一個數學模式的探討

初小學數組科第一名

台北市明倫國小

作　　者：胡全威、陳榮吉
劉君耕、林沛其

指導教師：林　　玉　　珍

一、研究動機

數學，是一門有趣的學科，我們實在很想做些數學題目，可是常常不知要做什麼，也不知該如何去做，老師了解我們的困難，也知道我們對數學有興趣，所以常講一些有趣的數學故事給我們聽，或找一些有趣的數學題目讓我們想想做做。

最近，老師又出了一道數學題目讓我們當遊戲玩，按照它的規則玩下去，越玩越覺得有趣，幾個人還把玩出來的結果互相拿來比對，再請老師指導。經過長期的推算整理，加上老師的指導，就滙成了這一份成果。

這遊戲的作法是這樣的：「任何大於零的整數，如果是偶數，就把它除以2，如果是奇數就乘以3再加上1，然後把所乘的結果，繼續用以上的方法做運算，最後一定會達到1。」

老師說，這個數學遊戲，裏面包含一個數學難題，是由原籍波蘭的著名美國數學家烏朗教授（Stanislaw Ulam）提出的，這題目讓小學生來試做都會明白，可是到現在數學家們還不明白爲什麼會有這樣的結果，找不到一個理論上的證明。雖然，老師知道我們的數學知識不多，目的不在期望由我們來做出好的解釋，但是，因爲得到老師的鼓勵，我們也就敢來對大數學家的猜想作檢驗了。如此，我們就興緻勃勃地往下做了。

二、研究目的

(一)設計檢驗並探討烏朗教授猜想的方法。

(二)嘗試用不同的規則來探討數字世界中的巧妙。

(三)在探究過程中，學習用數學的思考模式來探討數學的問題。

三、研究設備器材 小型計算器、紙、筆、尺。

四、研究方法與過程

(一)檢驗「烏朗教授的猜想」：

1. 教師說明「烏朗教授猜想」的運算規則與演算步驟。(詳見研究動機)

2. 嘗試練習：

我們各自先拿了幾個較小的數來算，果然這些數最後都走向 1，大家都覺得很妙。例如：

22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 。

3. 整理：

(1)為了想觀察這些數，由一數變成另一數的關係，我們決定先縮小所檢討的範圍，也就是先考慮 1 到 99 之間的數，而暫時不去碰 100 以上的數，為了要避免遺漏，我們覺得有必要將 1 到 99 各數的變化情形，先按順序一個一個列出來。

(2)這時，老師引導我們先回過頭去看看「烏朗教授的猜想」所用的規則，到底有什麼意義？她要我們重新再讀這個規則：

若遇　偶數則「÷ 2」　若遇　奇數就「× 3 ＋ 1」

老師問我們：將偶數「÷ 2」，會得到什麼？可能是偶數，也可能是奇數。那麼，若仍為偶數，則再「÷ 2」，如此連續下去，終會獲一奇數，這樣一來，我們所要列出的數，就可省去偶數，而只列出奇數了。

(3)為了比較好把握演算的過程，也為了避免計算錯誤，老師教我們設想出一個可以涵概全部二位數的表(表一)，先

將「×３＋1」的運算結果登錄下來。

⑷利用表一的結果，老師引導我們將1到99各奇數的演變情形作了比較、分析。

①1→4→2→1

②3→10→5→16→8→4→2→1

③5（與②相同）。

④7→22→11→34→17→52→26→13→40→20→10（與②相同）。

⑤9→28→14→7（與④相同）。

⑥11（與④相同）。

⑦13（與④相同）。

⑧～㊿是15～99各奇數的演變情形（限於篇幅，在此從略）。

（表　一）　對二位數以內各奇數作「×３＋1」運算的結果

十位數 ＼ 結果 ＼ 個位數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4		10		16		22		28
1		34		40		46		52		58
2		64		70		76		82		88
3		94		100		106		112		118
4		124		130		136		142		148
5		154		160		166		172		178
6		184		190		196		202		208
7		214		220		226		232		238
8		244		250		256		262		268
9		274		280		286		292		298

(5)我們根據上面的檢驗，將二位數以內各奇數（大於零）如何歸向 1 的路徑作成下表（表二）：

4. 從表二我們發現：

(1)「1」是二位數以內各整數（大於零）所歸向的數，俗話說「百川歸大海」，「1」果眞是烏朗教授猜想所歸向的大海。

（表　二）　　二位數以內各奇數作烏朗猜想運算的路徑關係

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & 57 \arrow[d] & & 97 \arrow[d] & & & \\
 & & & & & & 43 \arrow[d] & & 73 \arrow[d] & & & \\
 & & & & & & 65 \arrow[d] & & 55 \arrow[d] & & & \\
 & & & & & & 49 \arrow[d] & & 83 \arrow[d] & & & \\
 & & & & 33 \arrow[d] & & 37 \arrow[d] & 87 \arrow[l] & 47 \arrow[d] & 31 \arrow[l] & 41 \arrow[l] & 27 \arrow[l] \\
 & & & & 25 \arrow[d] & 9 \arrow[r] & 7 \arrow[d] & 99 \arrow[l] & 71 \arrow[d] & & & \\
39 \arrow[r] & 59 \arrow[r] & 89 \arrow[r] & 67 \arrow[r] & 19 \arrow[r] & 29 \arrow[r] & 11 \arrow[d] & & 91 \arrow[d] & 95 \arrow[l] & 63 \arrow[l] & \\
 & & & & 79 \arrow[u] & 77 \arrow[u] & 17 \arrow[d] & 45 \arrow[l] & 61 \arrow[d] & 81 \arrow[l] & & \\
 & & & & & 51 \arrow[u] & 13 \arrow[d] & 69 \arrow[l] & 23 \arrow[d] & 15 \arrow[l] & & \\
 & & & & & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[d] & 53 \arrow[l] & 35 \arrow[l] & 93 \arrow[l] & & \\
 & & & & & 21 \arrow[r] & 1 & 85 \arrow[l] & 75 \arrow[l] & & &
\end{tikzcd}
$$

(2)除了 85，75，21 三數以外，所有二位數以內的各奇數也都歸向 5。

(3)大於1，而由二個方向以上滙集的奇數，除了91及35二個數以外，都是質數（不是人家的倍數），（見表二打圈的數）。

(4)除了1以外，5、7是源頭較多的數，11、5是重要的轉捩點，其次是47。

5. 成果與討論：

我們用檢驗的方法，證實了在二位數以內的整數（大於零）範圍內，烏朗教授的猜想果然不差，因爲在其中，我們沒有找到任何的反例。雖然如此，也不表示烏朗教授的猜想，永遠是對的，因爲我們目前只是對小於100的整數作檢驗而已，也許在一百萬、一千萬、一億或十億之後會出現反例也說不定，除非，我們能找出理論上的證明。至於證明的方法，目前我們還無法提出。這個課題，有待我們繼續去學習與研究。

(二)改訂烏朗教授猜想的運算規則：

1. 在不斷沿用烏朗教授的猜想所用的規則（若遇偶數就「÷2」，若遇奇數就「×3＋1」）之間，我們發現「×3＋1」的作用，原來是要將所得的奇數化爲偶數（註），回頭再看表一，果然如此。因而激發我們探討：如果要化爲偶數，是否也可以不用「×3＋1」的規則，而用「×3－1」的規則呢？因爲任何奇數「×3」必得奇數（如$1\times3=3$，$3\times3=9$，$5\times3=15$，$7\times3=21$，$9\times3=27$），而奇數「＋1」固然可以獲得「偶數」，但是奇數「－1」也一樣可以獲得偶數呀！是不是利用這種規則也可以？主意既定，我們就開始按「若遇偶數則「÷2」，若遇奇數則「×3－1」的規則來運算。

2. 我們仍舊只考慮二位以內的奇數，我們再次利用原先設想出來的表，來把用「×3－1」的規則演算結果先登錄起來。（見表三）

〔註〕：奇數×3＝奇數×（2＋1）＝奇數×2＋奇數＝

＝奇數

奇數＋1＝偶數

可知　奇數×3＋1　所得的結果必為偶數

所以　這樣的解釋是合理的。

3. 利用表三的結果，我們再次將1到99各數的演變情形，全部列出，結果如下：

(1) 1 → 2 → 1

(2) 3 → 8 → 4 → 2 → 1

(3) 5 → 14 → 7 → 20 → 10 → 5　(↩)

(4) 7（與③相同）

(5)～㊿是9至99各奇數的演變情形（在此從略）。

（表　三）　對二位數以內各奇數作「×3－1」運算的結果

十位數＼結果＼個位數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2		8		14		20		26
1		32		38		44		50		56
2		62		68		74		80		86
3		92		98		104		110		116
4		122		128		134		140		146
5		152		158		164		170		176
6		182		188		194		200		206
7		212		218		224		230		236
8		242		248		254		260		266
9		272		278		284		290		296

4. 根據上面的運算，將二位數以內各奇數，如何從一數變到另一數的路徑關係，作成下表（表四）：

5. 從表四，我們發現：

(1)二位數以內各奇數，作「×3－1」運算後，所走之路徑分成了三組不相連接的「數群」（如表四中的甲、乙、丙），其中甲組由十九個數組成，乙組由十四個數組成，丙組由十七個數組成。

(2)甲組的數全部歸向 1，其中除了 3 以外，各數不是歸向 11，就是歸向 43。由三個方向滙集的奇數有 11、43，它們都是質數。

(3)乙組的數，全都歸向由 5 與 7 二數構成的小循環中，由三個方向滙集的奇數有 7、13、19，它們也都是質數。

(4)丙組的數，全都歸向由 25、37、55、41、61、

（表 四）

二位數以內各奇數作「×3－1」運算的路徑關係：

（甲）

	57				
	↓				
	85				
	↓				
	95				
	↓				
	71				
	↓				
	53		87		
	↓		↓		
	79		65		
	↓		↓		
	59	3	97		
	↓	↓	↓		
15 →	⑪ →	1 ←	㊸ ←	29 ←	39
			↑		
			77		
			↑		
			69		

（乙）

$$
\begin{tikzcd}
 & 9 \arrow[d] & 89 \arrow[d] & & \\
93 \arrow[r] & 13 \arrow[d] & 35 \arrow[l] & 47 \arrow[l] & 63 \arrow[l] \\
81 \arrow[r] & 19 \arrow[d] & 51 \arrow[l] & & \\
75 \arrow[r] & 7 \arrow[d, shift right] & & & \\
 & 5 \arrow[u, shift right] & 27 \arrow[l] & &
\end{tikzcd}
$$

（丙）

$$
\begin{tikzcd}
 & & 21 \arrow[d] & & 33 \arrow[d] \\
 & 45 \arrow[d] & 31 \arrow[d] & 83 \arrow[l] & 49 \arrow[d] \\
 & 67 \arrow[d] & 23 \arrow[d] & & 73 \arrow[d] \\
 & 25 \arrow[d] & 17 \arrow[l] & 91 \arrow[l] & 61 \arrow[l] \\
99 \arrow[r] & 37 \arrow[r] & 55 \arrow[r] & 41 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

91 、 17 七數構成的較大的循環中，由二個方向滙集的奇數中，除 25 外， 31 、 17 、 37 、 61 都是質數。

6. 成果與討論：

與烏朗教授比起來，我們的運氣沒有他的好，雖然爲了要將奇數化爲偶數時，把烏朗教授所用「× 3 ＋1 」的運算規則中的「加 1 」改爲「減 1 」，在第一次運算後，雖然看不出有何不同，但當我們繼續用「× 3—1」的規則演算下去，卻得了分裂爲三而各自不相連的數組。這現象，顯示出：用了不同的演變規則，就會有不同的結果。

我們企圖以不同的規則得到烏朗教授猜想的結果，我們是失敗了，這顯示烏朗教授在遇奇數時用「× 3 ＋ 1 」來運

算，除了化為「偶數」的作用以外，另有其巧妙的地方。我們因而對數字的演變更為好奇。

(三)另一「猜測」的嘗試與探討：

1. 現在，我們每個人都迷住了數字的加減乘除，希望能在其中發現一些巧妙的結果。無意間，我發現將一個二位數的個位「乘以2」，再「加上」十位數，得到一個新數後，再重複以上的演算，結果各數也都會歸向1。老師說可以暫時把它命名為「小虎的猜想」，內容是：在1到99之間的數，如果將個位數「×2」，再「加上」十位數，對所得的新數，再繼續用以上的運算規則做下去，結果都會走到1。

2. 為了證明這個「猜想」是正確的，我們對1到99各整數作了檢驗，我們再次用下表（表五）來把演算結果登錄起來。

3. 運算：

(1) 1 → 2 → 4 → 8 → 16 → 13 → 7 → 14 → 9 → 18 → 17 → 15 → 11 → 3 → 6 → 12 → 5 → 10 → 1

(2) 19 → 19 → 19

(3) 20 → 2

(4) 21 → 4

(5) 22 → 6

(6) 23 → 8

(7) 24 → 10

(8) 25 → 12

(9) 26 → 14

(10) 27 → 16

以上從(3)到(10)各數的演變過程，都與(1)相同。

4. 發現與探究：

(1)發現：

①由運算之(1)，可知1到18各數，都會經過這一個變化過程而歸向1。

②由表五可知，1到99各數，依「個位數×2加上十位

（表　五）1 到 99 各整數作「個位數× 2 加上十位數」運算的結果

十位數＼個位數　結果	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0 ^{0}	2 ^{1}	4 ^{2}	6 ^{3}	8 ^{4}	10 ^{5}	12 ^{6}	14 ^{7}	16 ^{8}	18 ^{9}
1	1 $_{9}$	3 $_{8}$	5 $_{7}$	7 $_{6}$	9 $_{5}$	11 $_{4}$	13 $_{3}$	15 $_{2}$	17 $_{1}$	19 $_{0}$
2	2 $_{18}$	4 $_{17}$	6 $_{16}$	8 $_{15}$	10 $_{14}$	12 $_{13}$	14 $_{12}$	16 $_{11}$	18 $_{10}$	20 $_{9}$
3	3 $_{27}$	5 $_{26}$	7 $_{25}$	9 $_{24}$	11 $_{23}$	13 $_{22}$	15 $_{21}$	17 $_{20}$	19 $_{19}$	21 $_{18}$
4	4 $_{36}$	6 $_{35}$	8 $_{34}$	10 $_{33}$	12 $_{32}$	14 $_{31}$	16 $_{30}$	18 $_{29}$	20 $_{28}$	22 $_{27}$
5	5 $_{45}$	7 $_{44}$	9 $_{43}$	11 $_{42}$	13 $_{41}$	15 $_{40}$	17 $_{39}$	19 $_{38}$	21 $_{37}$	23 $_{36}$
6	6 $_{54}$	8 $_{53}$	10 $_{52}$	12 $_{51}$	14 $_{50}$	16 $_{49}$	18 $_{48}$	20 $_{47}$	22 $_{46}$	24 $_{45}$
7	7 $_{63}$	9 $_{62}$	11 $_{61}$	13 $_{60}$	15 $_{59}$	17 $_{58}$	19 $_{57}$	21 $_{56}$	23 $_{55}$	25 $_{54}$
8	8 $_{72}$	10 $_{71}$	12 $_{70}$	14 $_{69}$	16 $_{68}$	18 $_{67}$	20 $_{66}$	22 $_{65}$	24 $_{64}$	26 $_{63}$
9	9 $_{81}$	11 $_{80}$	13 $_{79}$	15 $_{78}$	17 $_{77}$	19 $_{76}$	21 $_{75}$	23 $_{74}$	25 $_{73}$	27 $_{72}$

註：方格內較小的數字，表示原數與新數之差，右上表示增加，右下表示減少。

數」的規則，作第一次運算後，所得的新數都進入 27 以內。

③由運算之(1)～(10)可知，27 以內各數作第二次運算後，再得的新數都進入 19 以內的範圍。

④由運算之⑴及⑵可知，19 以內各數作第三次運算後，所得的新數除 19 以外，18 以內各數都進入同一個變化過程的系統中。

⑤19 是個走不動的數，由表五可知19 ，38 ，57 ，76 ，95等五個數都會走向19 而止步，這些數恰巧都是19 的倍數。

⑥「小虎的猜測」需要修正了，應改爲：1 到 99 各數，除了19 的倍數以外，用以上的規則運算，最後各數都會走到 1 。

⑦我們所發現到的關係，可以用下圖（圖一）來表示。

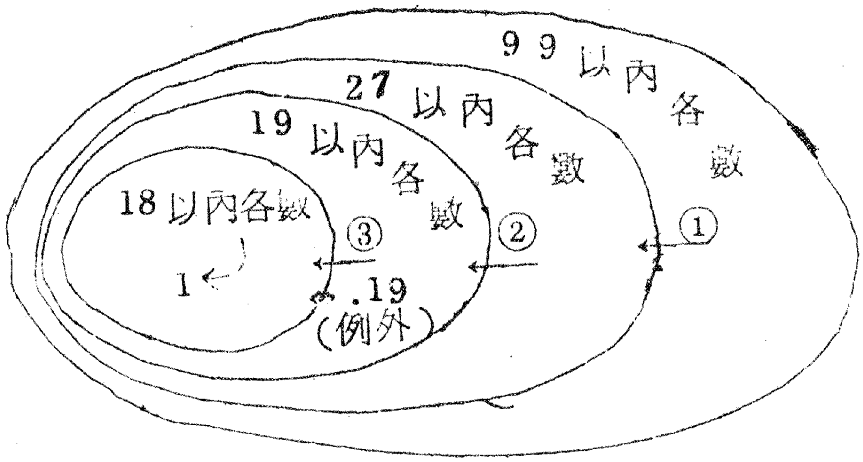
⑵探究：由表五可探知：

①當數目是一位數時，各數是朝大的方向走，也就是數目會越變越大，而進入二位數。如2 → 4 → 8 → 16 。

②當數目在二位數時（拾以上），除 19 以外，都是原來的數比較大，新得到的數比較小。如：

18（大）→ 17（小）→ 15（更小）→ 11

③當數目在二位數時，原來的數與新數之間的差在 0 到81 之間。



圖一　1 到 99 各數作「小虎猜測」運算的演變關係：
①表示第一次運算，②表示第二次運算。

④原數的十位數越大或個位數越小時，它與新數的差也越大，因此，當十位數是 9 ，個位數是 0 時，原數與新數的差最大。即 90（原數）－ 9（新數）＝ 81

⑤也就是：19是十位最小，個位最大的二位數，它與新數的差最小（是 0 ）以外，其餘各數，原數與新數的差都大於0（零）。

因此，除 19 以外的二位數，所得的「新數」都會「變小」，而且只要它們一進入18以內，就一定要走到「10」這個數，這時，我們也就知道它們一定要掉進「1」這個數了。

(3)證明：

爲了要求此研究過程的完整，我們在老師的指導下，完成二位數作此運算會「變小」的理由證明。道理是很簡單的：

①因此我們知道個位「× 2」是增加了一倍的「個位數」，那就是增加了1，2，3，4，5，6，7，8，9 各數。

②至於十位數，由原來的幾拾變成了個位的「幾」，是減少了，到底減少多少呢？我們可由下面的計算看出是減少 9，18，27，36，45，54，63，72，81 各數。

個位數增加	十位數減少
$0 \times 2 - 0 = 0$	$10 - 1 = 9$
$1 \times 2 - 1 = 1$	$20 - 2 = 18$
$2 \times 2 - 2 = 2$	$30 - 3 = 27$
$3 \times 2 - 3 = 3$	$40 - 4 = 36$
$4 \times 2 - 4 = 4$	$50 - 5 = 45$
$5 \times 2 - 5 = 5$	$60 - 6 = 54$
$6 \times 2 - 6 = 6$	$70 - 7 = 63$
$7 \times 2 - 7 = 7$	$80 - 8 = 72$

$8 \times 2 - 8 = 8$ $90 - 9 = 81$

$9 \times 2 - 9 = 9$

③兩相對照，可知除了十位數是1，個位數字是9的時候，一個減少9，一個增加9，原數與新數一樣大外，其餘的任何時候，都是十位「減少的數」比個位「增加的數」來得大，所以新數都會因減少而變小。

5. 推廣：

(1)這個遊戲規則可推廣至三位數、四位數、五………。

(2)對於三位數，「小虎的猜測」可改為：

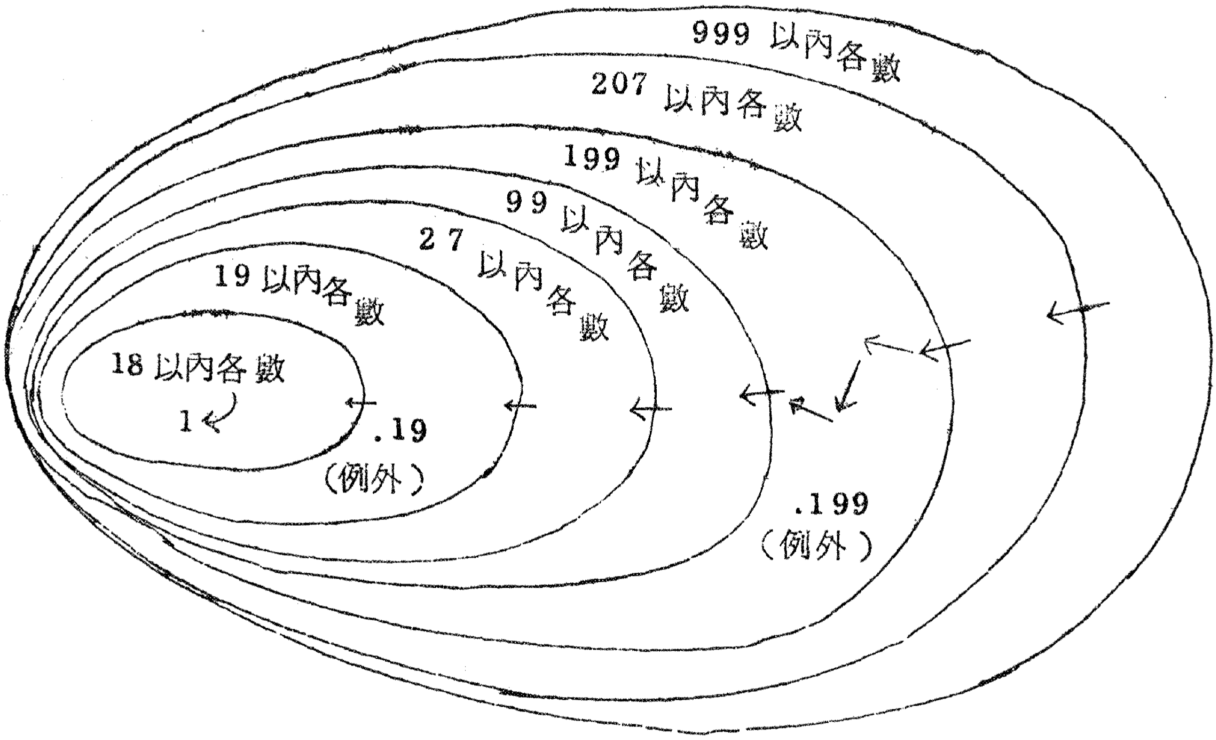
當它是三位數時，用「末二位×2再加上百位數」的規則

當它是二位數時，用「末一位×2再加上十位數」的規則

當它是一位數時，用「個位×2」的規則作運算，

結果除了19及199的倍數以外，其餘各數都會走到1。

(3)可用下圖（圖二）來表示這個關係。



圖二 三位數以內各數作「小虎猜測」運算的演變關係

五、成果、心得與展望

總括地說，在這一長串的研究過程中，我們習用數學的方法，獲得了下面的具體成果：

㈠我們利用涵概所有二位數的表來推算、檢驗，證實了在二位數以內的整數（大於零）範圍內，烏朗教授的猜想是不差的。對於他的「猜想」，我們當然可以同樣用列表的方法，繼續去檢驗其他超過二位以上的數。不過，這樣的做法永遠都只是檢驗的工作而已，不算是證明，這個課題正待大家繼續努力。雖然如此，我們也沒有白走這一遭，因爲我們在過程中設計了檢驗的方法，設想了好用的「表」來進行檢驗工作，來分析、比較這猜想的內涵。

㈡仿傚烏朗教授的猜想，若改用「×3－1」的規則去作演算，結果則不相同。它會形成三個數組，而且這三個數組各自不相連接。這樣的結果，雖然有點出乎意料之外，但是，老師說，發現分裂爲三組的現象，也是一種規律的發現，在研究上的價值，並不低於全體歸併於1的現象，因爲它們爲什麼會分裂爲三？那些數會形成一組？爲什麼？二位數以內各數是如此，那三位數以上呢？是不是所有的數都是如此？這一連串相伴而來的問題，都有待大家去解決，也許可因而引出更好的數學發現也說不定。

至於烏朗教授當初爲什麼會採用他的運算規則，是否其中另有理由？我們在此，仍無法找出合理的解釋。

㈢類似烏朗教授的猜想，我們也做了一個「猜想」，定名爲「小虎的猜想」，內容是這樣的：二位以內的數，如果將個位數「×2」，再「加上」十位數，對所得的新數，繼續用以上的演算規則做下去，結果除了19的倍數以外，其餘各數都會走到1。

這個猜想，在二位數時成立，我們已經作了證明。在三位數時也將成立（除199的倍數及19的倍數以外），甚至於可繼續

推廣至任何位數。

六、參考資料(指導教師用)

㈠林炳炎　「卡布列克常數」科學月刊　民71年1月。

㈡諸明嘉編著　數學歸納法　人間文化事業公司　民68年。

㈢坡利亞著　邱國維譯　數學研究法　開山書店　民60年。

㈣李學數著　數學和數學家的故事　廣角鏡出版社　民69年。

評語：本件處理的是現今數學界未解決的問題，初小學生當然不能解決。本件的作者雖然只試了兩位數的情形，但整理出清晰的圖表，並嚐試用稍微改變題目的方式，找出類似的問題來作平行處理，並把他們的嚐試所得的結果，形成另一個猜測。題材新穎，處理手法更是暗合數學前線研究的常用手法，非常罕見。