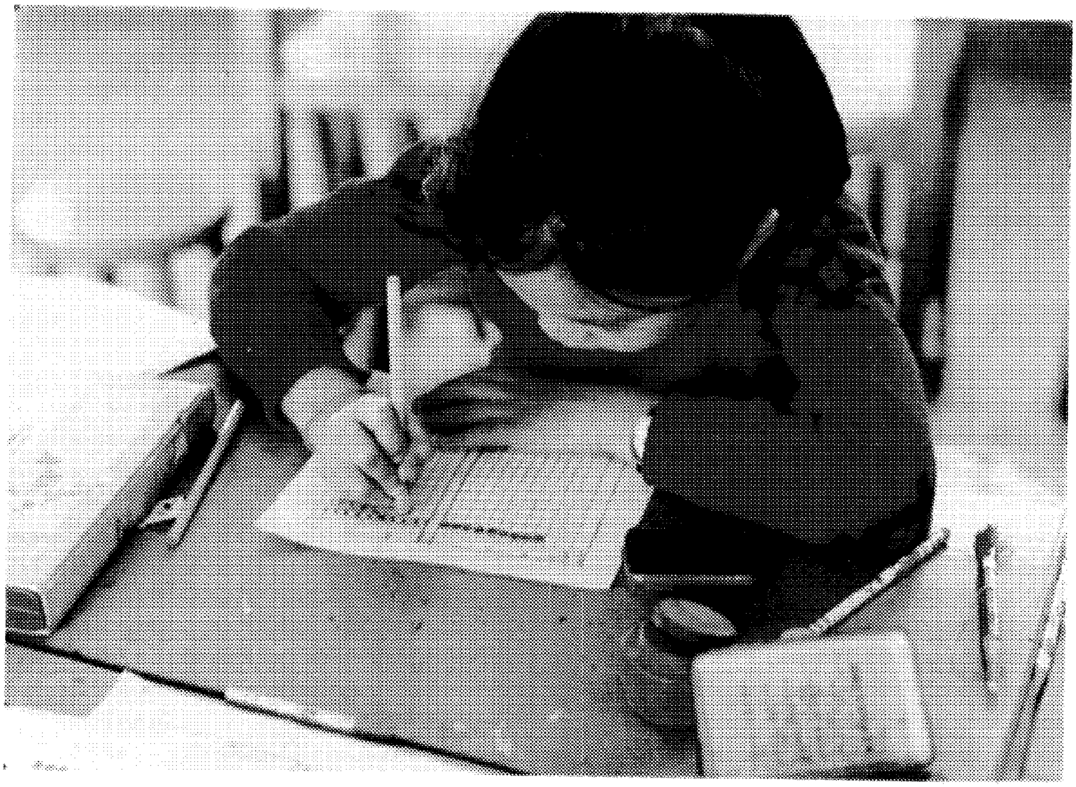
有趣的移位遊戲

初小組數學科第三名

屏東市仁愛國小

作　　者：陳慕群、許碩博
林宜岑、張怡婷
指導教師：曾紹鄉、林梅琴



一、研究動機

去年暑假我們參加學校舉辦的少年科學研習營，老師出了一個數學問題，很有趣，叫做移位遊戲。遊戲內容如下：

你能不能動腦筋將左下方棋盤上的棋子，在下面的兩個條件限制下變換成右下方棋盤的情形（也就是將空格兩旁的黑白棋子換位）。

移 動 前 的 棋 盤 圖

空格號碼	1	2	3	4	5	6	7
棋子位置	●	●	●		○	○	○

完 成 後 的 棋 盤 圖

空格號碼	1	2	3	4	5	6	7
棋子位置	○	○	○		●	●	●

移動限制：

(一)每次只能移動一顆棋子。

(二)每一顆被移動的棋子，可以選擇以下的兩種方式進行。

1. 這一顆棋子旁邊有空格時，可以移動一格到空格中。（譬如把格子5的棋子，移入格子4，或格子3的棋子移入格子4）。

2. 這一顆棋子也可以跳越緊鄰的棋子（不管顏色如何），而至空格中。（譬如格子2的棋子跳到格子4或格子6跳到格子4）。

我們比賽看誰最先完成這個遊戲，大家都玩得十分高興，於是我們幾個同學就很有興趣的想進一步探討——若是棋子個數變化（增加或減少），那麼是否也能找到一個最簡便的走法來完成這個遊戲，並且看看完成這個遊戲所移動的最少次數與每邊棋子個數之間有沒有什麼關係？

二、研究問題

㈠完成這種遊戲的最簡便走法。

㈡利用最簡便走法所需的次數（也就是最少次數）與每邊棋子個數之間的關係。

三、實驗器材

㈠設計一個棋盤：

黑　　　　　　　　　　　　　　　　白

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	楚漢 河界	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

㈡準備圍棋黑白各一盤。

㈢設計一個記錄總表及一個記錄分表。

四、研究過程

問題一：完成這種遊戲的最簡便走法。

方　法：依次從每邊的棋子數是1個、2個、3個、4個、5個、6個、7個，實際操作，每種重複做五次，並詳細將移動過程加以記錄。以下是我們實驗記錄總表：

陳慕群的記錄

每邊棋子數＼完成次數＼實驗次別	一	二	三	四	五
1	「3」	「3」	「3」	「3」	「3」
2	10	10	「8」	「8」	「8」
3	17	18	「15」	「15」	「15」
4	26	「24」	26	「24」	「24」
5	36	「35」	36	「35」	「35」
6	55	55	「48」	「48」	「48」
7	65	「63」	「63」	「63」	「63」
發現事項	1. 未到終點同顏色的棋子不可排在一起。 2. 沒有觸礁的移動次數少。 3. 所做最少移動次數如括號中數字。				

劉紀青的記錄

每邊棋子數 ＼ 完成次數 ＼ 實驗次別	一	二	三	四	五
1	3	3	3	3	3
2	10	9	8	8	8
3	20	19	17	15	15
4	30	27	26	25	24
5	38	36	35	35	35
6	50	48	48	48	48
7	65	64	64	63	63
發現事項	1. 沒有觸礁完成次數最少，若觸礁次數一定增加。 2. 沒有到終點時同顏色的棋子不能並排在一起。 3. 完成最少次數如「」。				

討論：

從每個人的實驗記錄總表中，我們發現到一些共同特性：

1. 每一個人完成這個遊戲的最少次數，都是如下表：

每邊棋子數	1	2	3	4	5	6	7
移動最少次數	3.	8.	15.	24.	35.	48.	63.

2. 要走出最少次數，都是在不會觸礁的情況下完成的，如果觸礁，移動次數一定增多。

3. 如果從黑棋開始走，要完成最少次數，只有一種走法，如下圖表：（如果從白棋開始走，走法也是只有一種，與黑棋相反，在這省略。）

每邊一個棋子變化圖

實驗次別	棋子位置 \ 移動次別	黑									棋	楚漢河界	白									棋
		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											●		○									
	1											●	○		①							
	2										○	●										
	3										○		●		⑤							

每邊兩個棋子變化圖：

實驗次別	棋子位置＼移動次別	黑									棋	楚漢河界	白									棋
		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										●	●		○	○								
	1									●		●	○	○				①				
	2									●	○	●		○								
	3									●	○	●	○									
	4									●	○		○	●				②				
	5										○	●	○	●								
	6									○		●	○	●				⑤				
	7									○	○	●		●								
	8									○	○		●	●				⑥				

每邊三個棋子變化圖：

實驗次別	棋子位置 移動別次	黑									棋	楚漢河界	白									棋
		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									●	●	●		○	○	○							
	1								●	●		●	○	○	○				→①			
	2								●	●	○	●		○	○							
	3								●	●	○	●	○		○							
	4								●	●	○		○	●	○				→②			
	5								●		○	●	○	●	○							
	6									●	○	●	○	●	○							
	7								○	●		●	○	●	○							
	8								○	●	○	●		●	○				→②			
	9								○	●	○	●	○	●								
	10								○	●	○	●	○		●							
	11								○	●	○		○	●	●				→⑤			
	12								○		○	●	○	●	●							
	13								○	○		●	○	●	●				→⑥			
	14								○	○	○	●		●	●							
	15								○	○	○		●	●	●				→⑥			

4. (1)觀察上面每一個變化圖，在移動順序告一段落的地方，標上一個括號。

(2)比較經過括號後，各變化圖之間的共同特性。

(3)按照(2)所發現的共同特性，訂出如下面發現的移動步驟。

發現：

要以最少次數完成這種遊戲，必須依照下列的移動步驟。

第一步：先以最靠近中間空格的黑（白）棋子向右（左）移進空格中，以便讓右（左）邊的白（黑）棋子跳越過到黑棋子的原位。

第二步：以新空格（右）邊的白（黑）棋子移進空格中，以便讓左（右）邊的黑（白）棋子跳越爲止。（也就是還沒到達終點時，兩個同顏色的棋子不能並排在一起。

第三步：以新空格左（右）邊的黑（白）棋子移進空格中，以便讓右（左）邊的白（黑）棋子跳越至不能跳越爲止。

第四步：重複二、三步直到新空格右（左）邊無白（黑）棋子爲止。（此時棋子位置形成黑白相間隔，而空格在最左或最右）。

第五步：當新空格左（右）邊無黑（白）棋子時，就以它右（左）邊的白（黑）棋子移進空格中，以便讓所有右（左）邊的白（黑）棋子跳越至不能跳爲止。

第六步：以下重複第五步，直到不能再跳越時，把黑（白）棋子移入旁邊空格，就完成這個遊戲。

問題二：利用最簡便的走法，所需的次數（也就是最少次數與每邊棋子個數之間的關係。

方　法：

根據前面問題一的討論，我們發現到完成這個遊戲的最少次數如下表：

每邊棋子數	1	2	3	4	5	6	7
最少次數	3.	8.	15.	24.	35.	48.	63.

由此表我們進一步的去討論整理比較如下：

每邊棋子數（ㄅ）	完成最少次數（ㄆ）
1	3 ⟶ 1 × 3
2	8 ⟶ 2 × 4
3	15 ⟶ 3 × 5
4	24 ⟶ 4 × 6
5	35 ⟶ 5 × 7
6	48 ⟶ 6 × 8
7	63 ⟶ 7 × 9
發現事項	1. 比較每一組相對的ㄅ與ㄆ的數字關係，可以看出ㄆ爲ㄅ的倍數，所以ㄆ可以改寫爲箭頭所指右邊的式子，也就是： ㄆ＝ㄅ×△ 2. ㄆ＝ㄅ×△當ㄅ每增加1時所乘的△的數字也跟著增加1。

每邊棋子數（ㄅ）	完成最少次數（ㄆ）
1	1 ×△3　1 ×（1 ＋ 2）
2	2 ×△4　2 ×（2 ＋ 2）
3	3 ×△5　3 ×（3 ＋ 2）
4	4 ×△6　4 ×（4 ＋ 2）
5	5 ×△7　5 ×（5 ＋ 2）
6	6 ×△8　6 ×（6 ＋ 2）
7	7 ×△9　7 ×（7 ＋ 2）
發現事項	再比較每一組相對的ㄅ與△中的數字發現每一個△中的數字都比ㄅ多2，也就是△＝ㄅ＋2，因此可以將ㄆ改寫爲箭頭所指右邊的式子。

每邊棋子數（ㄅ）	完成最少次數　（ㄆ）
1	1 ×（ 1 ＋ 2 ）
2	2 ×（ 2 ＋ 2 ）
3	3 ×（ 3 ＋ 2 ）
4	4 ×（ 4 ＋ 2 ）
5	5 ×（ 5 ＋ 2 ）
6	6 ×（ 6 ＋ 2 ）
7	7 ×（ 7 ＋ 2 ）
發現事項	從各組式子中我們終於找到了一個奇妙的公式： ㄆ＝ㄅ×（ㄅ＋2）

發現：

用最簡便的走法完成這種遊戲所需要的最少次數與每邊棋子數的關係可能是：

ㄆ＝ㄅ×（ㄅ＋2）

△問題一、二所發現到的最簡便走法與預估完成這種遊戲所需要最少次數的計算方法，對於沒有做過的實驗是否適用？

預測和驗證：

(1)根據上面的問題二發現：每邊棋子數×（每邊棋子數＋2）可能就是完成這個遊戲所需要的最少次數，照這樣來說，當每邊棋子數增加為8個、9個、10個時，可能要完成這個遊戲所需的最少次數如下表：

每邊棋子數	完成最少次數
8	8×（8＋2）＝80
9	9×（9＋2）＝99
10	10×（10＋2）＝120

(2)利用問題一的發現，完成這個遊戲的最簡便走法，我們實際的去探討每邊的棋子數為8個、9個、10個時的移動過程，圖表分別如附表：

△從以上的預測和驗證，可看出當每邊棋子數為8個、9個、10個時，上面兩大發現的規則與公式仍然可以使用。

五、結　論

綜合我們對這個遊戲的研究有二點發現：

(一)不管每邊的棋子數有多少，只要依照下列的走法就可用最少次數來完成這個遊戲。走法如下：

1. 先以最靠近中間空格的黑（白）棋子向右（左）移進空格中，以便讓右（左）邊的白（黑）棋子的原位。
2. 以新空格右（左）邊的白（黑）棋子移進空格中，以便讓左（右）邊的黑（白）棋子跳越至不能跳越為止。
3. 以新空格左（右）邊的黑（白）棋子移進空格中，以便讓右（左）邊的白（黑）棋子跳越至不能跳越為止。
4. 重複2、3步驟，直到新空格右（左）邊無白（黑）棋子為止。（此時棋子位置形成黑白相間隔，而空格在最左或最右）。

5. 當新空格右（左）邊無白（黑）棋子時，就以它左（右）邊的黑（白）棋子移進空格中，以便讓所有左（右）邊的黑（白）棋子跳越至不能跳越為止。

6. 以下重複第5步驟，直到不能再跳越時，把黑（白）棋子移入旁邊空格，就完成這個遊戲。

(二)不管每邊的棋子數有多少，以下列的公式可預估出完成這種遊戲所需要的最少次數。公式如下：

$$ㄆ = ㄅ \times (ㄅ + 2)$$

ㄆ：表示完成這個遊戲的最少次數。

ㄅ：表示每邊的棋子數。

評語：本件的表達非常清楚，而且結論很完整，這對初小的小學生而言，非常難得。