$=54$$

$$5+4=9$$

②：  $312-213=99$

$$312=300+10+2$$

$$213 = 200 + 10 + 3$$

$$\begin{aligned} 312 - 213 &= (300 + 10 + 2) - (200 + 10 + 3) \\ &= 300 + 10 + 2 - 200 - 10 - 3 \\ &= (300 - 3) - (200 - 2) - (10 - 10) \\ &= 297 - 198 - 0 \\ &= 99 \qquad 9 + 9 = 18 \qquad 1 + 8 = 9 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} : 312 - 123 = 189 \qquad 123 = 100 + 20 + 3$$

$$\begin{aligned} 312 - 123 &= (300 + 10 + 2) - (100 + 20 + 3) \\ &= (300 - 3) - (100 - 10) - (20 - 2) \\ &= 297 - 90 - 18 \\ &= 189 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} : 3214 - 2134 = 1080$$

$$3214 = 3000 + 200 + 10 + 4$$

$$2134 = 2000 + 100 + 30 + 4$$

$$\begin{aligned} 3214 - 2134 &= (3000 + 200 + 10 + 4) - (2000 + \\ &\quad 100 + 30 + 4) \\ &= 3000 + 200 + 10 + 4 - 2000 - 100 - \\ &\quad 30 - 4 \\ &= (3000 - 30) - (2000 - 200) - \\ &\quad (100 - 10) - (4 - 4) \\ &= 2970 - 1800 - 90 - 0 \\ &= 1080 \qquad 1 + 0 + 8 + 0 = 9 \end{aligned}$$

※發現：任何整數，將各位數字改變位次排列，所得到的新數和原數相減所得的差，都能被9整除。

假設(3)：含有0的整數，各位數字改變位次排列，所得到的新數和原數相減所得的差，都能被9整除。

驗證：將一含有0的整數重新排列以後，所得的新數和原數相減，再將所得的差的各位數字相加，結果如下：

$$\text{例：(1) } 54300 - 54030 = 270 \quad 2 + 7 + 0 = 9 \quad \rightarrow$$

$$(2) 54300 - 50430 = 3870 \quad 3 + 8 + 7 + 0 = 18 \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 54300 - 50403 = 3897 \quad 3 + 8 + 9 + 7 = 27 \quad \rightarrow \\
 (4) \quad & 54300 - 50043 = 4257 \quad 4 + 2 + 5 + 7 = 18 \quad \rightarrow \\
 (5) \quad & 54300 - 543 = 53757 \quad 5 + 3 + 7 + 5 + 7 = 27 \quad \rightarrow \\
 & \rightarrow 1 + 8 = 9 ; 2 + 7 = 9 ;
 \end{aligned}$$

※發現：任何含有 0 的整數，把各位數字改變位次排列，所得到的新數再和原數相減，所得的差都能被 9 整除。

## 五、研究結果

- (一)任何整數的數字和，為 3、6、9 的這個整數，就可以被 3 整除。
- (二)任何偶數的數字和，為 3、6、9 的這個整數，就可以被 6 整除。
- (三)任何整數的數字和，為 9 的這個整數，就可以被 9 整除。
- (四)任何一個能被 9 整除的整數，將各位數字改變位次排列，所得的新數也能被 9 整除。
- (五)任何整數，將各位數字改變位次排列，所得的新數再和原數相減，所得的差都能被 9 整除。

評語：充分利用乘法九九表的觀察，歸納出 3、6、9……的信數的識別方法，思考過程細密，結論甚為完整。